

---

**TD 06 – Jouons dans l'espace**


---

**Exercice 1.***Geography*

Le jeu GEO oppose deux joueurs, appelés ici Alice et Bob. Alice commence le jeu en nommant une ville convenue. Chaque joueur alternativement doit alors trouver une ville dont le nom commence par la dernière lettre du nom de la ville précédemment citée. Une même ville ne peut être citée deux fois. Le premier joueur qui ne peut plus continuer (les villes commençant par la dernière lettre de la dernière ville considérée ont toutes été nommées) a perdu.

1. Formaliser le problème GEO comme un problème de décision dont l'entrée est un graphe  $G$  et un sommet  $s$  du graphe.
2. Comment peut-on voir TQBF comme un jeu entre deux joueurs ?
3. Montrer que TQBF se réduit polynomialement à GEO.
4. En déduire que GEO est PSPACE-complet.
5. Montrer que GEO reste PSPACE-difficile si on se restreint aux graphes planaires.
6. Montrer que c'est encore le cas si on se restreint aux graphes planaires tel que chaque sommet ait un degré total inférieur ou égal à 3, avec degrés entrant et sortant inférieurs ou égaux à 2.

**Extrait des règles du jeu de Go**

Le plateau est une grille de  $19 \times 19$  points. Un point est soit inoccupé, soit occupé par une pierre noire, soit occupé par une pierre blanche. Chaque point a quatre voisins : ceux situés directement au-dessus, au-dessous, à droite et à gauche. Les points en diagonale ne sont pas voisins. Il y a deux joueurs, Blanc et Noir, qui peuvent à chaque tour poser une pierre de leur propre couleur ou passer.

Grossièrement, le but du jeu est de former de grands groupes de pierres de sa couleur qui soient en sécurité et de capturer le plus possible de pierres de la couleur de l'adversaire.

Les définitions et règles suivantes sont symétriques pour les noirs et les blancs.

Un *groupe noir* est un ensemble maximal de pierres noires connexe sur la grille. Un groupe noir est *encerclé* si aucune pierre du groupe n'a de voisin inoccupé. Sitôt qu'un groupe noir devient encerclé, en général parce qu'une pierre blanche a été posée, il est capturé et enlevé du plateau. Blanc n'a pas le droit de poser une pierre blanche qui provoque l'encercllement d'un groupe blanc sans provoquer l'encercllement d'un groupe noir. Par contre si un groupe noir et un groupe blanc se retrouvent simultanément encerclés par le dépôt d'une pierre blanche, alors le groupe noir est capturé.


**Exercice 2.***Let's go*

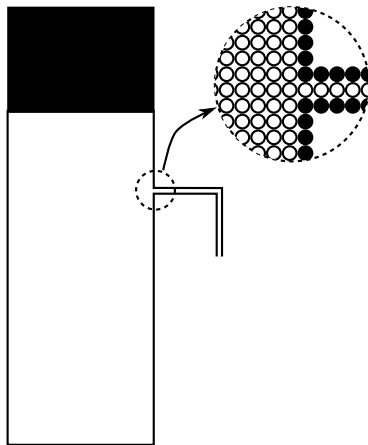
Nous altérons maintenant les véritables règles du jeu. La grille est constituée de  $n \times n$  points. Une partie dure exactement  $n^2$  coups. Le gagnant est celui dont il reste le plus de pierres sur la grille. En cas d'égalité des nombres de pierres restantes, Blanc est déclaré vainqueur.

GO est l'ensemble des couples formés d'une configuration du plateau et d'un entier  $k < n^2$  tels que les joueurs se retrouvent dans cette configuration après  $k$  coups, c'est à Blanc de jouer et il a une stratégie gagnante.

1. Montrer que GO est dans PSPACE.

Nous allons maintenant montrer que GO est PSPACE-difficile, par réduction depuis GEO.

2. Est-il suffisant de retirer une lettre à GEO ?<sup>1</sup>
3. Pourquoi peut-on se restreindre dans GEO aux cas où le graphe est obtenu par réduction de TQBF ?
4. Donner alors les différents types de sommets qui peuvent être présents dans le graphe.
5. Que peut-on dire de la figure  qu'on appelle les yeux ?
- 6.



Le graphe est simulé à l'aide d'un plateau sur lequel se trouve un large rectangle blanc entouré de noir, à l'exception d'un fil blanc bordé de noir qui s'en échappe. Il reste  $p$  coups à jouer. On veut que Blanc ait une stratégie gagnante ssi Alice en a une sur l'instance  $(G, s)$ . Montrer comment *simuler*  $G$  sur le plateau afin que Blanc gagne dès qu'il a connecté le grand rectangle à des yeux.

### Exercice 3.

*Passe-temps*

1. Au choix, jouer à GEO avec son voisin en attendant la fin de l'heure, ou me poser des questions pour le partiel...

**Note pour les connaisseurs du Go et les autres.** Si on autorise la règle du *ko*, le jeu devient EXP-complet. D'autre part, si on ne met pas de borne sur le nombre de coups joués, on ne sait pas si  $GO \in PSPACE$ .