TD 03 – Yet Another Cook Theorem

Exercice 1. *(Le) cours, Forest ! (Le) cours !*

1. Montrer que coP = P.
2. Montrer que $L \in$ coNP ssi il existe un polynôme p et $L' \in$ P tels que

$$x \in L \iff \forall u \in \{0,1\}^{p(|x|)}, \langle x, u\rangle \in L'.$$

3. Montrer que s'il existe un langage de NP qui est coNP-difficile, alors NP = coNP.
4. Montrer qu'un langage L est NP-complet ssi $\bar{L}$ est coNP-complet.

Exercice 2. *Kapla et Lego*

1. Montrer que les fonctions $n \mapsto 1^n$ et $1^n \mapsto n$ sont calculables en temps $\mathcal{O}(n)$.
2. Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en temps : $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto 2^n$.
3. Soit f et g constructibles en temps. Montrer que $f + g$, $f \times g$ et $f \circ g$ le sont aussi.

⋆ **Exercice 3.** *Théorème de hiérarchie en temps non déterministe (Cook 1972)*

Théorème. *Soit f et g deux fonctions constructibles en temps telles que $f(n+1) = o(g(n))$. Alors*

$$\mathsf{NTIME}(f(n)) \subsetneq \mathsf{NTIME}(g(n)).$$

Dans la suite on suppose donc que $f(n+1) = o(g(n))$, et on veut montrer ce théorème.

1. Rappeler l'idée de la preuve du théorème de hiérarchie en temps déterministe et expliquer pourquoi cette preuve ne peut pas simplement être adaptée au cas présent.
2. Expliquer comment effectivement énumérer les MTND fonctionnant en temps $O(f(n))$.
3. Construire une machine universelle U pour les MTND, c'est-à-dire que sur l'entrée $\langle \alpha, x\rangle$, U simule $M_\alpha(x)$ en temps linéaire, où α décrit la machine non déterministe M_α.

On va utiliser une *diagonalisation paresseuse*. D'habitude pour diagonaliser, on cherche à « éliminer » la machine M_i sur l'entrée i. Dans la version paresseuse, on cherche à éliminer M_i non pas sur une entrée bien précise mais sur l'une des entrées d'un ensemble I_i d'entrées.
A chaque machine M_i de l'énumération précédente, on associe un ensemble unaire $I_i = \{1^k : \alpha_i \leq k \leq \beta_i\}$ où α_i et β_i seront définis plus tard. Soit N la MTND suivante : sur l'entrée x, N détermine i tel que $x \in I_i$, puis

- **(a)** si $x \in I_i \setminus \{1^{\beta_i}\}$, N simule $M_i(x \cdot 1)$ de manière non déterministe en s'arrêtant au bout d'au plus $g(|x|)$ étapes, et accepte ssi M_i s'est arrêtée en ce temps-là et a accepté ;
- **(b)** si $x = 1^{\beta_i}$, N simule $M_i(1^{\alpha_i})$ **de manière déterministe**, et répond le contraire de M_i.

4. Comment choisir α_i et β_i tels que $\mathcal{L}(N) \in \mathsf{NTIME}(g(n))$?
5. Supposons que $\mathcal{L}(N) \in \mathsf{NTIME}(f(n))$, grâce à une MTND M. Montrer qu'il existe i tel que $M = M_i$ et tel qu'à l'étape **(a)**, M_i est toujours simulée jusqu'au bout.
6. Conclure.