

Travail à la Maison - Solution

Complexité Avancée - UMIN 345

23 Octobre 2007

Problème : COUPLAGE TRIPARTI ou 3-DIMENSIONAL MATCHING

- **Données :** Un ensemble T de triplets de $B \times G \times H$ avec $|B| = |G| = |H| = n$
- **Question :** Existe-t-il un sous-ensemble $S \subseteq T$ de n triplets deux à deux disjoints ?

Théorème 1 COUPLAGE TRIPARTI est NP-complet. En fait, 3-SAT \leq_K COUPLAGE TRIPARTI.

La preuve suivante est celle que l'on peut trouver dans les livres classiques [1, 2].

Preuve :

1. COUPLAGE TRIPARTI appartient à NP:

Etant donné un ensemble de n triplets de $B \times G \times H$, on peut tester en temps polynomial s'ils sont deux à deux disjoints.

2. Réduction de 3-SAT vers COUPLAGE TRIPARTI :

(a) Construction d'une instance de COUPLAGE TRIPARTI à partir d'une instance Φ de 3-SAT :

Soit Φ une instance de 3-SAT avec m clauses et k variables. Soit x une variable de Φ . On note $n_F(x)$ le nombre d'occurrences du littéral \bar{x} dans Φ , $n_T(x)$ le nombre d'occurrences du littéral x , et $n(x) = \max\{n_F(x), n_T(x)\}$.

Pour chaque variable on définit des sous-ensembles de $n(x)$ éléments de B noté $B(x)$, de G noté $B(x)$ et de H noté $B(x)$. A la variable x est aussi associée un ensemble $T(x)$ de $2n(x)$ triplets:

- $B(x) = \{b_0(x), \dots, b_{n(x)-1}(x)\}$, $G(x) = \{g_0(x), \dots, g_{n(x)-1}(x)\}$ et
 $H(x) = \{h_0(x), \dots, h_{n(x)-1}(x), \bar{h}_0(x), \dots, \bar{h}_{n(x)-1}(x)\}$,
- $T(x) = T_F(x) \cup T_T(x)$ avec

$$T_T(x) = \{\{b_i(x), g_i(x), h_i(x)\} \mid 0 \leq i \leq n(x)\} \text{ et}$$
$$T_F(x) = \{\{b_i(x), g_{(i+1) \bmod n(x)}(x), \bar{h}_{(i+1) \bmod n(x)}(x)\} \mid 0 \leq i \leq n(x)\}.$$

A chaque clause C , on associe un élément $b(C) \in B$ et $g(C) \in G$. Ces deux éléments participent à un ensemble $T(C)$ de 3 triplets (un pour chaque littéral de la clause). Prenons par exemple la clause $C = (x \vee \bar{y} \vee z)$. Alors

$$T(C) = \{\{b(C), g(C), h_i(x)\}, \{b(C), g(C), \bar{h}_j(y)\}, \{b(C), g(C), h_k(y)\}\}$$

avec $0 \leq i \leq n(x) - 1$, $0 \leq j \leq n(y) - 1$ et $0 \leq k \leq n(z) - 1$.

Notons que pour chaque paire de clauses C, C' les triplets de $T(C)$ et $T(C')$ doivent être choisis deux à deux disjoints. C'est possible puisque $|T_T(x)| = T_F(x) = n(x)$.

Notons que nous avons pour l'instant plus d'éléments dans H que dans B et G . Soit $t = |H| - |B| = |H| - |G|$. Pour y remédier, nous ajoutons t éléments $\{b^1, \dots, b^t\}$ dans B et t éléments $\{g^1, \dots, g^t\}$ dans G ainsi que les triplets $T(h) = \{\{g^i, b^i, h\} \mid 1 \leq i \leq t\}$ pour tout $h \in H$ qui n'est impliqué dans aucun triplet de clause $T(C)$.

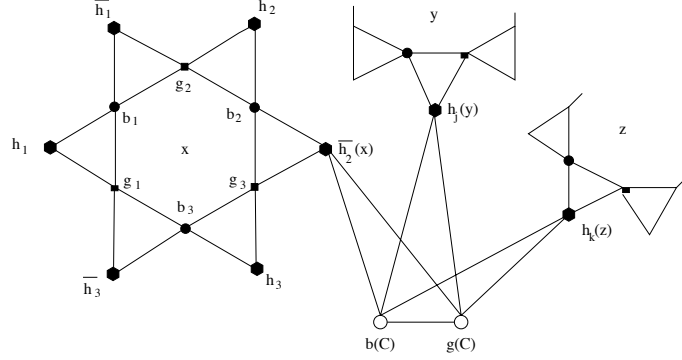


Figure 1: Le gadget associé à la variable x à gauche et les trois triplets associés à la clause $C = (\bar{x} \vee y \vee z)$

- (b) La construction de l'instance de COUPLAGE TRIPARTI à partir d'une formule 3-SAT est clairement polynomiale.
- (c) Montrons que Φ est satisfiable ssi il existe un couplage tripartite \mathcal{M} pour $T \subset B \times G \times H$.
Commençons par deux observations:

Observation 1 *S'il existe un couplage tripartite \mathcal{M} dans $T \subset B \times G \times H$, alors pour toute variable x de Φ , soit $T_F(x) \subset \mathcal{M}$, soit $T_T(x) \subset \mathcal{M}$.*

Observation 2 *S'il existe un couplage tripartite \mathcal{M} dans $T \subset B \times G \times H$, alors pour toute clause C de Φ , un des triplets de $T(C)$ appartient à \mathcal{M} .*

Donc s'il existe un couplage tripartite \mathcal{M} , alors il est possible de définir une affectation $\mathcal{A} : X \rightarrow \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ des variables X de Φ satisfaisant Φ : pour chaque variable $x \in X$,

$$\mathcal{A}(x) = \text{VRAI ssi } T_F(x) \subset \mathcal{M}$$

L'observation 1 montre que \mathcal{A} est bien définie. D'après l'observation 2, s'il existe un couplage tripartite alors pour chaque clause C , $b(C)$ et $g(C)$ sont couplés à un élément de H , ce qui implique qu'au moins un des trois littéraux de C est satisfait. Donc globalement, chaque clause de Φ est satisfaite.

Supposons maintenant qu'il existe une affectation $\mathcal{A} : X \rightarrow \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ satisfaisant Φ . On définit un couplage tripartite de la manière suivante:

- pour chaque variable $x \in X$, $T_F(x) \subset \mathcal{M}$ ssi $\mathcal{A}(x) = \text{VRAI}$
- chaque clause C est satisfaite par \mathcal{A} , il existe donc au moins un littéral, disons x (resp. \bar{x}), qui est à VRAI: i.e. $\mathcal{A}(x) = \text{VRAI}$ (resp. $\mathcal{A}(x) = \text{FAUX}$). Donc le triplet $\{g(C), b(C), h_i(x)\} \in T$ (resp. $\{g(C), b(C), \bar{h}_j(x)\} \in T$) peut être ajouté à \mathcal{M} puisqu'il est disjoint de ceux déjà présents.
- Enfin s'il existe x , i ou j tels que $h_i(x)$ ou $\bar{h}_j(x)$ n'a pas encore été inclus dans un triplet de \mathcal{M} , alors on choisit un couple quelconque, non encore utilisé b^k, g^k et on ajoute le triplet $\{h_i(x), b^k, g^k\}$ ou $\{\bar{h}_j(x), b^k, g^k\}$ à \mathcal{M}

Il est facile de voir que l'ensemble de triplets \mathcal{M} ainsi défini est un couplage tripartite de taille n .

References

- [1] M. Garey and D. Johnson. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman and Company, 1979
- [2] C. Papadimitriou. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994