TD 11 – Encore un peu de NP-complétude

Exercice 1. *À cours d'idées*

Soient P_1 et P_2 deux problèmes de décision, et supposons qu'on connaisse une transformation polynomiale (une réduction) de P_1 en P_2. Répondre aux sept questions suivantes avec un maximum de deux lignes de justification par question.

1. Si $P_1 \in \mathsf{P}$, a-t-on $P_2 \in \mathsf{P}$?
2. Si $P_2 \in \mathsf{P}$, a-t-on $P_1 \in \mathsf{P}$?
3. Si P_1 est NP-complet, P_2 est-il NP-complet ?
4. Si P_2 est NP-complet, P_1 est-il NP-complet ?
5. Si on connaît une transformation polynomiale de P_2 en P_1, P_1 et P_2 sont-ils NP-complets ?
6. Si P_1 et P_2 sont NP-complets, existe-t-il une transformation polynomiale de P_2 en P_1 ?
7. Si $P_1 \in \mathsf{NP}$, P_2 est-il NP-complet ?

Exercice 2. *Souris*

1. Montrer que le problème Clique est NP-complet.

Clique
Instance : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier $k \geq 0$.
Question : Existe-t-il une clique de taille k dans G, c'est-à-dire un sous-ensemble $V' \in V$ de taille k tel que pour tout $u, v \in V'$, $\{u, v\} \in E$?

2. Pour les différentes valeurs possibles de k, que pouvez-vous dire du problème k-Clique ?

k-Clique
Instance : Un graphe $G = (V, E)$.
Question : Existe-t-il une clique de taille k dans G ?

Exercice 3. *Mon premier est utile au Nancéens, mon second peut être de table, mon dernier est un département.*

Montrer que le problème Subset-Sum est NP-complet.

Subset-Sum
Instance : Un ensemble fini S d'entiers positifs et un entier objectif t.
Question : Existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$?

Exercice 4. *Retour sur le coloriage*

1. Montrer que le problème 2-Color est dans P.

   2-Color
   Instance : Un graphe $G = (V, E)$.
   Question : Existe-t-il une 2-coloration du graphe G ?

2. Construire un graphe ayant au moins 4 sommets x, y, z et t tel que pour toute 3-coloration du graphe,
   – si x, y et z ont même couleur, alors t également ;
   – si x, y et z n'ont pas la même couleur, t peut être colorié arbitrairement.

3. Montrer que le problème 3-Color est NP-complet.

   3-Color
   Instance : Un graphe $G = (V, E)$.
   Question : Existe-t-il une 3-coloration du graphe G ?

Un graphe est dit *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes.

4. Construire un graphe planaire ayant au moins 4 sommets u_1, u_2, v_1 et v_2 avec la propriété suivante : si on fixe la couleur c_1 pour u_1 et c_2 pour u_2 (éventuellement identiques), alors
   – il existe une 3-coloration du graphe ;
   – toute 3-coloration donne la couleur c_1 à v_1 et c_2 à v_2.

5. En déduire que le problème Planar-3-Color est NP-complet.

   Planar-3-Color
   Instance : Un graphe planaire $G = (V, E)$.
   Question : Existe-t-il une 3-coloration du graphe G ?

6. Que pouvez-vous dire du problème Planar-4-Color ?