TD 08 – Salade d'automates

Exercice 1. *Equivalences*

Le but de cet exercice est de donner une preuve possible de l'équivalence des grammaires linéaires à gauche, des automates finis non déterministes, et des expressions régulières.

1. Soit R une expression régulière. Construire une grammaire linéaire à gauche générant $L(R)$. Pouvez-vous modifier votre grammaire pour que toutes ses règles soient de la forme $X \to aY$ ou $X \to a$?
2. Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire linéaire à gauche. Sans perte de généralité, on peut supposer que toutes les règles sont de la forme $X \to aY$ ou $X \to a$. Décrire un automate fini non déterministe reconnaissant $L(G)$.
3. Soit A un automate fini non déterministe. On numérote ses états de 1 à n, en supposant par exemple que l'état initial a le numéro 1. Pour tout $(i, j, k) \in \{1, \ldots, n\}^3$, on note L_{ij}^k l'ensemble des mots w tels qu'il existe dans A un chemin de l'état i à l'état j étiqueté par w, lequel chemin n'utilise que les k premiers états [1] mis à part les deux extrémités le cas échéant. On note R_{ij}^k une expression régulière représentant L_{ij}^k.
   - **(a)** Comment s'exprime le langage reconnu L par A en fonction des L_{ij}^k ? Donner une expression régulière R correspondante en fonction des R_{ij}^k.
   - **(b)** Expliquer comment construire l'expression régulière R.

Exercice 2. *Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎ Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 3. *C'est le BORD(L)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Les langages suivants sont-ils nécessairement rationnels ?

Soit $\mathcal{A} = (Q, i, F, \delta)$ un AFD reconnaissant le langage L.

1. $CYCLE(L) = \{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2. $MAX(L) = \{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3. $MIN(L) = \{x \in L \mid \text{ aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
4. $INIT(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$

1. C'est-à-dire de numéro inférieur ou égal à k.

5. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\ y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| \ = \ |x|\}$

6. LOG(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid t\exists\ y \in \Sigma^* \text{avec } xy \in L \text{ et } |y| = \ 2^{|x|}\}$

7. SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{avec } xy \in L \text{et} |y| = |x|^2\}$

8. BORD(L) = $\{w \in \Sigma^* \mid \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$