TD 04 – Fonctions génératrices ordinaires

Exercice 1.

1. Trouver les fonctions génératrices ordinaires des suites suivantes :
   (a) $\{2^{k+1}\}_{k\geq 0}$;
   (b) $\{k2^{k+1}\}_{k\geq 0}$;
   (c) $\{k^2\}_{k\geq 2}$.
2. Trouver le terme général des fonctions génératrices ordinaires suivantes :
   (a) $\frac{1}{(1-3z)^4}$;
   (b) $\frac{1}{(1-2z^2)^2}$;
   (c) $(1-z^2)\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$.
3. Montrer que $\sum_{1\leq k\leq N} H_k = (N+1)(H_{N+1}-1)$.
4. Trouver la fonction génératrice ordinaire de $(\sum_{0<k<n}\frac{1}{k(n-k)})_{n>1}$.
5. Trouver la fonction génératrice ordinaire de la suite (a_n) définie par $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$ pour $n > 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 4$.

Exercice 2.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins dans $\mathbb{N}^2$ partant des coordonnées $(0,0)$ et composés d'un nombre fini de pas élémentaires vers le haut $(x,y) \to (x,y+1)$ et vers la droite $(x,y) \to (x+1,y)$. La taille d'un chemin de $\mathcal{C}$ est défini comme le nombre de pas de ce chemin. On remarque que $\mathcal{C}$ contient un chemin de longueur nulle, partant de $(0,0)$ et arrivant au même point. On note $\{o\}$ le singleton composé de l'unique chemin de longueur nulle de $\mathcal{C}$. De même, on note $\{\to\}$ le singleton composé du chemin consistant en un pas vers la droite, et $\{\uparrow\}$ le singleton composé du chemin consistant en un pas vers le haut.

1. **(a)** Combien $\mathcal{C}$ contient-il de chemins de longueur n ?
   (b) Combien de chemins de $\mathcal{C}$ de longueur n terminent sur la droite d'équation $y = x$?
   (c) Soit $p \in Z$. Combien de chemins de $\mathcal{C}$ de longueur n terminent sur la droite d'équation $y = x + p$?

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{C}_k$ comme l'ensemble des chemins de $\mathcal{C}$ qui restent à l'intérieur de la bande $\{(x,y)|x \leq y \leq x+k\}$ et qui terminent sur la droite d'équation $y = x$.

2. **(a)** Calculer la série génératrice de $\mathcal{C}_0$.
   (b) Pour $k > 0$, montrer que $\mathcal{C}_k = \{o\} + \{\uparrow\} \times \mathcal{C}_{k-1} \times \{\to\} \times \mathcal{C}_k$.
   (c) Traduire cet isomorphisme combinatoire en termes de séries génératrices. En déduire une expression de la série génératrice de $\mathcal{C}_k$ en fonction de la série génératrice de $\mathcal{C}_{k-1}$.
   (d) Montrer que pour tout k, la série génératrice de $\mathcal{C}_k$ est une fraction rationnelle.
   (e) Pour k fixé, quel type de relation de récurrence vérifie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}_k$?
3. **(a)** Montrer que la série génératrice de $\mathcal{C}_2$ est égale à $\frac{1-z^2}{1-2z^2}$.

(b) Calculer le développement en série formelle de $\frac{1-u}{1-2u}$.

(c) Quel est le nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}_2$? Retrouver ce résultat par une méthode directe.

(d) Quel est le nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}_2$ qui touchent (au moins une fois) la droite d'équation $y = x + 2$?

On définit $\mathcal{C}^+$ comme l'union croissante $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ — attention ce n'est pas une union disjointe.

4. **(a)** Décrire en une phrase les chemins de $\mathcal{C}^+$.

(b) Calculer la série génératrice de $\mathcal{C}^+$.

(c) En déduire le nombre de chemins de longueur n dans $\mathcal{C}^+$.