Polytech'Montpellier
Département MicroElectronique & Automatique

Systèmes Electroniques Analogiques III

Chapitre II : Filtrage Analogique 2

Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2

Pascal Nouet / 2009-2010

nouet@lirmm.fr

Polytech'Montpellier Réseau Polytech

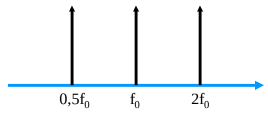
Filtrage Analogique 2

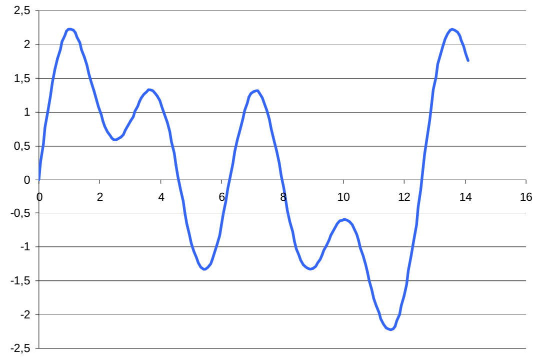
2

Polytech'Montpellier Réseau Polytech

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Filtres elliptiques

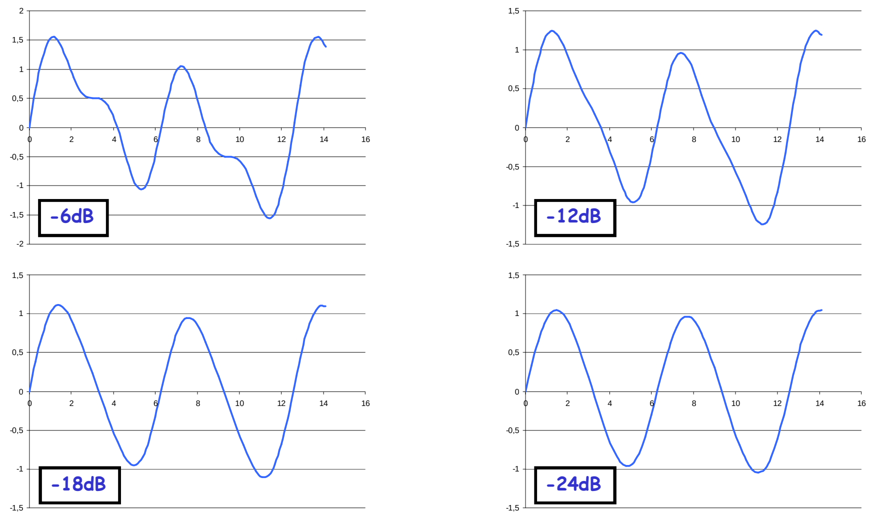
Rappels & compléments





Récupérer la raie centrale => Atténuation des raies latérales

Rappels & compléments



Filtrage => Atténuation des raies latérales + déphasage (retard ou avance)

5

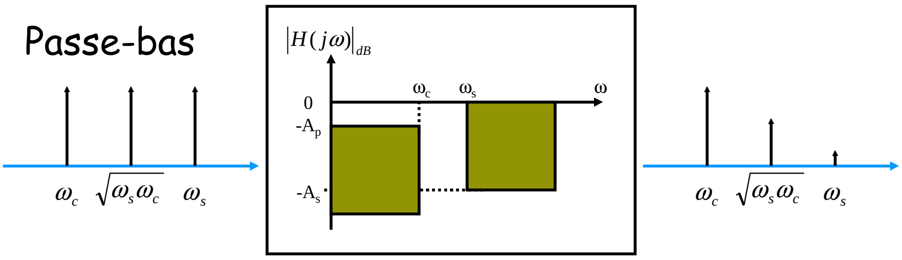
Rappels & compléments

- Un filtre est défini par sa fonction de transfert F(p) qui permet de connaître
  - La réponse temporelle
    X(t) -> Y(t) avec $Y(t)=L^{-1}[F(p).X(p)]$
  - La réponse harmonique ($p=j\omega$)
    - Module et argument pour représenter la réponse harmonique d'un filtre
    - Gabarit pour représenter les spécifications d'un filtre
- Un filtre est dit linéaire s'il ne fait apparaître aucune composante spectrale dans le signal de sortie

6

Rappels & compléments : gabarits

- Passe-bas

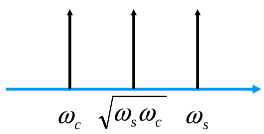


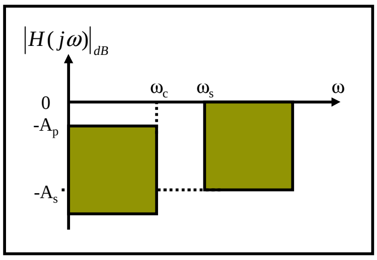
  - Caractéristique dans la bande passante (ω_c)
    - Atténuation ou ondulation max : A_p
  - Caractéristique dans la bande atténuée (ω_s)
    - Atténuation min : A_s
  - Bande de transition <-> ordre du filtre

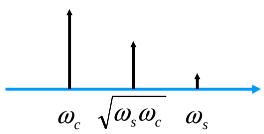
Rappels & compléments : gabarits

7

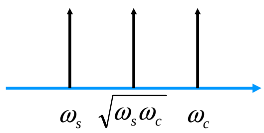
- Passe-bas

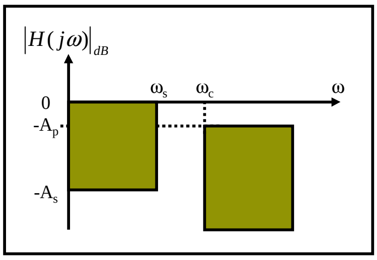


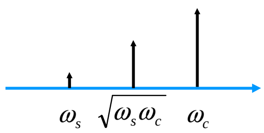




- Passe-haut



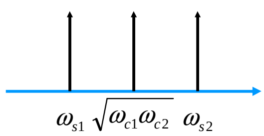


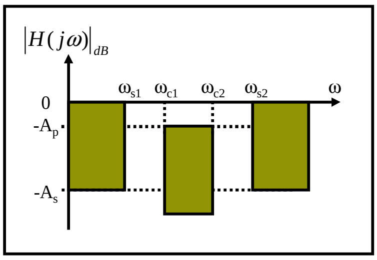


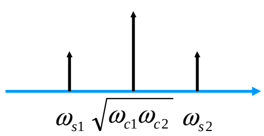
Rappels & compléments : gabarits

8

- Passe-bande





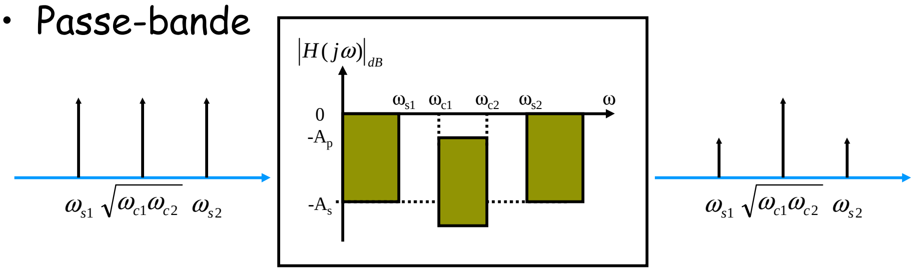


- Deux bandes atténuées
- Symétrie géométrique
  => Bande de transition identiques (échelle log)
  synthèse à l'aide de passe-bande élémentaires
- Pas de symétrie => passe-haut plus passe-bas

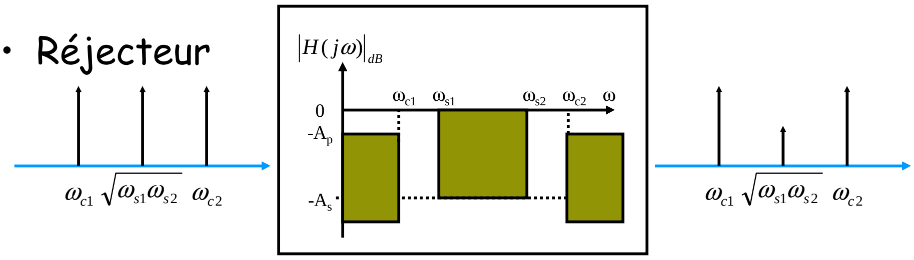
9

Rappels & compléments : gabarits

- Passe-bande



- Réjecteur



10

Chapitre II : filtrage analogique 2

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Filtres elliptiques

11

Filtres à amortissement critique

- Réalisation d'un filtre passe-bas d'ordre n par association de n cellules du premier ordre identiques

$$F(p) = \frac{1}{(1+\alpha p)^n} \Rightarrow |F(j\omega)| = \frac{1}{(1+\alpha^2\omega^2)^{n/2}}$$

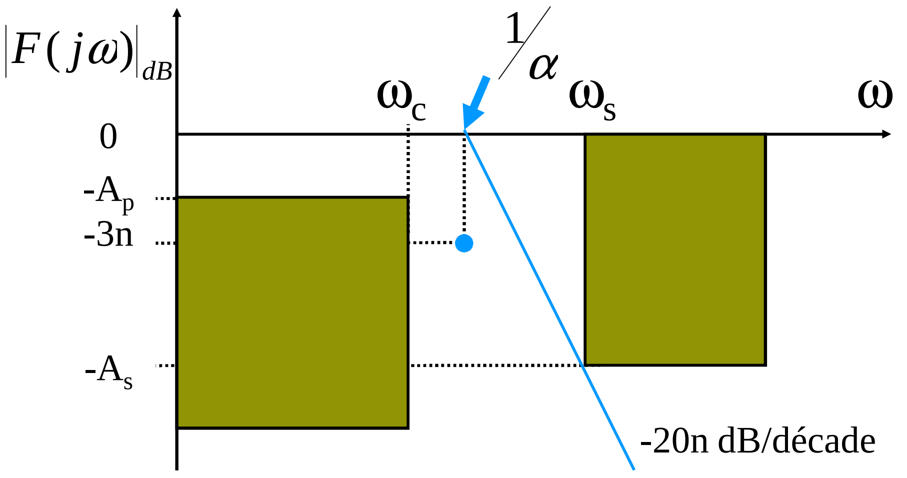
$$|F(j\omega)|_{dB} = -20\log\left((1+\alpha^2\omega^2)^{n/2}\right) = -n\times 10\cdot\log(1+\alpha^2\omega^2)$$

Il faut calculer ***n*** et α → nombre de cellules et constante de temps

12

Filtres à amortissement critique

$$|F(j\omega)|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega^2)$$



13

Filtres à amortissement critique

Polytech'Montpellier

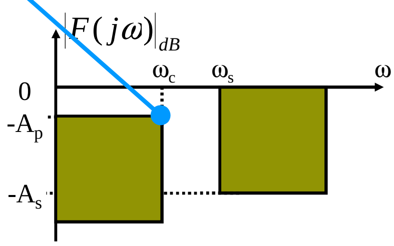
- Equation n°1 : α est déduit de ω_c et de A_p

$$\left|F(j\omega_c)\right|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega_c^2) = -A_p$$

$$\Rightarrow 1+\alpha^2{\omega_c}^2 = 10^{A_p/10n}$$

$$\Rightarrow \alpha^2{\omega_c}^2 = 10^{A_p/10n} - 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{A_p/10n} - 1}}$$

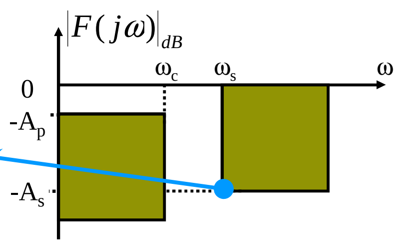


14

Filtres à amortissement critique

Polytech'Montpellier

- Equation n°2 : on utilise l'expression de α pour calculer le gain en fin de bande de transition



$$\left|F(j\omega_s)\right|_{dB} = -10n\log(1+\alpha^2\omega_s^2) = -A_s$$

$$\boxed{\Rightarrow -10n\log\left(1+\left(10^{A_p/10n}-1\right)\frac{\omega_s^2}{\omega_c^2}\right) = -A_s}$$

Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-bas

15

- $1^{ère}$ étape : on calcule l'atténuation obtenue pour différentes valeurs de ***n*** et on retient une valeur « suffisante » pour obtenir une atténuation au moins égale à ***A_s*** en limite de bande de transition.
- $2^{ème}$ étape : on calcule alors la constante de temps des ***n*** sections de premier ordre $$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{A_p/10n}-1}$$
- et la fonction de transfert souhaitée $$F(p) = \frac{1}{(1+\alpha p)^n}$$
- Le filtre nécessaire est composé de ***n*** cellules du premier ordre de constante de temps égale à α.

Filtres à amortissement critique : Exemple

16

- Pulsation de coupure : $\omega_c = 10^3$ rd/s (A_p=3dB)
- Bande atténuée : ω_s= 5.10^3 rd/s (A_s=30dB)
- On calcule la valeur de l'atténuation en limite de bande de transition pour différentes valeur de n

$$10n\log\left(1+\left(10^{A_p/10n}-1\right)\frac{\omega_s^2}{\omega_c^2}\right) \text{ avec } A_p = 3 \text{ et } \frac{\omega_s}{\omega_c} = 5$$

$\frac{\omega_s}{\omega_c}$ →

n ↓

	2	4	5	10	20	32	64	100
1	6,99	12,30	14,15	20,04	26,03	30,11	36,12	40,00
2	8,49	17,65	21,10	32,55	44,44	52,57	64,60	72,35
3	9,29	21,38	26,25	42,94	60,63	72,80	90,83	102,45
4	9,79	24,20	30,33	51,97	75,39	91,58	115,59	131,09
5	10,14	26,44	33,69	60,03	89,08	109,27	139,27	158,63
6	10,30	28,27	36,52	67,33	101,93	126,11	162,07	185,30

Filtres à amortissement critique : Exemple

17

- On peut alors calculer la constante de temps des 4 sections du premier ordre

$$\alpha = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{A_p/10n}-1} = \frac{1}{\omega_c}\sqrt{10^{3/40}-1} = \frac{0,434}{\omega_c} \Rightarrow \alpha = 434\mu s$$

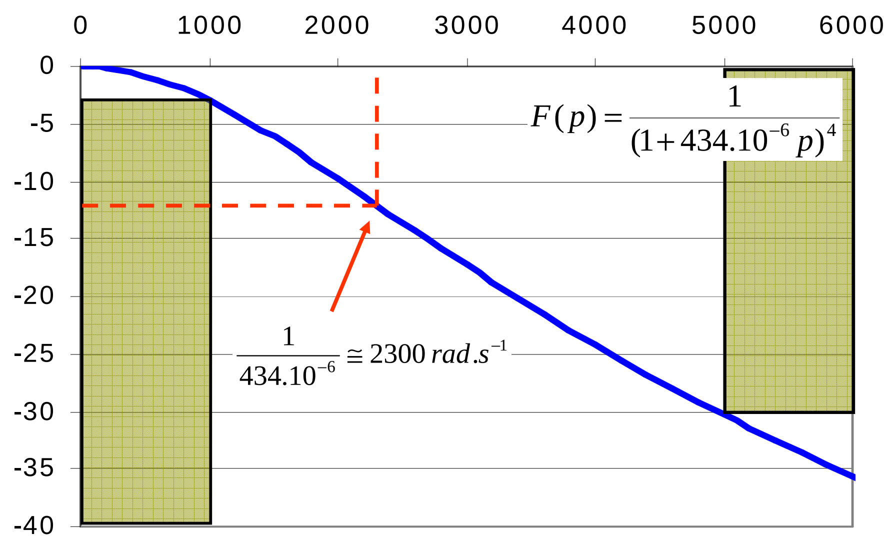
- Et en déduire la fonction de transfert souhaitée pour le passe-bas

$$F(p) = \frac{1}{(1+434.10^{-6}\,p)^4}$$

- Il faut quatre cellules du premier ordre de constante de temps égale à 434 µs

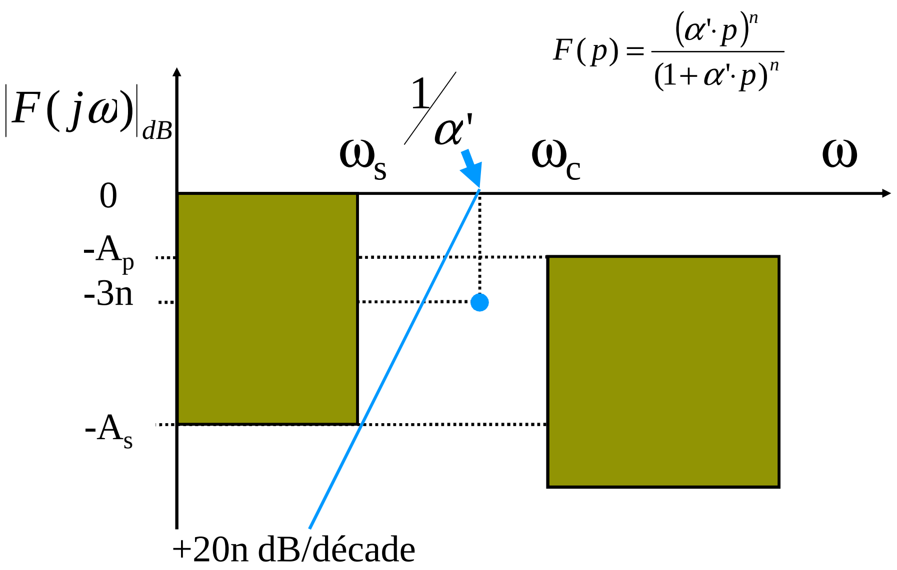
Filtres à amortissement critique : Exemple

18



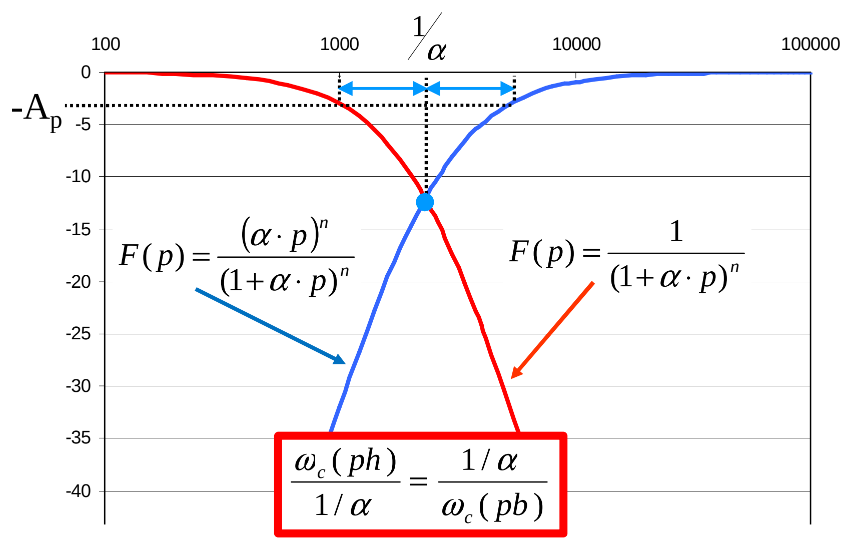
Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut

19

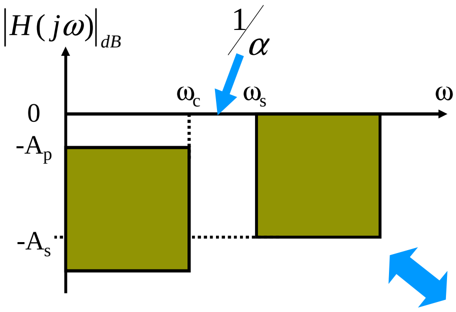


Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut

20



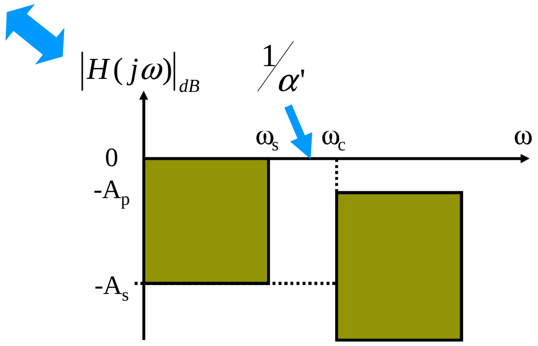
Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut



Sélectivité identique

A_p et A_s sont conservés

$$\frac{\omega_c(ph)}{\omega_s(ph)} = \frac{\omega_s(pb)}{\omega_c(pb)}$$



$$\alpha' \cdot \omega_c(ph) = \frac{1}{\alpha \cdot \omega_c(pb)}$$

Filtres à amortissement critique : calcul d'un passe-haut

- 1ère étape : transposition du filtre passe-haut

  A_p et A_s identiques $\qquad \frac{\omega_c(ph)}{\omega_s(ph)} = \frac{\omega_s(pb)}{\omega_c(pb)}$

- Exemple :

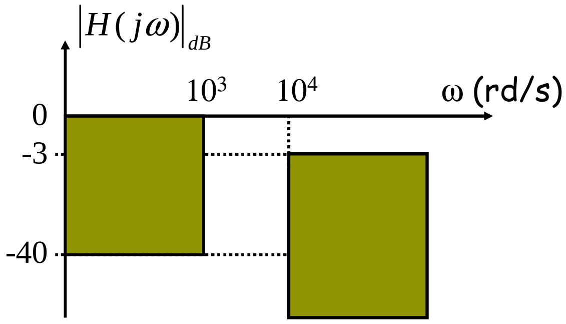
$$\omega_s(pb) = \omega_c(ph) \quad ; \quad \omega_c(pb) = \omega_s(ph)$$

- 2ème étape : calcul du filtre transposé (passe-bas)
  - Ordre du filtre nécessaire : ***n***
  - Calcul de ***$\alpha.\omega_c(pb)$***
- 3ème étape : calcul de la constante de temps du filtre passe-haut

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha \cdot \omega_c(pb) \cdot \omega_c(ph)}$$

Exercice

- Calculer la fonction de transfert du filtre à amortissement critique correspondant au gabarit ci-contre.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.



Chapitre II : filtrage analogique 2

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Filtres elliptiques

25

Généralités

- On réalise un filtre de Butterworth par la mise en cascade de sections du 2nd ordre avec éventuellement une section du 1er ordre pour les ordres impairs
- Un filtre de Butterworth d'ordre ***n*** est de la forme : $H_{pb}(p)=\dfrac{1}{B_n(p)}$ ou $H_{ph}(p)=\dfrac{\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^n}{B_n(p)}$
- Ou $B_n(p)$ est un polynôme de Butterworth dont les propriétés principales sont : $|B_n(j\omega)|=\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$
  - $|B_n(j\omega)|=\sqrt{2}\ \forall$ n pour $\omega=\omega_0$
  - $|B_n(j\omega)|$ est une fonction strictement croissante

26

Les polynômes de Butterworth

- Un premier ordre est un filtre de Butterworth
- Butterworth du 2nd ordre

$$|F(j\omega)|=\left|1+2m\frac{j\omega}{\omega_0}+\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2\right|=\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2+\frac{4m^2\omega^2}{\omega_0{}^2}}$$

$$|F(j\omega)|=\sqrt{1+\frac{\omega^4}{\omega_0{}^4}+\frac{2\omega^2}{\omega_0{}^2}\left(2m^2-1\right)}$$

  - avec m=0.707 : $|F(j\omega)|=\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$

27

Les polynômes de Butterworth

Polytech'Montpellier

- Butterworth du 3ème ordre : une section du 2nd ordre avec m=0,5 et une section du premier ordre

$$|B(j\omega)| = \left|\left(1+\frac{j\omega}{\omega_0}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}+\frac{j\omega}{\omega_0}\right)\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}$$

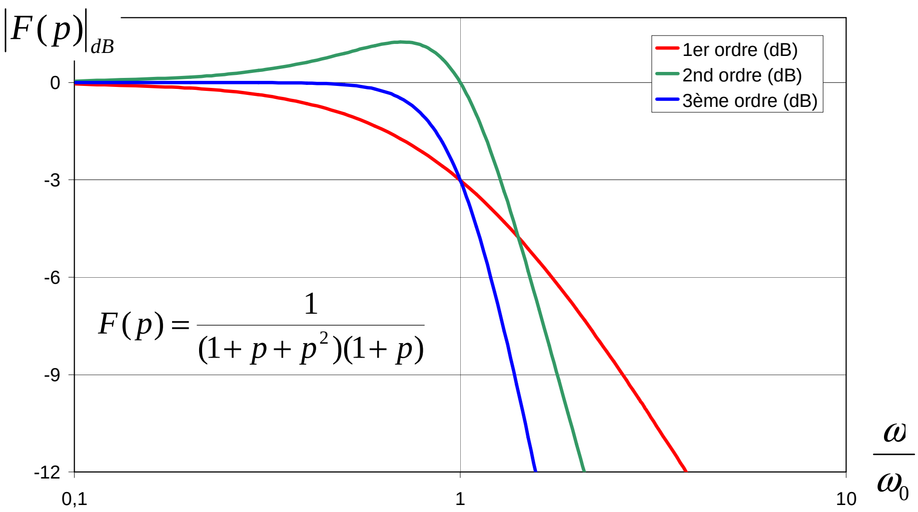
- Les polynômes $B_n(p)$ principaux avec $p'=\frac{j\omega}{\omega_0}$
  - 2ème ordre : $(1+1.414p'+p'^2)$
  - 3ème ordre : $(1+p'+p'^2)\ (1+p')$
  - 4ème ordre : $(1+1.848p'+p'^2)\ (1+0.765p'+p'^2)$
  - 5ème ordre : $(1+1.618p'+p'^2)\ (1+0.618p'+p'^2)\ (1+p')$
- Passe-bas : $F(p)=\frac{1}{B_n(p)}$

28

Synthèse d'un passe-bas

Polytech'Montpellier

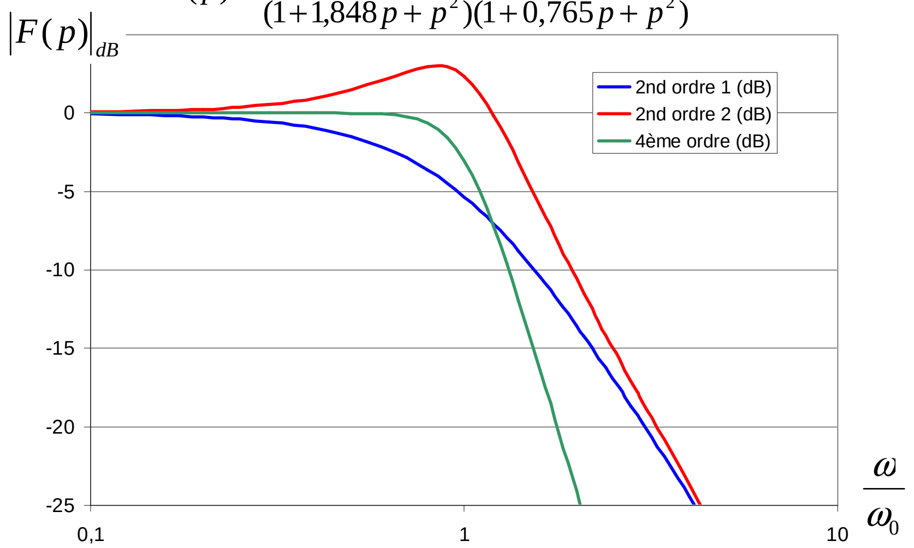
- 3ème ordre avec $p=j\omega/\omega_c$



29

Synthèse d'un passe-bas

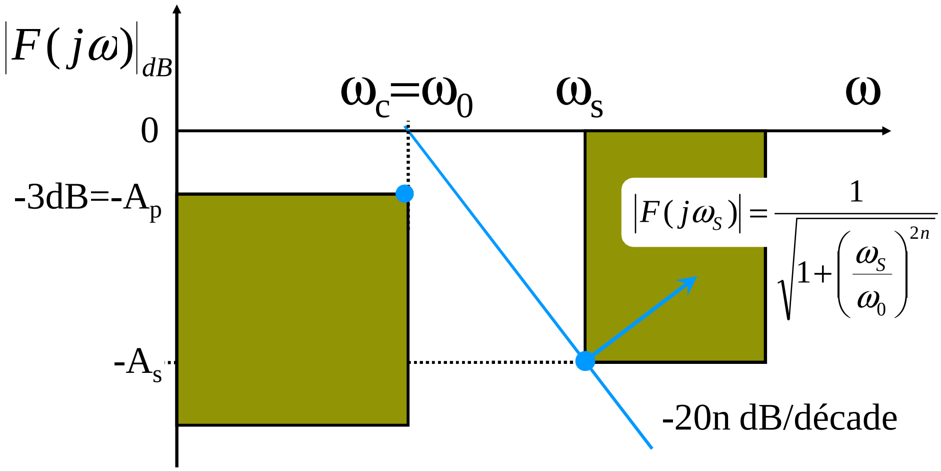
$$F(p) = \frac{1}{(1+1{,}848\,p + p^2)(1+0{,}765\,p + p^2)}$$



30

Synthèse d'un passe-bas

- Cas d'un filtre ayant une atténuation maximale de 3 dB dans la bande passante



31

Synthèse d'un passe-bas

Polytech'Montpellier

- On calcule l'ordre du filtre à partir de l'atténuation souhaitée en limite de bande de transition (début de bande d'arrêt)

$$-20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n}} = -A_s \Rightarrow \log\left(1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n}\right) = \frac{A_s}{10}$$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2n} = 10^{A_s/10} \Rightarrow 2n\cdot\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right) = \log\left(10^{A_s/10}-1\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log\left(10^{A_s/10}-1\right)}{2.\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)}$$

On choisit ***n*** comme l'entier immédiatement supérieur…

32

Exemple

Polytech'Montpellier

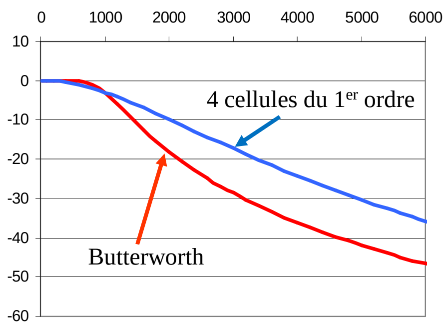
- Pulsation de coupure : $\omega_0 = 10^3$ rd/s ($A_p = -3dB$)
- Bande atténuée : $\omega_s = 5.10^3$ rd/s ($A_s = -30dB$)
- Il suffit de déduire l'ordre nécessaire de l'atténuation souhaitée $\mathbf{A_s}$ et du rapport entre ω_s et ω_0

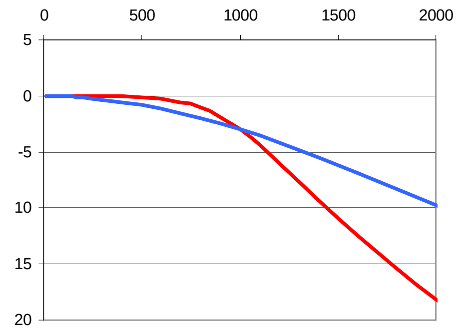
$$n = \frac{\log\left(10^{A_s/10}-1\right)}{2.\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)} = \frac{\log(10^3-1)}{2.\log(5)} = \frac{\log(999)}{2.\log(5)} = 2{,}15$$

- On choisit l'ordre entier immédiatement supérieur → n=3

Exemple

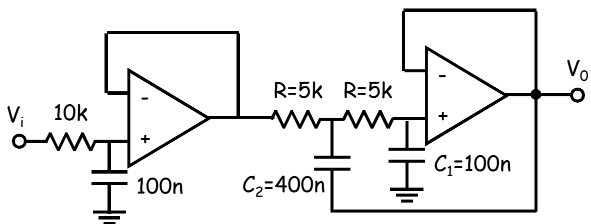
- Par rapport à l'utilisation de sections du premier ordre :
  - 3ème ordre suffit - Gain dans la bande plus stable - Bande de transition plus faible





Exemple

- avec gain unitaire



$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = 1$$

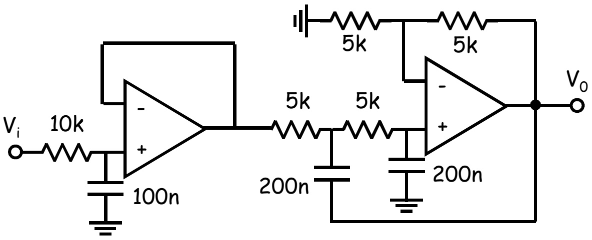
$$\frac{1}{\tau_1} = \omega_c = 1000 rd/s$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} = 1000 rd/s$$

35

Exemple

- avec gain égal à 2



$$\frac{1}{\tau_1} = \omega_c = 1000 rd/s$$

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{3 - A_v} = 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 1000\text{rd/s}$$

36

Filtres de Butterworth généralisé

- On souhaite fixer librement l'atténuation dans la bande passante → polynôme généralisé

$$|B_n(j\omega)| = \sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 1ère étape : calcul de ε à $\omega=\omega_c$ donnant une atténuation $\mathbf{A_p}$ en limite de bande passante

$$20\log\sqrt{1+\varepsilon^2} = A_p \Rightarrow \log\left(1+\varepsilon^2\right) = \frac{A_p}{10} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$$

37

Filtres de Butterworth généralisé

- 2ème étape : on calcule l'ordre du filtre à partir de l'atténuation souhaitée en limite de bande de transition

$$20\log\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}} = A_s \Rightarrow \log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right) = \frac{A_s}{10}$$

$$\Rightarrow 1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{A_s/10} \Rightarrow 2n\cdot\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right) = \log\left(\frac{10^{A_s/10}-1}{\varepsilon^2}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{10^{A_s/10}-1}{\varepsilon^2}\right)}{2.\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

- 3ème étape : calcul de ω_0

$$|B_n(j\omega)| = \sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\omega_c^{2n}} = \frac{1}{\omega_0^{2n}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_c}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

38

Exemple de synthèse d'un passe-bas dans le cas général ($A_p \neq 3$dB)

- Exemple :
  - Pulsation de coupure : $\omega_c = 10^3$ rd/s (A_p = -1dB)
  - Bande atténuée : $\omega_s = 5.10^3$ rd/s (A_s = -30dB)
- 1ère étape : calcul de ε à $\omega=\omega_c$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10}-1} = 0{,}509$$

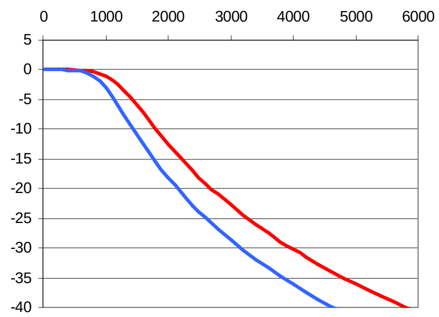
- 2ème et 3ème étape : calcul de **n** puis calcul de ω_0

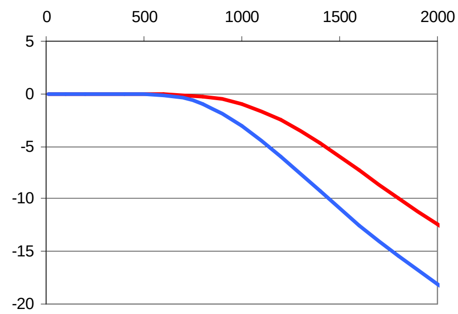
$$n = \frac{\log\left(\frac{10^3-1}{\varepsilon^2}\right)}{2.\log 5} = 2{,}565 \qquad \omega_0 = \frac{\omega_c}{\sqrt[n]{\varepsilon}} = 1252 rd/s$$

Exemple de synthèse d'un passe-bas dans le cas général ($A_p \neq 3dB$)

39

- On utilise alors le polynôme classique pour un ordre 3





Autres types de réponses

40

- Réponse de type passe-haut
  - On calcule le passe-bas **de même sélectivité** et de même pulsation de coupure
  - On détermine ε et n pour le passe-bas
  - On calcule alors ω_0
  - On assemble alors les cellules passe-haut correspondant au polynôme de degré n

A_p *et* A_s sont conservés

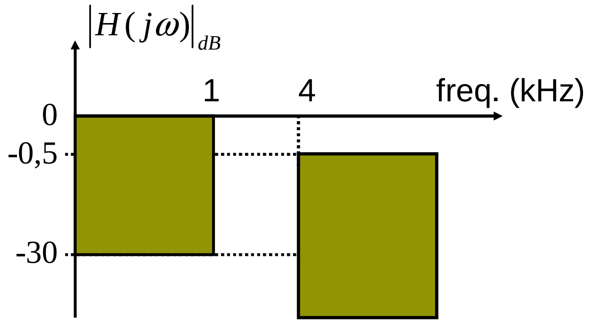
$$\frac{\omega_c}{\omega_s(ph)} = \frac{\omega_s(pb)}{\omega_c}$$

$$\omega_0 = \omega_c \sqrt[n]{\varepsilon}$$

- Réponse de type passe-bande et réjecteur
  - On calcule un filtre passe-bas et un filtre passe-haut que l'on met en cascade ou en parallèle

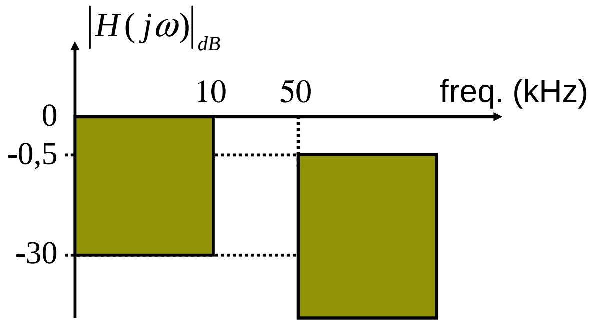
Exercice : Passe-haut #1

- Calculer la fonction de transfert du filtre de Butterworth correspondant au gabarit ci-dessous.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.



Exercice : Passe-bas #1

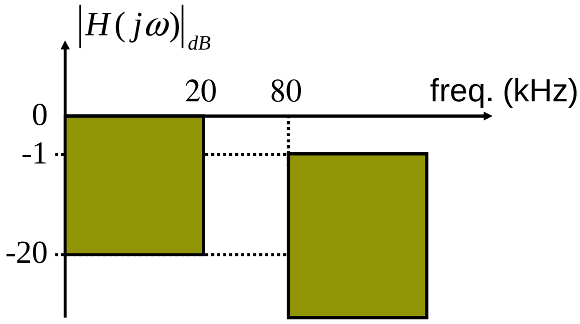
- Calculer la fonction de transfert du filtre de Butterworth correspondant au gabarit ci-dessous.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.



43

Exercice : Passe-bas #2

- Calculer la fonction de transfert du filtre de Butterworth correspondant au gabarit ci-dessous.
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.



44

Exercice : Passe-bande #1

- Calculer la fonction de transfert du filtre de Butterworth passe-bande ayant les caractéristiques suivantes :
  - Bande passante à -3dB : [500Hz ; 2350Hz]
  - Gain dans la BP libre
  - Bande d'arrêt basse fréquence
    - Atténuation de 50dB pour f<150Hz
  - Bande d'arrêt haute fréquence
    - Atténuation de 50dB pour f>10kHz
- Proposer une implantation matérielle pour ce filtre.

45

Chapitre II : filtrage analogique 2

- Rappels & compléments
  - Généralités
  - Filtres actifs du 1er ordre
  - Filtres actifs du 2nd ordre
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Filtres elliptiques

46

Filtres de Chebyshev

- Il existe deux types de filtres de Chebyshev et donc deux types de fonction de transfert pour des filtres passe-bas :
  - Chebyshev de type 1 qui présente des oscillations dans la bande passante $|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}}$
    → ε permets de régler le taux d'ondulation
  - Chebyshev de type 2 qui présente des oscillations dans la bande d'arrêt $|H(j\omega)| = H_0 \frac{\varepsilon \cdot C_n(\omega_c/\omega)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_c/\omega)}}$
  - $C_n(x)$ est un polynôme spécifique d'ordre n

47

Filtres de Chebyshev

- Les polynômes de Chebyshev

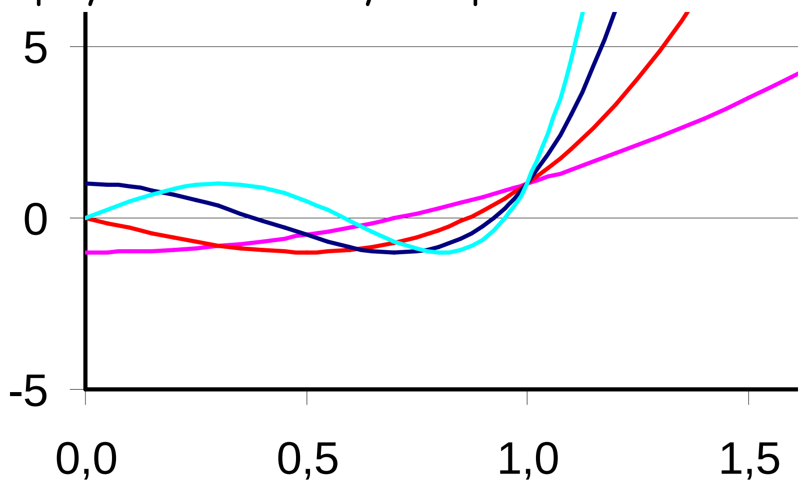
$$C_1(x) = x \qquad C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$C_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$C_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad \ldots$$

- Propriétés de ces polynômes
  - $C_n(1) = 1$ quel que soit n
  - $C_n(0) = 0$ pour les ordres impairs
  - $C_n(0) = \pm 1$ pour les ordres pairs
  - Oscillations entre ±1 du polynôme entre x=0 et x=1
  - augmentation monotone du polynôme pour x>1

48

Filtres de Chebyshev

- Les polynômes de Chebyshev pour n = 2 à 5



Filtres de Chebyshev passe-bas de type 1

49

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}}$$

- Variations dans la bande passante
  - $\omega/\omega_c \leq 1 \rightarrow C_n^2(x)$ est toujours inférieur à 1

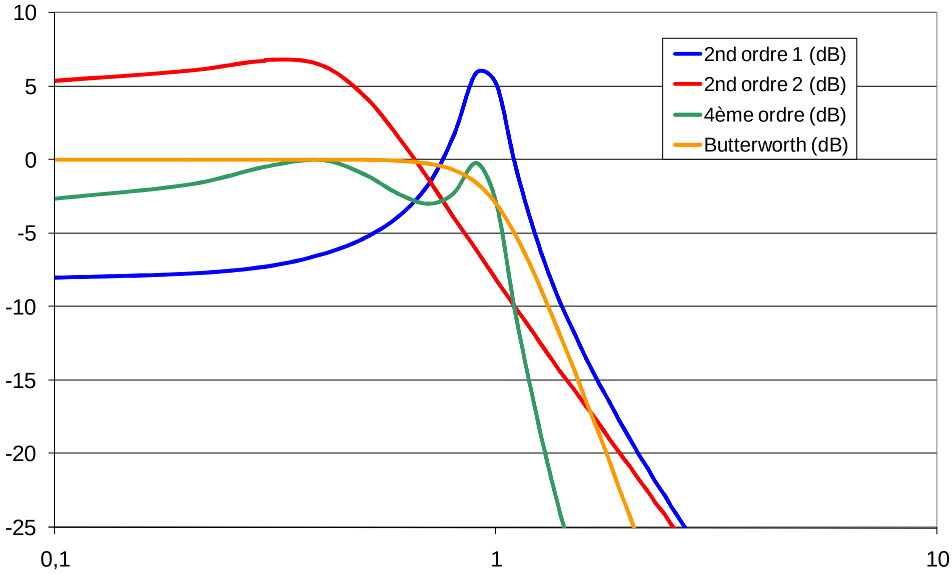
$$H_0 > |H(j\omega)| > \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

- Variations en dehors de la bande passante
  - $\omega/\omega_c > 1 \rightarrow C_n(x)$ est positif et croissant

$$|H(j\omega)| \rightarrow \frac{H_0}{\varepsilon \cdot C_n(\omega/\omega_c)}$$

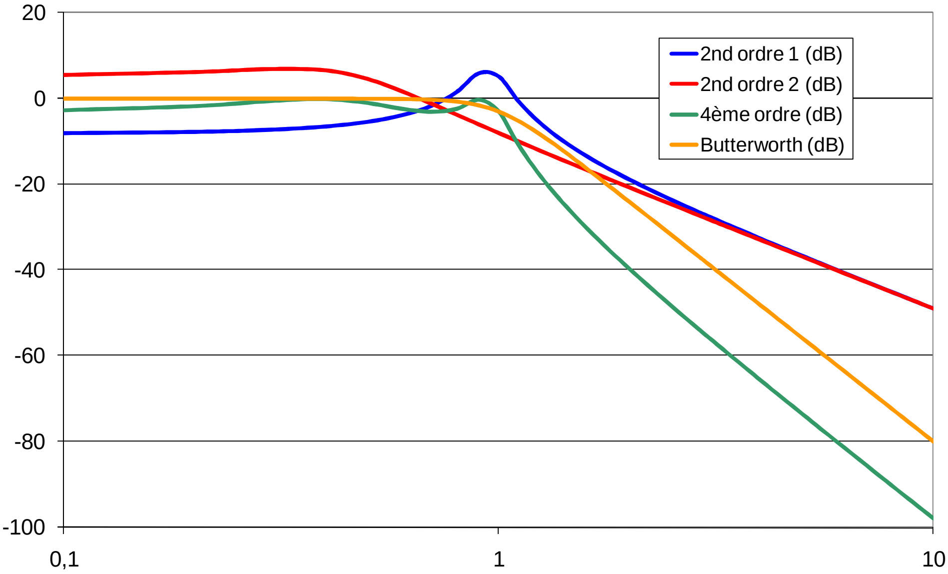
Chebyshev type I : 4ème ordre (-3dB)

50



Chebyshev type I : 4ème ordre (-3dB)

51



Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

52

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}}$$

- Etape 1 : le taux d'ondulation A_p (en dB) dans la bande passante permet de calculer ε

$$C_n^2(0 < x \le 1) \le 1 \Rightarrow |H(0 < x \le 1)| \ge \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$10\log(1+\varepsilon^2) = 0{,}5dB \Rightarrow \varepsilon = 0{,}3493$$

$$10\log(1+\varepsilon^2) = 1dB \Rightarrow \varepsilon = 0{,}5089$$

$$10\log(1+\varepsilon^2) = 3dB \Rightarrow \varepsilon = 0{,}9976$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

53

- Etape 2 : détermination de l'ordre du filtre à partir de la largeur de la bande de transition et de l'atténuation requise en limite de bande d'arrêt.

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{\omega_c} \qquad \left|H(j\omega_s)\right| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_r)}}$$

- Solution 1

$$\Rightarrow 10\log\left(1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega_r)\right) > A_s$$

$$\Rightarrow \text{On cherche } n \text{ tel que } C_n(\omega_r) > \sqrt{\frac{10^{A_s/10}-1}{\varepsilon^2}} = g$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

54

- Solution 2, on calcule

$$\left.\begin{aligned} \omega_r &= \frac{\omega_s}{\omega_c} \\ g &= \sqrt{\frac{10^{As/10}-1}{\varepsilon^2}} \end{aligned}\right\} \quad n = \frac{\log\left(g+\sqrt{g^2-1}\right)}{\log\left(\omega_r+\sqrt{\omega_r^2-1}\right)}$$

- On choisit alors la valeur de n entière et immédiatement supérieure

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

55

- Exemple :
  - Pulsation de coupure : ω_c = 10^3 rd/s (A_{max}=3dB)
  - Bande atténuée : ω_s = 5 10^3 rd/s (A_{min}=30dB)
- 3dB → ε=1 :

$$g = \sqrt{\frac{10^{A_{min}/10} - 1}{\varepsilon^2}} \approx 31{,}6$$

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{\omega_c} = 5$$

$$n = \frac{\log\left(g + \sqrt{g^2 - 1}\right)}{\log\left(\omega_r + \sqrt{\omega_r^2 - 1}\right)} = 1{,}808$$

$$|H(j\omega_s)| = \frac{2}{\sqrt{1 + (2\times 25 - 1)^2}} = \frac{2}{49} \to 20\log(49) = 33{,}8dB$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

56

- On choisit le polynôme correspondant à ***n*** et ε et on effectue le remplacement suivant :

$$p \to \frac{j\omega}{\omega_c} \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2 + 0{,}645\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right) + 0{,}708}$$

- On vérifie :

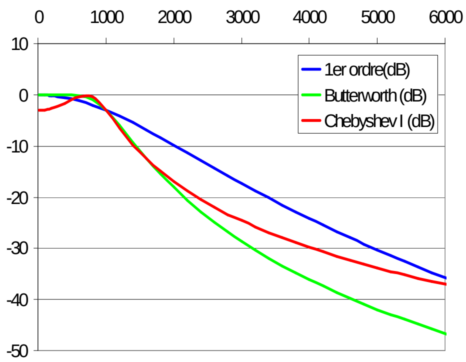
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(0{,}645\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(0{,}708 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(0{,}645^2 - 2\times 0{,}708\right)\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + 0{,}708^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2}}$$

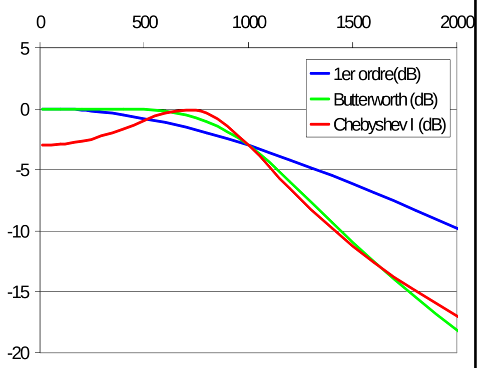
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(-1)\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + 0{,}708^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{-4\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + 2 + 4\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1\right)^2}}$$

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

57

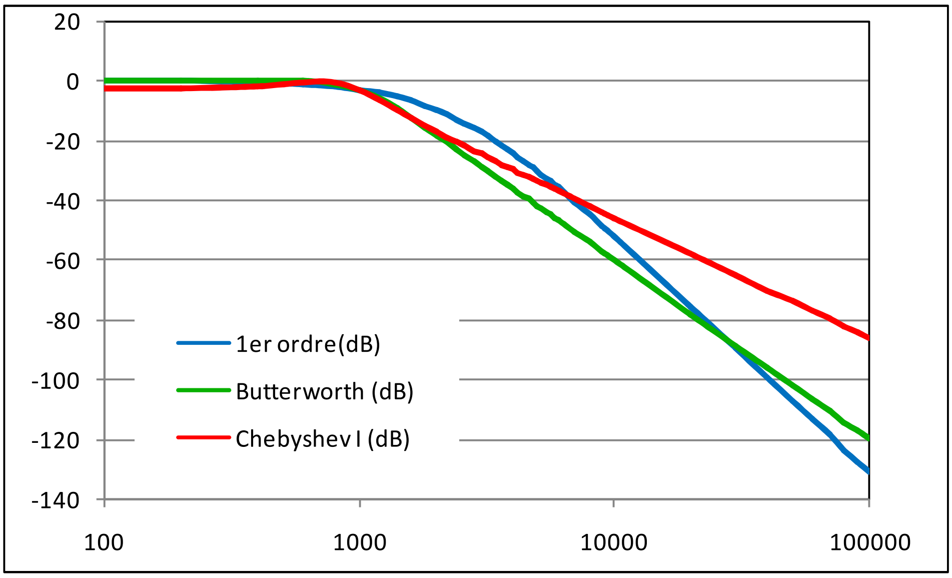
- Par rapport à l'utilisation de sections du premier ordre ou d'un filtre de Butterworth:
  - 2nd ordre suffit - Gain dans la bande moins stable





Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-bas de type I

58



59

Implantation matérielle

- On part de la fonction de transfert du 2nd ordre

$$H(j\omega)=\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2+0{,}645\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)+0{,}708}$$

- On fait ensuite apparaître le dénominateur caractéristique d'un 2nd ordre synthétisable

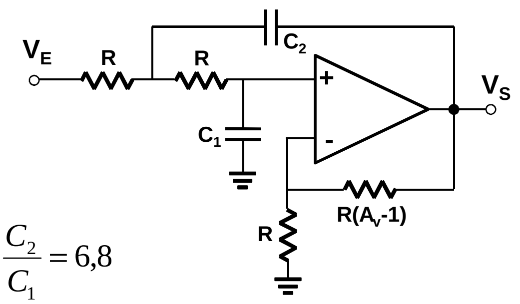
$$H(j\omega)=\frac{1/0{,}708}{\frac{1}{0{,}708}\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2+\frac{0{,}645}{0{,}708}\left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)+1}=\frac{1{,}412}{\left(\frac{j\omega}{0{,}841\cdot\omega_c}\right)^2+0{,}767\left(\frac{j\omega}{0{,}841\cdot\omega_c}\right)+1}$$

$$\Rightarrow \omega_0=0{,}841\cdot\omega_c \qquad \Rightarrow 2m=0{,}767 \Leftrightarrow Q=1{,}304$$

60

Implantation matérielle

- Sallen-Key Passe-bas à gain unitaire (A_v=1)



$$Q=\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}=1{,}304\Rightarrow\frac{C_2}{C_1}=6{,}8$$

$$\omega_0=\frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}=\frac{1}{RC_1\sqrt{6{,}8}}=841\text{rd/s}\Rightarrow\frac{1}{RC_1}=2193\text{ rd/s}$$

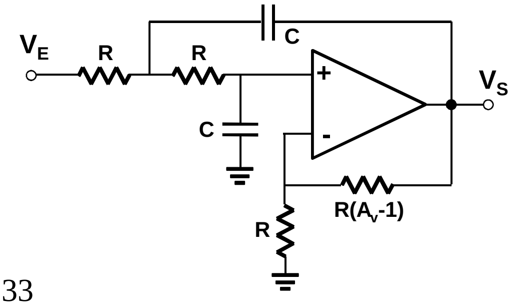
$$R=10k\Omega\Rightarrow C_1=46nF\Rightarrow C_2=310nF$$

61

Implantation matérielle

Polytech'Montpellier

- Sallen-Key Passe-bas symétrique



$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{3 - A_v} = 1{,}304$$

$$\Rightarrow 3 - A_v = 0{,}767 \Rightarrow A_v = 2{,}233$$

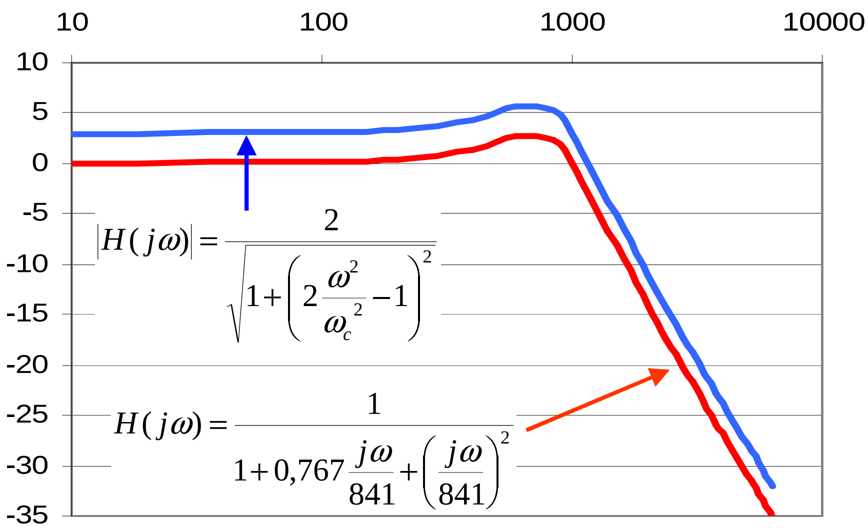
$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 841\,\text{rd/s}$$

$$R = 10k\Omega \Rightarrow C = 120nF$$

62

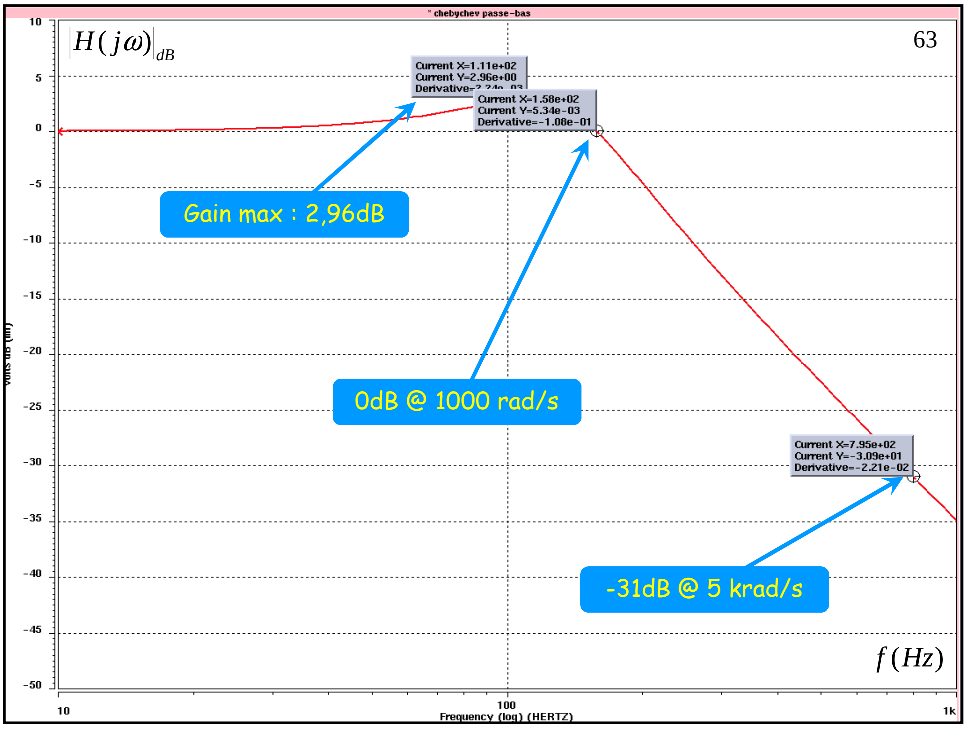
Implantation matérielle

Polytech'Montpellier



$$|H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1\right)^2}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 0{,}767\frac{j\omega}{841} + \left(\frac{j\omega}{841}\right)^2}$$



64

Calcul d'un filtre de Chebyshev passe-haut de type I

- On détermine l'ordre du filtre passe-bas de même sélectivité.

$$\left.\begin{aligned} \omega_r &= \frac{\omega_c}{\omega_s} \\ g &= \sqrt{\frac{10^{As/10}-1}{\varepsilon^2}} \end{aligned}\right\} \quad n = \frac{\log\left(g+\sqrt{g^2-1}\right)}{\log\left(\omega_r+\sqrt{\omega_r^2-1}\right)}$$

- On choisit le polynôme correspondant à ***n*** et ε mais cette fois-ci on effectue le remplacement suivant :

$$p \rightarrow \frac{\omega_c}{j\omega}$$

65

Exercice

- Concevoir un filtre passe-haut ayant les caractéristiques suivantes :
  - Fréquence de coupure : 1kHz
  - Gain dans la BP : libre
  - Ondulation maximale dans la BP : 3dB
  - Atténuation de 20dB minimum pour f<600Hz
- Calculer le filtre de Chebychev correspondant
- Proposer une implantation à l'aide de cellules de Sallen-Key

66

Chapitre II : filtrage analogique 2

- Rappels & compléments
- Synthèse de filtres d'ordre supérieur à 2
  - Filtres à amortissement critique
  - Filtres de Butterworth
  - Filtres de Chebyshev
  - Filtres elliptiques

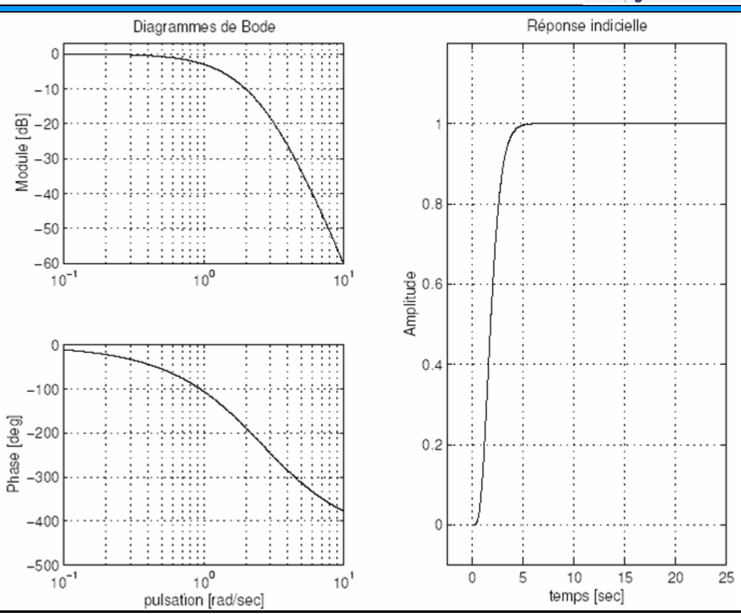
67

Les filtres actifs principaux

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff I	Tchebycheff II
Régularité de la courbe d'amplitude	excellente	satisfaisante	ondulations	bonne
Raideur de la transition	faible	médiocre	bonne	moyenne
Régularité du temps de propagation	faible	excellente	médiocre	faible
Qualité de la réponse temporelle	satisfaisante	excellente	mauvaise	bonne
Facteurs de qualité	moyens	faibles	élevés	moyens
Disparité des composants	faible	très faible	forte	faible

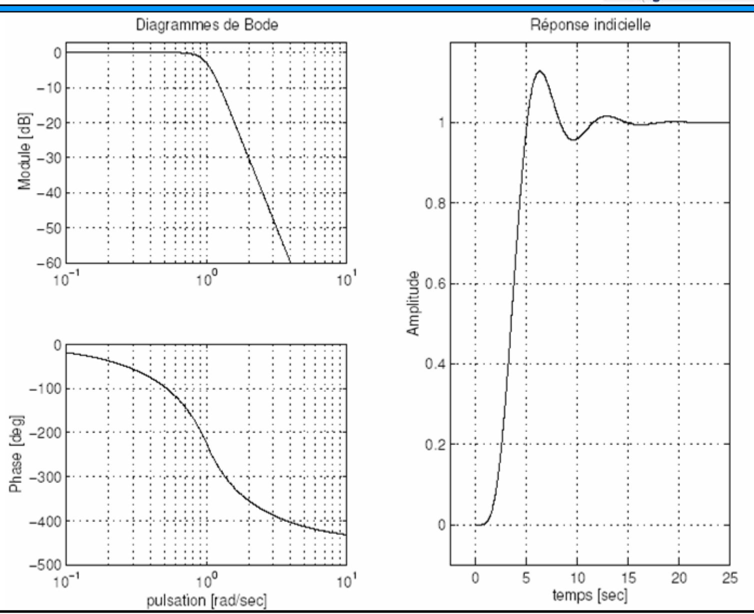
68

5 sections du 1er ordre



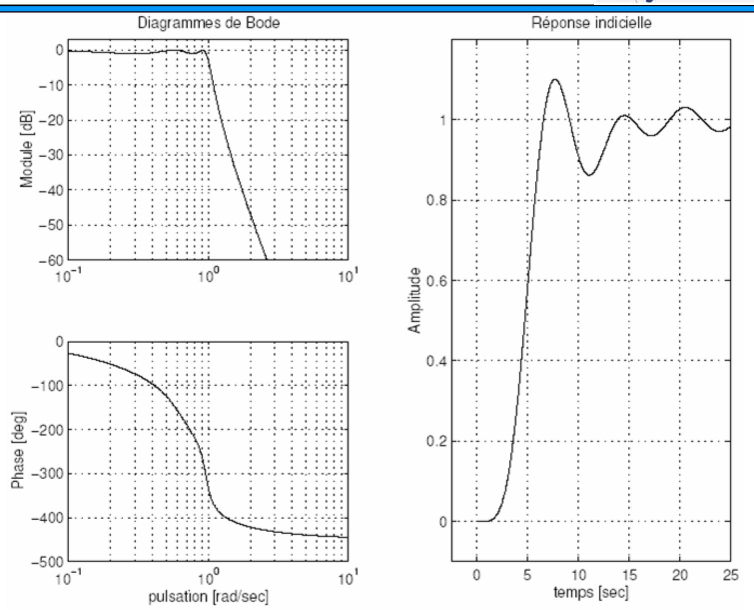
69

Filtres de Butterworth (n=5)



70

Filtres de Chebyshev type I (n=5)



71

Filtres de Bessel (n=5)