TD 03 – Mettons un terme à la réécriture

Exercice 1. *Lemme de Higman*

Soit Σ un alphabet fini. On définit sur $\Sigma^\star$ la relation d'ordre $x \leq y$ par « x est un sous-mot de y ». On se propose de montrer le résultat suivant.

Lemme. *Soit (x_i) une suite infinie de $\Sigma^\star$. Alors il existe $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.*

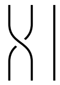
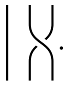
Une suite est dite *bonne* si elle vérifie la propriété du lemme, *mauvaise* sinon. Supposons qu'il existe une mauvaise suite. On construit une suite (x_i) récursivement : pour tout $i \geq 0$, on choisit un élément minimal x_i tel qu'il existe une mauvaise suite commençant par $x_0, \dots, x_i$.

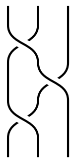
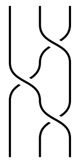
1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(i)})$ de (x_i) dont tous les éléments commencent par une même lettre $a \in \Sigma$.

On note $x'_{\phi(i)}$ le mot défini par $x_{\phi(i)} = ax'_{\phi(i)}$.

3. Conclure en raisonnant sur la suite $x_0, x_1, \dots, x_{\phi(0)-1}, x'_{\phi(0)}, x'_{\phi(1)}, \dots$

Exercice 2. *Jouons à la coiffeuse*

On considère les tressages sur trois brins, où les opérations possibles consistent à ramener un brin sur son voisin de droite :  et . On a naturellement[1] l'équivalence entre les deux tressages suivants :

 $\equiv$ 

1. Formaliser ce jeu par un système de réécriture sur l'alphabet $\{a, b\}$. A quoi correspondent la concaténation et le mot vide ? Vérifier qu'on a bien une structure de monoïde.
2. Ajouter des opérations de tressage afin de munir ce jeu d'une structure de groupe. Quelles équivalences de tressage obtient-on ? Compléter également l'alphabet et le système de réécriture correspondant. On note R le système de réécriture ainsi obtenu.
3. Comment s'écrit la tresse usuelle ?
4. R est-il nœthérien ? Est-il confluent ? Si non, le compléter en un système confluent, et dessiner ses règles sous forme de tresses.

Exercice 3. *Extrait de partiel*

Soit $A = \{a, b\}$ et S le système de réécriture de chaînes sur A défini par

$$S = \{(aa, \epsilon), (bbb, \epsilon), (aba, bb), (bab, a)\}.$$

1. Si elle ne vous parait pas si naturelle, retournez à vos poupées.

1. S est-il nœthérien ?
2. S est-il confluent ? Sinon, le compléter si c'est possible.

On note A^*/S l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\overset{*}{\leftrightarrow}$. Si on note $[a]$ la classe de a, ce quotient est naturellement muni d'une structure de monoïde par $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$.

3. Quel est le cardinal de A^*/S ? Ce monoïde est-il commutatif ?

Exercice 4. *Oh, les termes !*

On définit un ensembles de termes à partir d'un ensemble de *variables*, généralement notées x, y, z etc. et d'un ensemble Σ de *symboles fonctionnels* donnés avec une *arité* (lorsque l'arité st nulle, on parle de *constante*). Un terme est alors soit une variable, soit de la forme $f(t_1, \ldots, t_k)$ où f est un symbole de fonction d'arité k, et les t_i sont des termes.

1. Pour $\Sigma = \{0, s\}$, quelle arité donner à chacun des symboles pour obtenir les termes décrivant les entiers ?
2. Quels sont les symboles et les règles de réductions nécessaires pour définir une structure de groupe ?

Exercice 5.

Soit R le système de réécriture sur $\Sigma = \{r^{(1)}, v^{(1)}\}$ défini par

$$S = \{r(r(x)) \to r(x), r(v(x)) \to v(x), v(v(x)) \to r(x), v(r(x)) \to v(x)\}.$$

1. R est-il convergent ?
2. À quoi cela vous fait-il penser ?

Exercice 6.

Soit un système de réécriture sur les termes de $\{f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)}, A^{(0)}\}$. Soit x une variable.

✎ Proposez X tel que $\{f(g(x)) \longrightarrow X(x), g(h(x)) \longrightarrow A\}$ soit confluent.

Exercice 7. *En bon termes avec la réécriture*

Soit un système de réécriture sur les termes de $\{Z^{(0)}, s^{(1)}, a^{(2)}\}$:

$$a(Z, x) \longrightarrow s(x)$$

$$a(s(x), Z) \longrightarrow a(x, s(Z))$$

$$a(s(x), s(y)) \longrightarrow a(x, a(s(x), y))$$

On remarque qu'en prenant $Z = 0$ et $s(x) = x + 1$, ce système calcule a, la fonction d'Ackermann.

✎ Est-ce que le système termine ? Exhibez une preuve ou un contre exemple.

Exercice 8.

Soit R le système de réécriture sur $\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(1)}\}$, $R = \{f(g(f(x))) \longrightarrow g(x)\}$.

1. R est il confluent ?
2. Proposez R' convergent tel que $\overset{*}{\leftrightarrow}_R = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R'}$.