TD 05 – Satellites

Exercice 1. *Retour à l'école*

1. Montrer que le langage Add $= \{\langle \overline{n}, \overline{m}, \overline{n+m} \rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$ est dans L, où $\overline{n}$ est la représentation de l'entier n en binaire.
2. Montrer que le langage Mult $= \{\langle \overline{n}, \overline{m}, \overline{n \cdot m} \rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$ est dans L.
3. Montrer que le langage des mots bien parenthésés est dans L.
4. Que dire de celui des mots bien parenthésés avec deux types de parenthèses ? Par exemple, ([[]()]())[] est dans le langage, mais pas ([)].

Exercice 2. *Baire et Banach*

1. Montrer que Space-TMSat $= \{\langle \alpha, x, 1^n \rangle : M_\alpha$ accepte x en espace $n\}$ est PSPACE-complet.
2. Vous avez vu en cours que TQBF est PSPACE-difficile. Montrer qu'il est dans PSPACE.
3. Améliorer l'algorithme précédent afin qu'il fonctionne en espace $O(n+m)$ où n est le nombre de variables, et m la longueur de l'entrée.

Exercice 3. *Théorème de hiérarchie en espace déterministe*

1. Montrer qu'il existe une machine de Turing déterministe $\mathcal{U}$ qui sur l'entrée $\langle \alpha, x \rangle$ telle que M_α fonctionne en espace $s(n)$ simule $M_\alpha(x)$ en utilisant un espace $c \cdot s(|x|)$ (où c ne dépend pas de $|x|$).
2. Montrer le théorème suivant, dû à Stearns, Hartmanis et Lewis (1965) :
   Théorème. *Soit s_1 et s_2 deux fonctions constructibles en espace telles que $s_1(n) = o(s_2(n))$. Alors* $\mathsf{DSPACE}(s_1(n)) \subsetneq \mathsf{DSPACE}(s_2(n))$.

Exercice 4. *« Plus petits les espaces… »*

Pour $k \geq 0$, soit w_k la concaténation dans l'ordre lexicographique de toutes les chaînes de longueur k, séparées par des signes $\sharp$ (*i.e.* $w_k = 0^{k-2}00\sharp 0^{k-2}01\sharp 0^{k-2}10\sharp \ldots \sharp 1^k$). Soit $W = \{w_k : k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que W n'est pas un langage régulier.
2. Montrer que $W \in \mathsf{DSPACE}(\log\log n)$.
3. Montrer que pour tout $s(n) = o(\log\log(n))$, $\mathsf{DSPACE}(s(n)) = \mathsf{DSPACE}(1) = \mathsf{REG}$. On pourra se servir de la notion de *suite de franchissements*.