# TD 04 – Soldes

**Exercice 1.** *Échauffements*

1. Montrer que les fonctions $n \mapsto \lfloor \log n \rfloor$ et $n \mapsto n^k$ ($k \geq 1$) sont constructibles en espace, et que si $f$ est constructible en espace, alors $2^f$ également.
2. Montrer que les langages $\textsc{Pair} = \{x : x \text{ contient un nombre pair de } 1\}$ et $\textsc{Mult} = \{\langle \overline{n}, \overline{m}, \overline{n \cdot m} \rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$ sont dans $\mathsf{L}$.
3. Montrer que 3-Sat $\in \mathsf{PSPACE}$, et plus généralement que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

**Définition.** Une fonction $f : \{0,1\}^\star \to \{0,1\}^\star$ est dite *calculable implicitement en espace logarithmique* (*ciel*) si $f$ est polynomialement bornée ($\exists c \forall x, |f(x)| \leq |x|^c$) et si $L_f := \{\langle x, i \rangle : f(x)_i = 1\}$ et $L'_f := \{\langle x, i \rangle : i \leq |f(x)|\}$ sont dans $\mathsf{L}$.

On définit les trois réductions suivantes :
- *many-one* ou *Karp* : $A \leq_m^p B \iff \exists f \in \mathsf{FP}, (x \in A \iff f(x) \in B)$
- *par oracle* ou *Cook-Turing* : $A \leq_T^p B \iff A \in \mathsf{P}^B$
- *en espace logarithmique* : $A \leq_l B \iff \exists f$ ciel $, (x \in A \iff f(x) \in B)$

✎ Quelle est la réduction vue en cours ?

**Exercice 2.** *Oracles*

1. Montrer que Tautologie $\in \mathsf{P}^{\textsc{Sat}}$, et plus généralement que pour tout $A$, $\bar{A} \leq_T^p A$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathsf{P}$, $\mathsf{P}^A = \mathsf{P}$.
3. Montrer que $\leq_T^p$ est transitive ($A \leq_T^p B$ et $B \leq_T^p C$ implique $A \leq_T^p C$).
4. Montrer que si Tautologie $\leq_m^p$ Sat alors $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.
5. Montrer que $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$ ssi $\mathsf{NP}$ est close pour $\leq_T^p$ ($A \leq_T^p B$ et $B \in \mathsf{NP} \implies A \in \mathsf{NP}$).
6. Quelles relations existent entre $\leq_m^p$ et $\leq_T^p$ ?

**Exercice 3.** *Réductions en espace logarithmique*

**Définition.** Une fonction $f : \{0,1\}^\star \to \{0,1\}^\star$ est dite *calculable en espace logarithmique avec écriture seule, toujours en-avant* (*céleste*) si $f$ peut être calculée par une machine de Turing fonctionnant en espace $\mathcal{O}(\log n)$ dont le ruban de sortie est à « écriture unique », c'est-à-dire qu'à chaque étape, la tête de lecture du ruban de sortie peut soit rester immobile, soit écrire un symbole et se déplacer vers la droite.

1. Montrer qu'une fonction est de type *ciel* si et seulement si elle est *céleste*.
2. Montrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions *ciel*, alors $f \circ g$ également.
3. Montrer que $\leq_l$ est transitive, et que $\mathsf{L}$ est close pour $\leq_l$.
4. Montrer que Sat et 3-Sat sont $\mathsf{NP}$-complets pour la réduction $\leq_l$.