

---

**TD 10 – Maman j'ai rétréci les élèves**


---

**Exercice 1.**

SAT alors

Montrer que le problème suivant 3-SAT est NP-complet.

3-SAT

*Instance* : Un ensemble fini de clauses à trois littéraux.*Question* : Existe-t-il une assignation des variables qui satisfasse toutes les clauses ?**Exercice 2.***k innocents*Montrer que le problème suivant  $k$ -COLOR est NP-complet. $k$ -COLOR*Instance* : Un graphe  $G = (V, E)$  et un entier strictement positif  $k \leq |V|$ .*Question* : Existe-t-il une  $k$ -coloration du graphe  $G$  ?**Exercice 3.***Mon premier est utile aux Nancéens, mon second peut être de table, mon dernier est un département.*

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est NP-complet.

SUBSET-SUM

*Instance* : Un ensemble fini  $S$  d'entiers positifs et un entier objectif  $t$ .*Question* : Existe-t-il un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  tel que  $\sum_{x \in S'} x = t$  ?**Exercice 4.**

Retour sur le coloriage

1. Montrer que le problème 2-COLOR est dans P.

2-COLOR

*Instance* : Un graphe  $G = (V, E)$ .*Question* : Existe-t-il une 2-coloration du graphe  $G$  ?

2. Construire un graphe ayant au moins 4 sommets  $x, y, z$  et  $t$  tel que pour toute 3-coloration du graphe,
  - si  $x, y$  et  $z$  ont même couleur, alors  $t$  également ;
  - si  $x, y$  et  $z$  n'ont pas la même couleur,  $t$  peut être colorié arbitrairement.
3. Montrer que le problème 3-COLOR est NP-complet.

3-COLOR

*Instance* : Un graphe  $G = (V, E)$ .*Question* : Existe-t-il une 3-coloration du graphe  $G$  ?Un graphe est dit *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes.

4. Construire un graphe planaire ayant au moins 4 sommets  $u_1, u_2, v_1$  et  $v_2$  avec la propriété suivante : si on fixe la couleur  $c_1$  pour  $u_1$  et  $c_2$  pour  $u_2$  (éventuellement identiques), alors
  - il existe une 3-coloration du graphe ;
  - toute 3-coloration donne la couleur  $c_1$  à  $v_1$  et  $c_2$  à  $v_2$ .
5. En déduire que le problème PLANAR-3-COLOR est NP-complet.

PLANAR-3-COLOR

*Instance* : Un graphe planaire  $G = (V, E)$ .*Question* : Existe-t-il une 3-coloration du graphe  $G$  ?

6. Que pouvez-vous dire du problème PLANAR-4-COLOR ?