Complexité paramétrée

Christophe Paul et Ignasi Sau

Examen Janvier 2013

Notes de cours autorisées. **3h00**

Note: La clarté, la concision et ainsi que la complétude des preuves seront prises en compte dans la notation. Le sujet est beaucoup trop long, n'essayer pas de tout faire, mais essayez d'attaquer au moins une question difficile, marquée par **(*)** ou **(**)**.

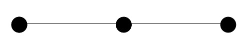
1 Modification de graphes

Si S est un ensemble de sommets d'un graphe $G = (V, E)$, nous notons $G - S$ le sous-graphe induit $G[V \setminus S]$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des graphes dont les composantes connexes sont des cliques. On s'intéresse au problème paramétré Π suivant :

- Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un paramètre $k \in \mathbb{N}$
- Existe-t-il un ensemble de sommets S tel que $G - S \in \mathcal{F}$ et $|S| \leqslant k$?

1.1 Un premier algorithme

Q1. Montrer qu'un graphe G appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si G ne contient pas de P_3, chemin induit sur 3 sommets.



Q2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une classe de graphe héréditaire : si $G \in \mathcal{F}$, alors pour tout sous-graphe induit H de G, $H \in \mathcal{F}$.

Q3. En déduire un algorithme paramétré pour Π. En analyser la complexité.

1.2 Version disjointe du problème

Considérons la variante DISJOINT-Π du problème paramétré Π :

- Etant donnés un graphe $G = (V, E)$, un ensemble X tel que $G - X \in \mathcal{F}$ et un paramètre $k = |X| \in \mathbb{N}$,
- existe-t-il un ensemble de sommets S tel que $G - S \in \mathcal{F}$, $X \cap S = \emptyset$ et $|S| \leqslant k$?

Hypothèse : Nous noterons (G, X) une instance positive de DISJOINT-Π.

Q4. $(*)$ Supposons que A soit un algorithme paramétré pour DISJOINT-Π de complexité $c^k \cdot n^{O(1)}$. Décrire (pseudo-code) un algorithme B pour le problème Π en utilisant A. Démontrer la correction de l'algorithme et analyser sa complexité.

Nous nous intéressons maintenant à un algorithme pour résoudre DISJOINT-Π.

Q5. Le sous-graphe induit $G[S]$ appartient-il à la classe $\mathcal{F}$?

Q6. Soit $Q = \{x, y, z\}$ un ensemble de trois sommets formant un P_3 de G. Est-il possible que $Q \subseteq X$? Décrivez les différentes intersections possibles de Q avec $V \setminus X$ et X.

Q7. Soient C et C' deux composantes connexes différentes de $G[X]$. Soit x un sommet de $V \setminus X$ tel que $N(x) \cap C \neq \emptyset$ et $N(x) \cap C' \neq \emptyset$. Le sommet x doit-il ou peut-il appartenir à S ?

Q8. Soit C une composante connexe de $G[X]$. Supposons que $x \notin X$ tel que $N(x) \cap C \neq \emptyset$ et $\overline{N}(x) \cap C \neq \emptyset$. Le sommet x doit-il ou peut-il appartenir à S ?

Q9. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur les sommets de $V \setminus X$ définie par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $N(x) \cap X = N(y) \cap X$. Montrer que si G ne contient pas de sommet tels ceux décrits aux questions Q7 et Q8 et si R est une classe d'équivalence, alors $N(R) \cap X = \emptyset$ ou $N(R) \cap X = C$ où C est une composante connexe de G[X].

Q10. (∗∗) En déduire un algorithme paramétré permettrant de résoudre DISJOINT-Π. (*idées :* représenter G par un graphe valué dont les sommets représentent les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et les composantes connexes de $G[X]$. On s'intéressera alors aux couplages de poids maximum dans ce graphe valué)

1.3 Théorème de Courcelle et largeur arborescente

Q11. Exprimer la propriété qu'un graphe G soit une instance positive pour le problème Π à l'aide d'une formule ψ en logique monadique du second ordre. (Vous pouvez décomposer la formule ψ à l'aide de sous formules que vous détaillerez)

Q12. Si G est une instance positve, est-il possible de borner la largeur arborescente de G, $\mathbf{tw}(G)$, en fonction du paramètre k ?

Q13. Le théorème de Courcelle permet-il de montrer que le problème Π est FPT ?

1.4 Noyau

Q14. Décrire des règles de réduction qui permettent d'obtenir un noyau polynomial dont vous analyserez la taille.

2 Trouver des grands sous-graphes connexes de degré borné

Pour un graphe G, nous notons $\Delta(G)$ son degré maximum. Soit $d \geqslant 2$ un entier *fixé*. Maintenant on s'intérèsse au problème paramétré Π_d suivant (notez qu'on a un problème différent pour chaque valeur de d) :

- Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un paramètre $k \in \mathbb{N}$,
- Existe-t-il un sous-graphe connexe H de G tel que $\Delta(H) \leqslant d$ et $|E(H)| \geqslant k$?

Remarque: Notez les similarités entre Π_2 et le problème de Longest Path qu'on a vu en cours.

2.1 Non-existence de noyaux polynomiaux

Q15. Démontrez que, pour tout $d \geqslant 2$, le problème Π_d n'admet pas de noyau polynomial (en vous appuyant sur des hypothèses de complexité raisonnables).

2.2 Algorithmes efficaces dans les graphes planaires (bidimensionalité)

À partir de maintenant on va supposer que le graphe G (*input* du problème Π_d) est planaire. On note par $\mathbf{bw}(G)$ la *branchwidth* (largeur de branches) d'un graphe G.

Pour chaque $d \geqslant 2$, on définit pour un graphe G le paramètre $\mathbf{P}_d(G)$ comme le plus grand nombre d'arêtes d'un sous-graphe connexe H de G tel que $\Delta(H) \leqslant d$.

Q16. ($*$) Démontrez que, pour tout $d \geqslant 2$, le paramètre $\mathbf{P}_d$ est fermé par mineurs.

Q17. Est-ce que le paramètre $\mathbf{P}_d$ est fermé par contractions pour tout $d \geqslant 2$?
Vous pouvez utiliser le fait que $\mathbf{P}_d$ est fermé par mineurs (**Q16**).

Q18. Soit R_r la $(r \times r)$-grille. Démontrez que :

(a) $\mathbf{P}_d(R_r) \geqslant 2r(r-1)$ pour $d \geqslant 4$, et que
(b) $\mathbf{P}_3(R_r) \geqslant 2r(r-1) - \left\lceil \frac{r-2}{2} \right\rceil (r-2)$.

Note : Vous pouvez utiliser que $|E(R_r)| = 2r(r-1)$. Si vous n'avez pas le temps de faire les calculs en détail pour la partie (b), vous pouvez toujours faire un dessin pour expliquer la borne inférieur sur $\mathbf{P}_3(R_r)$.

Q19. Prouvez que pour tout $d \geqslant 4$ et tout graphe planaire G, il existe une constante α telle que

$$\mathbf{bw}(G) \leqslant \alpha \cdot \sqrt{\mathbf{P}_d(G)}.$$

Idée : Utilisez **Q16**, **Q18**, et le fait qu'un graphe planaire G avec $\mathbf{bw}(G) \geqslant \ell$ contient $R_{\ell/3}$ en tant que mineur.

Q20. ($*$) Soit G un graphe planaire avec n sommets, et $d \geqslant 4$. On suppose que, en étant donnée une *sphere-cut-décomposition* (T, μ) de G de largeur ω, on sait calculer la valeur de $\mathbf{P}_d(G)$ en temps $2^{O(w)} \cdot n^{O(1)}$. Utilisez cette hypothèse et **Q19** pour donner un algorithme qui résout le problème paramétré Π_d en temps $2^{O(\sqrt{k})} \cdot n^{O(1)}$.

Q21. ($**$) Expliquez en quelques lignes, de manière informelle, quelle est la propriété combinatoire fondamentale des *sphere-cut-décompositions* qui permet d'avoir des algorithmes paramétrés *simple-exponentiels*[1] pour résoudre le problème du CYCLE HAMILTONIEN dans les graphes planaires.

Mots clés : middle-set, noose, partitions non-croisées d'un cercle.

[1] C'est-à-dire, en temps $2^{O(w)} \cdot n^{O(1)}$, si w est la largeur de la sphere-cut-décomposition et n est le nombre de sommets du graphe.