

# Sujet de stage de L3

## Pgcd rapide et reconstruction de fraction rationnelle

### INFORMATIONS

**Lieu :** Université Montpellier, laboratoire LIRMM

**Équipe d'accueil :** ECO - [www.lirmm.fr/eco](http://www.lirmm.fr/eco)

**Encadrants :** Pascal Giorgi, Romain Lebreton ([giorgi@lirmm.fr](mailto:giorgi@lirmm.fr), [lebreton@lirmm.fr](mailto:lebreton@lirmm.fr))

---

### SUJET

Ce stage propose de faire de l'algèbre effective, un mélange d'informatique et de mathématique qui vise à faire des calculs d'algèbre efficacement sur ordinateur.

Pour calculer le pgcd de deux polynômes, l'approche historique est l'algorithme d'Euclide. Ce procédé répète des divisions euclidiennes pour que les degrés des restes baissent jusqu'à obtenir un reste nul. Nous souhaitons nous intéresser à l'approche opposée qui utilise des divisions euclidiennes par les degrés faibles. Ainsi les valuations des restes augmentent plutôt que leur degrés baissent. Les deux approches disposent d'algorithmes rapides de type diviser pour régner [GG13, Chapitre 11], [GJV03]. Le premier objectif de ce stage est de comprendre le lien entre les deux approches et de voir si la deuxième approche n'aboutirait pas à un algorithme plus rapide.

L'une des applications du pgcd est la reconstruction rationnelle [BCG<sup>+</sup>17, Chapitre 7.1]. Pour des raisons d'efficacité, il est commun d'éviter de faire des calculs directement sur des fractions rationnelles, et de les remplacer par leur développements limités, c'est-à-dire des polynômes modulo  $x^d$ . Il faut alors être capable de retrouver la fraction rationnelle à partir de son développement limité : c'est le problème de la reconstruction rationnelle.

Le deuxième objectif de ce stage est d'utiliser le pgcd par les degrés faibles pour reconstruire la fraction rationnelle au fur et à mesure que l'on calcule son développement limité. Ceci est d'autant plus important que l'on ne connaît pas a priori la précision  $d$  nécessaire. L'algorithme que l'on propose de créer permettra de détecter immédiatement et sans calculs superflus cette précision  $d$  nécessaire.

Tous les algorithmes de ce stage devront être codés sur SageMath. En effet, le stage est centré sur des améliorations pratiques. Cette implémentation nous donnera une première idée des performances et sera aussi utile pour la bonne compréhension du sujet.

### Références

- [BCG<sup>+</sup>17] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Marc Giusti, Romain Lebreton, Grégoire Lecerf, Bruno Salvy, and Éric Schost. Algorithmes efficaces en calcul formel, August 2017. 686 pages. Édition 1.0, <https://hal.archives-ouvertes.fr/AECF/>.
- [GG13] J. von zur Gathen and J. Gerhard. *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3 edition, 2013.
- [GJV03] P. Giorgi, C.-P. Jeannerod, and G. Villard. On the complexity of polynomial matrix computations. In *Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 135–142 (electronic), New York, 2003. ACM.