TD 02 – Des chaînes

Exercice 1. *Le B.A.BA*

Pour chacun des systèmes de réécriture suivants, déterminer s'il est normalisant [1], s'il est nœthérien et s'il est confluent. Si le système n'est pas confluent, proposer un système confluent qui conserve la relation d'équivalence $\overset{*}{\leftrightarrow}$.

1. Soit $\Sigma_1 = \{v, o\}$ et R_1 le système de réécriture sur Σ_1 comportant les règles :

$$\begin{array}{rcl} vo & \to & ooov \\ ov & \to & v \\ vv & \to & oooo \\ oo & \to & o \end{array}$$

2. Soit $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$ et R_2 le système de réécriture sur Σ_2 comportant les règles :

$$\begin{array}{rcl} aa & \to & \epsilon \\ bb & \to & \epsilon \\ ab & \to & c \end{array}$$

3. Soit $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$ et R_3 le système de réécriture sur Σ_3 comportant les règles :

$$\begin{array}{rcl} ab & \to & c \\ bc & \to & a \\ ac & \to & b \\ aa & \to & \epsilon \\ bb & \to & \epsilon \\ cc & \to & \epsilon \end{array}$$

4. Soit $\Sigma_4 = \{a, b, c\}$ et R_4 le système de réécriture sur Σ_4 comportant les règles :

$$\begin{array}{rcl} aba & \to & b \\ bab & \to & a \\ aa & \to & bb \end{array}$$

Exercice 2. *GPS*

Soit un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et un système de réécriture R sur Σ^* comportant les règles :

$$aaaa \longleftrightarrow \epsilon$$

$$abba \longleftrightarrow ababaababa$$

$$\epsilon \longleftrightarrow bb$$

$$abab \longleftrightarrow baabaababa$$

1. Tout mot admet une forme normale.

1. Proposez un système de réécriture nœthérien R' sur Σ^* le plus simple possible tel que la relation d'équivalence $\overset{*}{\leftrightarrow}_{R'}$ soit la même que $\overset{*}{\leftrightarrow}_{R}$.
2. De quelle loi peut-on munir Σ^* pour former un monoïde ?
3. Le système R' est-il confluent ? On donnera une preuve s'appuyant sur le théorème des paires critiques.
4. Combien de classes d'équivalence sur Σ existent pour la relation $\overset{*}{\leftrightarrow}_{R'}$?
5. Quel est l'avantage d'avoir un système de réécriture terminant et confluent dans ce cas ?
6. Quel commentaire pouvez vous faire sur ces systèmes de réécriture en considérant que a représente une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et que b représente une symétrie selon l'axe des x ?

Exercice 3. *Lemme de Higman*

Soit Σ un alphabet fini. On définit sur $\Sigma^\star$ la relation d'ordre $x \leq y$ par « x est un sous-mot de y ». On se propose de montrer le résultat suivant.

Lemme. *Soit (x_i) une suite infinie de $\Sigma^\star$. Alors il existe $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.*

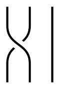
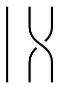
Une suite est dite *bonne* si elle vérifie la propriété du lemme, *mauvaise* sinon. Supposons qu'il existe une mauvaise suite. On construit une suite (x_i) récursivement : pour tout $i \geq 0$, on choisit un élément minimal x_i tel qu'il existe une mauvaise suite commençant par $x_0, \ldots, x_i$.

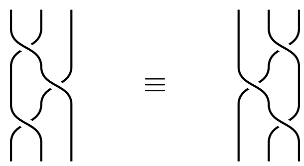
1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(i)})$ de (x_i) dont tous les éléments commencent par une même lettre $a \in \Sigma$.

On note $x'_{\phi(i)}$ le mot défini par $x_{\phi(i)} = a x'_{\phi(i)}$.

3. Conclure en raisonnant sur la suite $x_0, x_1, \ldots, x_{\phi(0)-1}, x'_{\phi(0)}, x'_{\phi(1)}, \ldots$

Exercice 4. *Jouons à la coiffeuse*

On considère les tressages sur trois brins, où les opérations possibles consistent à ramener un brin sur son voisin de droite :  et . On a naturellement[2] l'équivalence entre les deux tressages suivants :



1. Formaliser ce jeu par un système de réécriture sur l'alphabet $\{a, b\}$. A quoi correspondent la concaténation et le mot vide ? Vérifier qu'on a bien une structure de monoïde.
2. Ajouter des opérations de tressage afin de munir ce jeu d'une structure de groupe. Quelles équivalences de tressage obtient-on ? Compléter également l'alphabet et le système de réécriture correspondant. On note R le système de réécriture ainsi obtenu.
3. Comment s'écrit la tresse usuelle ?
4. R est-il nœthérien ? Est-il confluent ? Si non, le compléter en un système confluent, et dessiner ses règles sous forme de tresses.

2. Si elle ne vous parait pas si naturelle, retournez à vos poupées.