

TD 04 – Recettes de grammaires


Exercice 1. a^{k^n}

 Construire une grammaire G_k telle que $L(G_k) = \{a^{k^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, où k est fixé, $k \in \mathbb{N}$ et $k > 0$.

Exercice 2.*Grammaires monotones et contextuelles*


1. Construire une grammaire monotone¹ $G = (V, \{a, b\}, S, P)$ telle que $L(G) = \{xx \mid x \in \{a, b\}^+\}$
2. Construire une grammaire contextuelle G_1 équivalente à G .

Exercice 3.*Lemme de structure des dérivations*

 Prouver le lemme suivant par induction sur r :

Lemme. Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire hors-contexte, et $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$. Si $\alpha \xrightarrow{r} \beta$ pour un certain $r \geq 0$, et si $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$, $n \geq 1$ et $\alpha_i \in (V \cup T)^*$, alors il existe $t_1, \dots, t_1 \in \mathbb{N}$ et $\beta_1, \dots, \beta_n \in (V \cup T)^*$ tels que $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$, $\alpha_i \xrightarrow{t_i} \beta_i$ pour tout i et $\sum_i t_i = r$.

Exercice 4.*Langage miroir*

 Soit L un langage hors-contexte, et L^T son langage miroir : $L^T = \{x^T \mid x \in L\}$ où $(a_1 \dots a_n)^T = a_n \dots a_1$. Montrer que L^T est également hors-contexte.


Exercice 5.*Simplifications de grammaires*

1. Montrer que pour toute grammaire $G = (V, T, S, P)$, il existe une grammaire équivalente $G' = (V', T, S', P')$ telle que si $\alpha \rightarrow \beta \in P'$ et $|\beta| < |\alpha|$, alors $\alpha = X \in V'$ et $\beta = \epsilon$.
2. Montrer que pour toute grammaire $G = (V, T, S, P)$, il existe une grammaire équivalente $G'' = (V'', T, S'', P'')$ telle que
 - si $\alpha \rightarrow \beta \in P''$ et $|\beta| < |\alpha|$, alors $\alpha = X \in V''$ et $\beta = \epsilon$;
 - pour toute production $\alpha \rightarrow \beta \in P''$, $|\beta| \leq 2$.

Exercice 6. *ϵ -rule*


Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire hors-contexte et soit $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ deux mots tels que $|\alpha| > |\beta|$ et $\alpha \xrightarrow{*}_G \beta$.

1. Telle que $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P, |\alpha| \leq |\beta|$.

 Prouver que α contient au moins un symbole non-terminal X tel que $X \xrightarrow[G]{*} \epsilon$.

* **Exercice 7.**

Grammaire pseudo-contextuelle

 Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire non hors-contexte telle que chaque production est de la forme $uXv \rightarrow u\alpha v$ où $X \in V$, $u, v \in T^*$ et $\alpha \in (V \cup T)^*$. Montrer que $L(G)$ est un langage hors-contexte.