Suites de la même complexité que celle de Thue-Morse

Ali ABERKANE
Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS, case 907, 163 Avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9, France.

1 Introduction

La condition $p(n) = n+1$ (suites sturmiennes), ou plus généralement $p(n) = n+k$ à partir d'un certain rang, permet de caractériser de façon très précise une famille de suites. Pour des complexités plus grandes, la question devient plus complexe ; il semble par exemple difficile de caractériser les suites de complexité $2n + 1$, sauf dans des cas particuliers [1]. On pourrait être tenté de conclure que la complexité est insuffisante pour caractériser précisément une famille de suites dés qu'elle est plus grande que $n + k$. Dans cet article (un travail commun avec S. BRLEK de l'université de Québec à Montréal, Canada), nous montrons que ce n'est pas le cas : la complexité de la suite de Morse ([2, 5]), comprise entre $2n$ et $4n$, caractérise une famille de suites de façon plus étreinte que la condition $n+1$, puisque les seules suites récurrente à avoir cette complexité sont les suites du système de Morse, et celles qui sont dans l'image de ce système par le morphisme $\Phi : \Phi(0) = 00,\ \Phi(1) = 11$. On peut se poser la question : quelles sont les fonctions de complexité que l'on peut obtenir, et parmi celles-ci, celles qui permettent de caractériser le système associé.

Une méthode élégante pour trouver la complexité d'une suite infinie consiste à utiliser la notion du facteur spécial. De Luca et Varricchio [4] ont utilisé la structure de facteurs spéciaux pour énumérer tous les facteurs de la suite u_M, un résultat démontré indépendemment par Brlek [3]. Pour caractériser toutes les suites de complexité p_M, nous allons utiliser les graphes de Rauzy. On démontrera qu'il n'y a que deux évolutions infinies possibles pour toutes les suites de complexité p_M, ceci veut dire deux orbites différents. Donc les facteurs spéciaux, qui déterminent la forme des graphes de Rauzy, joueront un rôle principal dans cette caractérisation.

Définition 1 *La suite de* **Thue-Morse** u_M *est le point fixe commençant par* 0 *de la substitution définie ci-dessous :*

$$\sigma : \begin{cases} 0 \longmapsto 01 \\ 1 \longmapsto 10 \end{cases}$$

$$u = \sigma^{\infty}(0) = 0110100110010110\cdots$$

La complexité p_M de la suite u_M vérifie (voir [3]) :

$$p_M(n+1) - p_M(n) = s(n) = \begin{cases} 4 \text{ si } 2^{k+1} < n \leq 3 \cdot 2^k \\ 2 \text{ si } 3 \cdot 2^k < n \leq 2^{k+2} \end{cases}$$

pour tout $k \geq 0$ et $s(0) + 1 = s(1) = s(2) = 2$.

C'est-à-dire :

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1224244224444222244444444222\cdots$$

Définition 2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le graphe de* **Rauzy** *d'ordre* n *de* u *(appelé aussi graphe des facteurs de longueur* n*), est le graphe orienté, noté* Γ_n*, tel que :*

- *Ses sommets sont les facteurs de longueur* n *de* u*.*
- *Il existe un arc du mot* w *vers le mot* v *si et seulement s'il existe* a *et* b*, éléments de* $\mathcal{A}$*, vérifiant* $z = wa = bv$ *et* z *facteur de* u*. La lettre* a *est appelée étiquette de l'arc de* w *à* v*, et on note* $w \xrightarrow{a} v$*. Les flèches correspondent aux facteurs de longueur* $n+1$ *et les deux sommets* w *et* v *sont dits successifs, car ils se suivent dans* u*.*

Théorème 1 *Soit* u *une suite récurrente dont la complexité est* p_M*, alors* u *appartient à l'une des deux orbites* $\mathcal{O}(u_M)$ *ou* $\mathcal{O}(\Phi(u_M))$*, où* Φ *est le morphisme défini par :* $\Phi(0) = 00$*,* $\Phi(1) = 11$*.*

La preuve de ce théorème se base essentiellement sur la proposition ci-dessous.

Notation Soit x un entier strictement positif, notons $G_T(x)$ le graphe dessiné dans la figure 1. Où les deux sommets bispéciaux sont reliés entre eux par quatre branches orientées. Deux de ces branches contiennent chacune x arcs et $x-1$ sommets (non spéciaux) intermédiaires, et les deux branches restantes contiennent chacune $2x$ arcs et $2x-1$ sommets (non spéciaux) intermédiaires.

Proposition 1 *Soit* u *une suite récurrente de complexité* p_M*.*

alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*, le graphe de Rauzy d'ordre* 2^{k+1} *de* u *est de type* $G_T(2^k)$*.*

Preuve du théorème 1 D'après la proposition 1, l'évolution infinie du graphe Γ_4 est unique, c'est-à-dire qu'à partir du graphe Γ_4 qui est du type $G_T(2)$, l'évolution contient une infinité de graphes de type $G_T(x)$ (x est une puissance de 2) et le passage entre deux graphes consécutifs $G_T(2^{k+1})$ et $G_T(2^{k+2})$ se fait d'une seule manière, plus précisément, l'évolution finie entre $G_T(2^{k+1})$ et $G_T(2^{k+2})$ est unique.

Donc la seule différence qu'on croise dans l'évolution infinie des graphes de Rauzy des suites de complexité p_M est dans les premiers graphes où on a deux évolutions finies différentes entre Γ_0 et Γ_4 (ces deux évolutions finies peuvent être définies

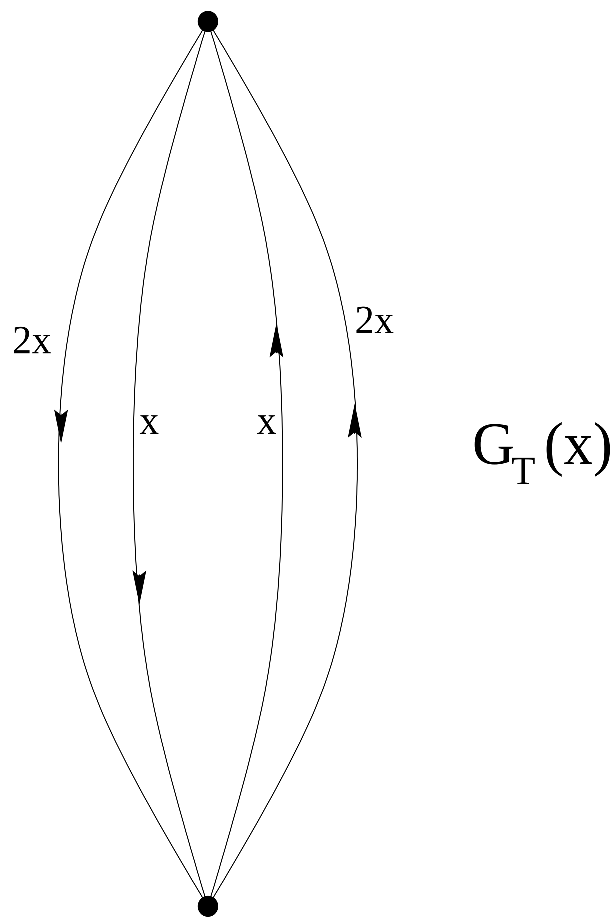

FIG. 1 – Le graphe $G_T(x)$

d'une façon claire en dessinant leurs graphes de Rauzy). On constate donc, qu'il y a deux évolutions infinies différentes de telles suites (suites de complexité p_M), une qui commence par l'évolution finie qui donne le graphe $\Gamma_4 = G_4$ (figure 2) et l'autre par l'évolution finie qui donne $\Gamma_4 = g'_4$ (figure 3). Chaque évolution infinie définit une orbite différente de l'autre. L'orbite la plus connue est celle de la suite de Thue-Morse où $\Gamma_4 = g'_4$, et qu'on note $\mathcal{O}(u_M)$. Il nous reste maintenant de définir la deuxième orbite plus explicitement.

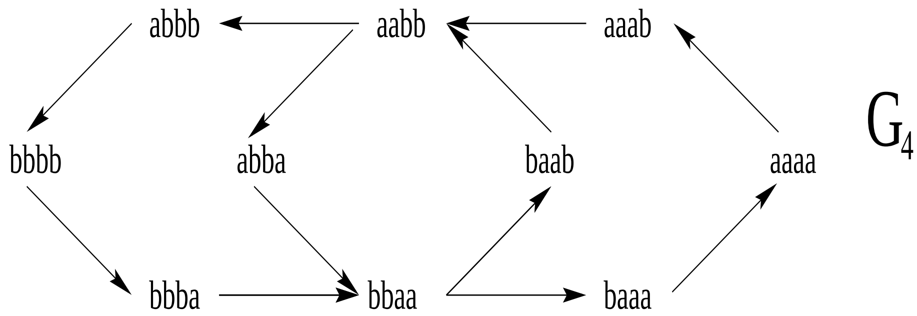

FIG. 2 – Le graphe $\Gamma_4 = G_4$

On peut remarquer que la suite qui engendre la deuxième orbite est la suite obtenue en doublant les lettres de la suite de Thue-Morse, c'est-à-dire que cette orbite est l'orbite $\mathcal{O}(\Phi(u_M))$ où : $\Phi(0) = 00$ et $\Phi(1) = 11$.

Pour démontrer ce résultat, il suffit de coder la suite de Thue-Morse par le morphisme Φ et démontrer que les graphes de Rauzy de cette nouvelle suite ont bien la forme souhaitée.

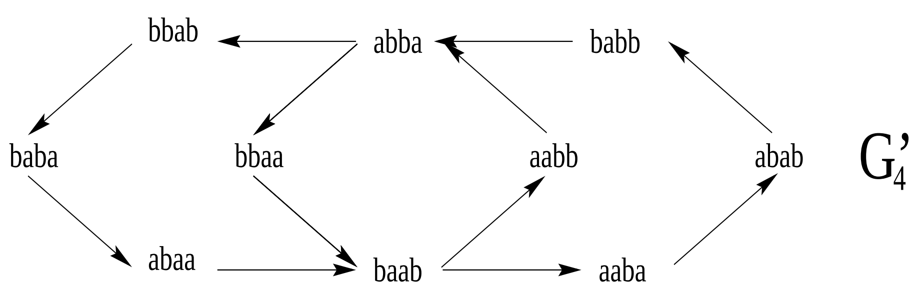

FIG. 3 – Le graphe $\Gamma_4 = G'_4$

$\square$

Références

[1] P. ARNOUX, G. RAUZY, Représentation géométrique des suites de complexité $2n+1$, Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 199-215.

[2] J. BERSTEL, Axel Thue's papers on repetitions in words : a translation, Pub. LACIM **20**, 1995.

[3] S. BRLEK. Enumeration of factors in the Thue-Morse word, Discrete Appl. Math. **24** (1989) 83-96.

[4] A. DE LUCA, S. VARRICCHIO, Some combinatorial properties of the Thue-Morse sequence and a problem in semigroups, Theoret. Comput. Sci. **63** (1989), no. 3, 333–348.

[5] M. MORSE, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1921), no. 1, 84–100.