

Les ensembles de Besicovitch

1 Présentation

BESICOVITCH découvre les ensembles appelés plus tard *ensembles de Besicovitch* en 1919 alors qu'il travaille sur des problèmes d'intégration dans le plan.

Définition 1.1 : Un ensemble $B \subset \mathbb{R}^2$ est qualifié d'ensemble de Besicovitch si :

- (i) B contient un segment unitaire dans chaque direction
- (ii) $\mathcal{L}^2(B) = 0$
où $\mathcal{L}^2(B)$ représente la mesure de Lebesgue de B

Remarque 1.1 : Par la méthode par dualité, on construit un ensemble B contenant une droite dans chaque direction.

2 La construction par dualité

Définition 2.1 (Dual, voir figure 1) : Le dual d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est l'ensemble :

$$E^* = \{D_{y=ax+b} \mid (a, b) \in E\}$$

où $D_{y=ax+b}$ est la droite d'équation $y = ax + b$
Dans la suite on s'intéressera à :

$$\mathcal{D}(E) = \bigcup_{\Delta \in E} \Delta$$

On va maintenant chercher quelles propriétés doivent être vérifiées par E pour que $\mathcal{D}(E)$ soit un ensemble de Besicovitch.

Proposition 2.1 : $\mathcal{D}(E)$ doit contenir une droite dans chaque direction du plan
 \Leftrightarrow La projection de E sur (Ox) est \mathbb{R}

Démo : En effet, il faut que le coefficient directeur a des droites parcoure \mathbb{R} tout entier.

Nous allons maintenant étudier les conditions sur E pour que $\mathcal{L}^2(E) = 0$:

Notations :

1. $F_c = \mathcal{D}(E) \cap D_{x=c}$
2. $proj_\theta(E)$: projeté orthogonal de E sur la droite $D_{y=x/\tan\theta}$

3. $p_\theta(x, y)$: projeté de $M(x, y)$ sur la droite $D_{y=x/\tan\theta}$

Proposition 2.2 : $F_c = \{(c, (a, b) \cdot (c, 1)) \mid (a, b) \in E\}$

Démo : $D_{y=ax+b} \cap D_{x=c} = (c, ac + b) = (c, (a, b) \cdot (c, 1))$

De plus, comme $\|\overrightarrow{OP_\theta(x, y)}\| = \frac{OM \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ où $\vec{u} = (\tan\theta, 1)$, en posant $c = \tan\theta$, on voit que $p_\theta(x, y)$ est déterminé par sa distance à l'origine : $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}((x, y) \cdot (c, 1))$. Ceci montre qu'il existe une similitude entre F et $proj_\theta(E)$ (figure 2).

Et donc $\mathcal{L}^1(F) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(proj_\theta(E)) = 0$. D'où la proposition 2.3 :

Proposition 2.3 : $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}(E)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(\{\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mid \mathcal{L}^1(proj_\theta(E)) \neq 0\}) = 0$

Démo : Tout d'abord, remarquons que :

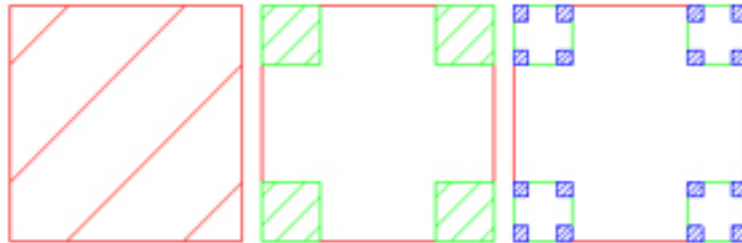
$$\mathcal{L}^2(\mathcal{D}(E)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(\{c \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}^1(\mathcal{D}(E) \cap D_{x=c}) \neq 0\}) = 0$$

Ce résultat se comprend intuitivement avec le schéma 3 : les droites verticales qui ont une intersection de mesure non nulle avec E doivent être rares. La proposition découle alors des résultats précédents.

Conclusion : Il doit exister un angle θ_0 tel que $proj_{\theta_0}(E) = \mathbb{R}$ et la projection de E dans *presque* toutes les autres directions doit être de mesure nulle.

3 Une construction concrète

Définition 3.1 On définit l'ensemble de Cantor 4 coins par récurrence :



En hachuré, les ensembles E_0 , E_1 et E_2 .

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Proposition 3.1 Posons $\theta_0 = \arctan 1/2$. Pour des raisons d'invariance par rotation, on prend $\theta \in [0, \pi/2]$

$proj_{\theta_0}(E)$ est un segment et $\forall \theta \neq \theta_0; \mathcal{L}^1(proj_\theta(E)) = 0$

Démo : Avec les notations de la figure 5, on voit qu'on a le rapport suivant :

$$\delta_\theta = \frac{a+b}{l} = \frac{4 \tan \theta + 1}{2(\tan \theta + 1)} < 1 \quad \text{pour } \theta < \theta_0$$

Ces figures montrent que pour $\theta = \theta_0$, lorsque l'on passe de E_n à E_{n+1} , la projection reste la même, ce qui n'est pas le cas pour $\theta \neq \theta_0$. On a même pour ce cas :

$$\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E_{n+1})) = \delta_\theta \mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E_n))$$

Et donc $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) = 0$ pour $\theta < \theta_0$.

On a un résultat similaire avec $\theta > \theta_0$

Donc $\mathcal{L}^1(\text{proj}_\theta(E)) = 0$ pour $\theta \neq \theta_0$

Conclusion : On peut donc choisir un système d'axes (xOy) tel que la projection de E sur (Ox) soit $[-1, 1]$. Ainsi $\mathcal{D}(E)$ contient une droite de coefficient directeur a pour tout $a \in [-1, 1]$.

Pour obtenir les autres droites, de coefficients directeurs dans les ensembles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, il suffit de faire subir à $\mathcal{D}(E)$ une rotation d'angle $\pi/2$.

A Bibliographie

FALCONER, Kenneth. *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press (1985).

BOURRIGAN, Maxime. *Autour de la longueur de FAVARD*, rapport de stage sous la direction d'Hervé PAJOT (2004).

B Figures

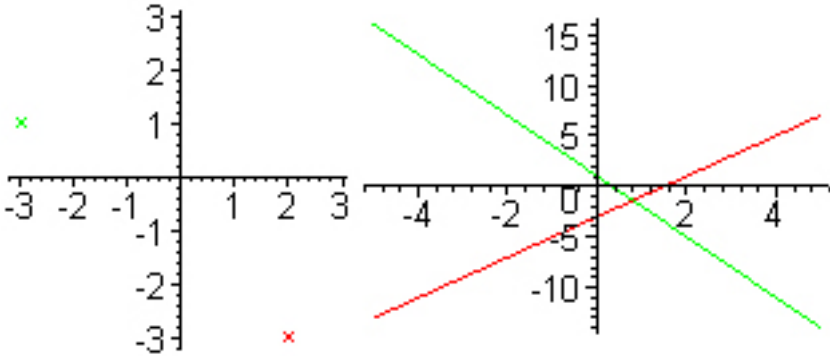


FIG. 1 – Exemple de dual

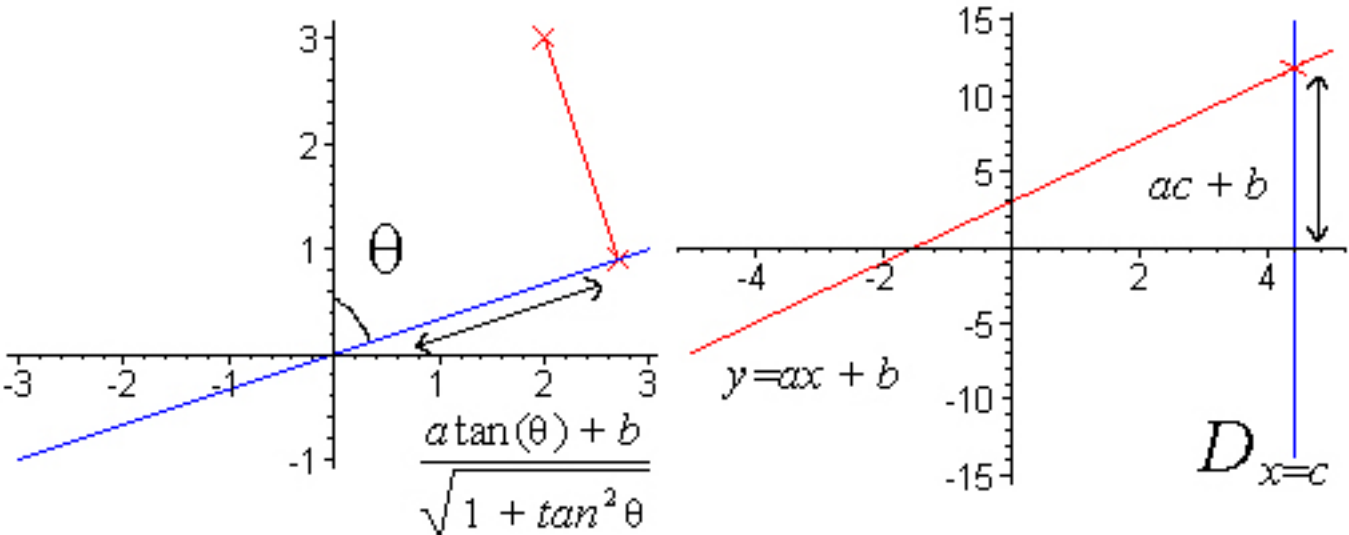


FIG. 2 – Similitude entre F et $proj_{\theta}(E)$

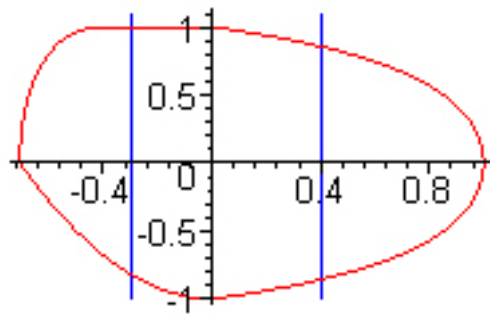


FIG. 3 – Intersection d'un ensemble quelconque et de deux droites verticales

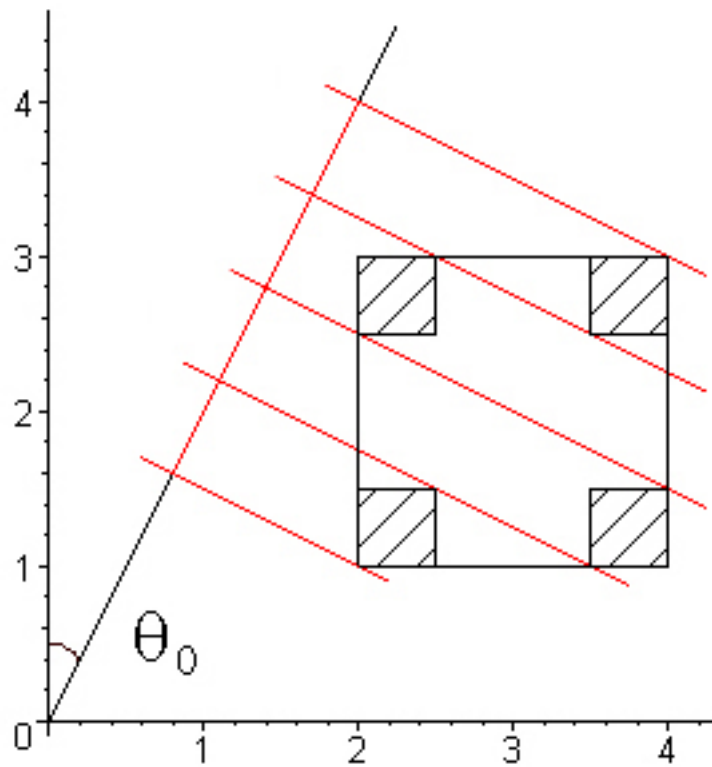


FIG. 4 – Projection de E selon θ_0

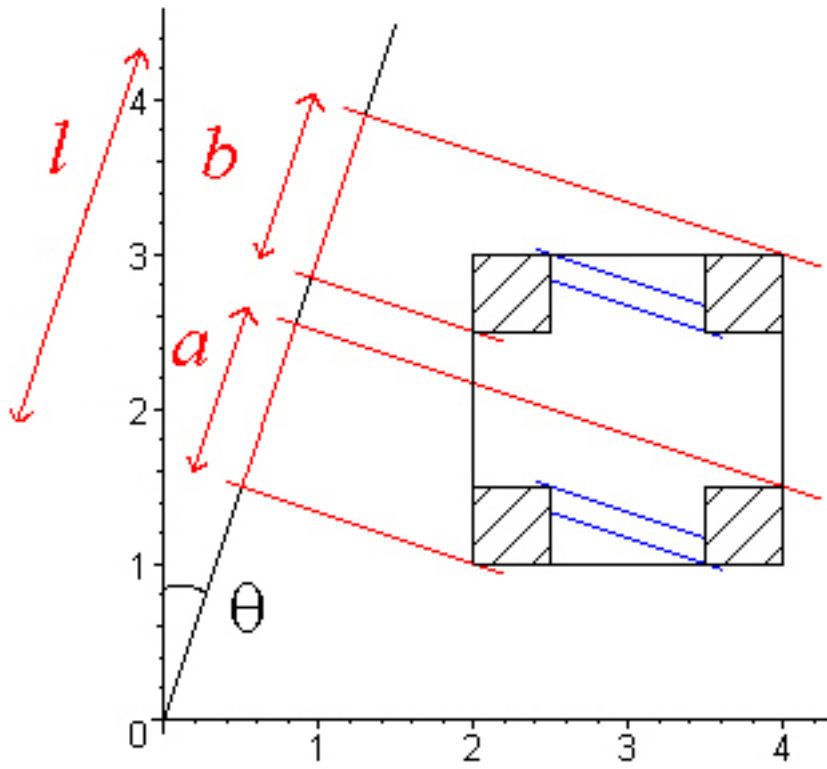


FIG. 5 – Projection de E selon $\theta \neq \theta_0$

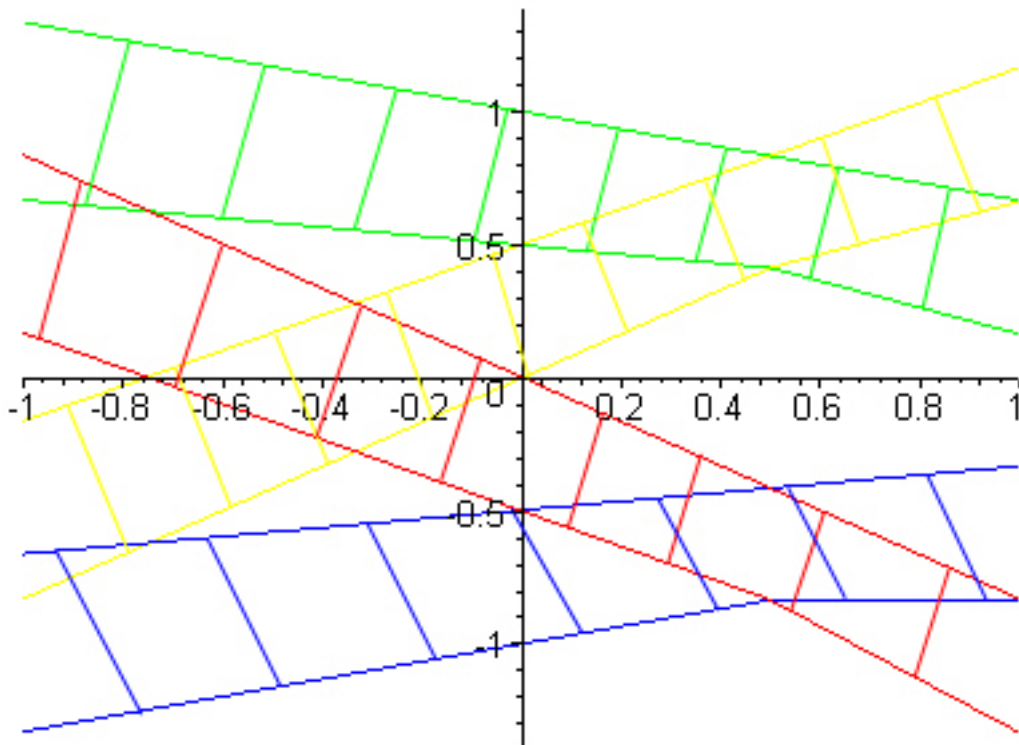


FIG. 6 – Dual de l'ensemble E_2