Algorithmes Combinatoires (1)

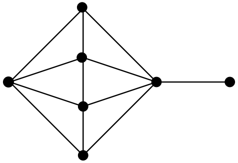
Décomposition modulaire

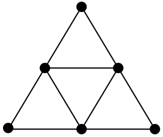
Christophe PAUL
(CNRS - LIRMM)

November 4, 2009

Graphes de Comparabilité

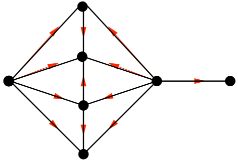
Un graphe (non-orienté) $G = (V, E)$ est de comparabilité s'il existe une orientation transitive de son ensemble d'arêtes.

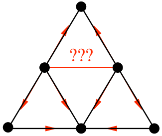




Graphes de Comparabilité

Un graphe (non-orienté) $G = (V, E)$ est de comparabilité s'il existe une orientation transitive de son ensemble d'arêtes.

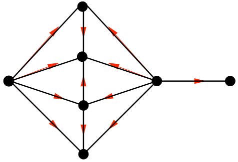


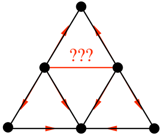


$$\boxed{\overrightarrow{xy} \quad \text{and} \quad \overrightarrow{yz} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{xz}}$$

Graphes de Comparabilité

Un graphe (non-orienté) $G = (V, E)$ est de comparabilité s'il existe une orientation transitive de son ensemble d'arêtes.



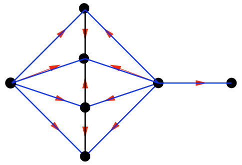


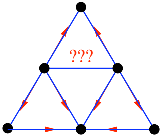
Relation de forçage [Gallai] sur l'orientation des arêtes de E:

$$\overrightarrow{xy}\ \Gamma\ \overrightarrow{uv} \text{ ssi } \begin{cases} \text{soit } x = u \text{ et } yv \notin E \\ \text{soit } y = v \text{ et } xu \notin E \end{cases} \tag{1}$$

Graphes de Comparabilité

Un graphe (non-orienté) $G = (V, E)$ est de comparabilité s'il existe une orientation transitive de son ensemble d'arêtes.





Relation de forçage [Gallai] sur l'orientation des arêtes de E:

$$\overrightarrow{xy} \ \Gamma \ \overrightarrow{uv} \text{ ssi } \begin{cases} \text{soit } x = u \text{ et } yv \notin E \\ \text{soit } y = v \text{ et } xu \notin E \end{cases} \tag{1}$$

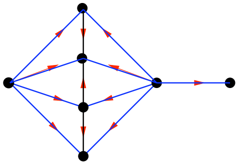
Si Γ^* est la fermeture transitive et réflexive de Γ, alors

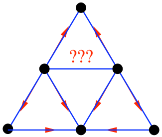
- $\Gamma^*(\overrightarrow{xy})$ est la classe de forçage de $\overrightarrow{xy}$

Graphes de Comparabilité

Théorème [Gallai]

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité ssi pour toute arête $xy \in E$, $\Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \cap \Gamma^*(\overrightarrow{yx}) = \emptyset$.

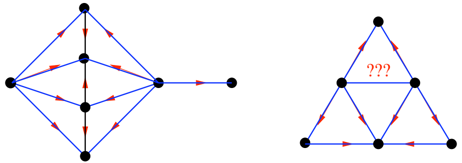




Graphes de Comparabilité

Théorème [Gallai]

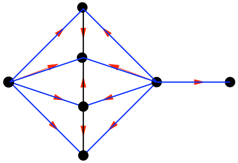
Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité ssi pour toute arête $xy \in E$, $\Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \cap \Gamma^*(\overrightarrow{yx}) = \emptyset$.

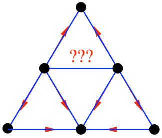


$$\boxed{S(\Gamma^*(\overrightarrow{xy})) = \{v \in V \mid \exists\ \overrightarrow{uv} \in \Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \text{ ou } \overrightarrow{vu} \in \Gamma^*(\overrightarrow{xy})\}}$$

Graphes de Comparabilité

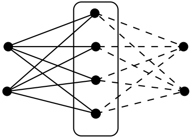
Théorème [Gallai]
Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité ssi pour toute arête $xy \in E$, $\Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \cap \Gamma^*(\overrightarrow{yx}) = \emptyset$.





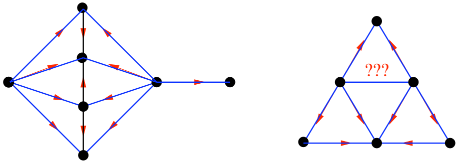
$$\boxed{S(\Gamma^*(\overrightarrow{xy})) = \{v \in V \mid \exists\ \overrightarrow{uv} \in \Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \text{ ou } \overrightarrow{vu} \in \Gamma^*(\overrightarrow{xy})\}}$$

Théorème [Gallai]
Le support $S(\Gamma^*(\overrightarrow{xy}))$ toute classe de forçage d'un graphe G est un module de G.



Graphes de Comparabilité

Théorème [Gallai]
Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité ssi pour toute arête $xy \in E$, $\Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \cap \Gamma^*(\overrightarrow{yx}) = \emptyset$.



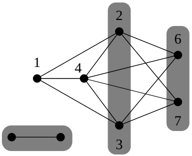
$$\boxed{S(\Gamma^*(\overrightarrow{xy})) = \{v \in V \mid \exists\ \overrightarrow{uv} \in \Gamma^*(\overrightarrow{xy}) \text{ ou } \overrightarrow{vu} \in \Gamma^*(\overrightarrow{xy})\}}$$

Théorème [Gallai]
Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité ssi pour tout module M, le sous-graphe induit $G[M]$ est un graphe de comparabilité.

Modules

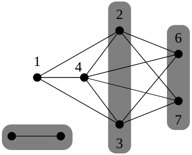
- Un ensemble de sommets M d'un graphe G est un module ssi
$$\forall x \in V \setminus M,\ \text{soit } M \subseteq N(x) \text{ ou } M \cap N(x) = \emptyset$$

Exemples de modules



Modules

- Un ensemble de sommets M d'un graphe G est un module ssi
$$\forall x \in V \setminus M, \text{ soit } M \subseteq N(x) \text{ ou } M \cap N(x) = \emptyset$$

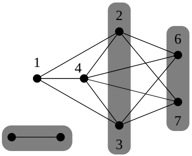


Exemples de modules

- composantes connexes
- composantes connexes de $\overline{G}$

Modules

- Un ensemble de sommets M d'un graphe G est un module ssi
$$\forall x \in V \setminus M, \text{ soit } M \subseteq N(x) \text{ ou } M \cap N(x) = \emptyset$$

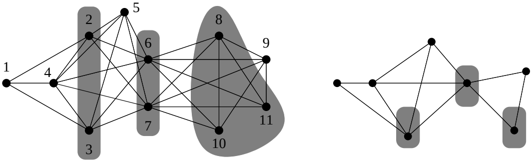


Exemples de modules

- composantes connexes
- composantes connexes de $\overline{G}$
- tout sous-ensemble de sommets d'une clique (d'un stable)

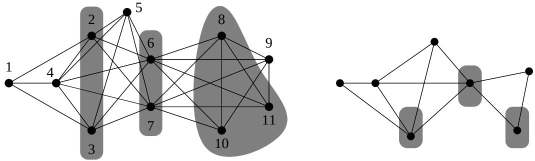
Modules

- Un ensemble de sommets M d'un graphe G est un module ssi
$$\forall x \in V \setminus M, \text{ soit } M \subseteq N(x) \text{ ou } M \cap N(x) = \emptyset$$
- Une partition $\mathcal{P}$ des sommets d'un graphe G est une partition modulaire si toute partie est un module de G.



Modules

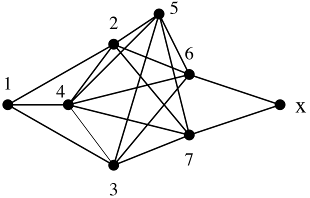
- Un ensemble de sommets M d'un graphe G est un module ssi
$$\forall x \in V \setminus M, \text{ soit } M \subseteq N(x) \text{ ou } M \cap N(x) = \emptyset$$
- Une partition $\mathcal{P}$ des sommets d'un graphe G est une partition modulaire si toute partie est un module de G.

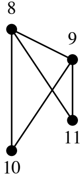


- Le graphe quotient $G_{/\mathcal{P}}$ est le sous-graphe induit obtenu en sélectionnant un sommet dans chaque partie de $\mathcal{P}$.

Modules

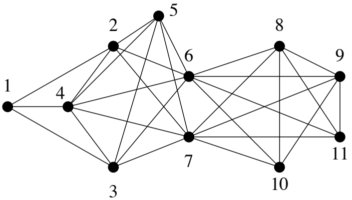
Dans un graphe G, l'opération de substitution, notée $G_{x \to H}$, d'un sommet x par un graphe H consiste à :





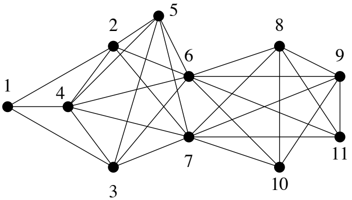
Modules

Dans un graphe G, l'opération de substitution, notée $G_{x \to H}$, d'un sommet x par un graphe H consiste à :



Modules

Dans un graphe G, l'opération de substitution, notée $G_{x \to H}$, d'un sommet x par un graphe H consiste à :

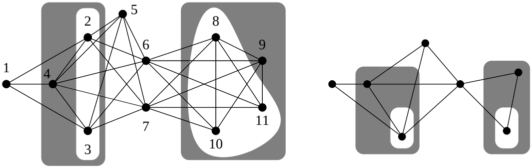


Lemme

Si x est un sommet d'un module M de G, alors $(M \setminus \{x\}) \cup V(H)$ est un module de $G_{x \to H}$.

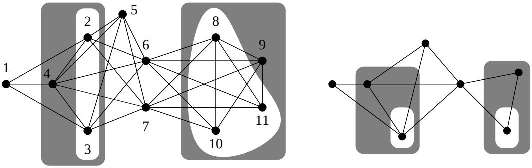
Modules

Lemma [Mörhing et Radermacher'84]
Soit $\mathcal{P}$ une partition modulaire de $G = (V, E)$.
$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$ est un module de $G_{/\mathcal{P}}$ ssi $\cup_{M \in \mathcal{X}} M$ est un module de G.



Modules

Lemma [Mörhing et Radermacher'84]
Soit $\mathcal{P}$ une partition modulaire de $G = (V, E)$.
$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$ est un module de $G_{/\mathcal{P}}$ ssi $\cup_{M \in \mathcal{X}} M$ est un module de G.

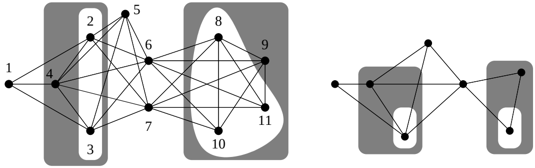


Sketch de preuve :

$\Rightarrow$ D'après le lemme précédent.

Modules

Lemma [Mörhing et Radermacher'84]
Soit $\mathcal{P}$ une partition modulaire de $G = (V, E)$.
$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$ est un module de $G_{/\mathcal{P}}$ ssi $\cup_{M \in \mathcal{X}} M$ est un module de G.



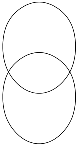
Sketch de preuve :

- $\Rightarrow$ D'après le lemme précédent.
- $\Leftarrow$ Si M et M' sont deux modules tels que $M \subseteq M$, après la contraction d'un module M en un sommet x, $M'_{M \to x}$ est un module du graphe résultant.

Modules forts

Lemme

Si M et M' sont deux modules se chevauchant, alors

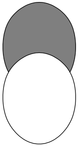


Modules forts

Lemme

Si M et M' sont deux modules se chevauchant, alors

- $M \setminus M'$ est un module

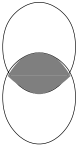


Modules forts

Lemme

Si M et M' sont deux modules se chevauchant, alors

- $M \setminus M'$ est un module
- $M \cap M'$ est un module

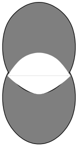


Modules forts

Lemme

Si M et M' sont deux modules se chevauchant, alors

- $M \setminus M'$ est un module
- $M \cap M'$ est un module
- $M \Delta M'$ est un module
- $M \cup M'$ est un module

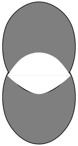


Modules forts

Lemme

Si M et M' sont deux modules se chevauchant, alors

- $M \setminus M'$ est un module
- $M \cap M'$ est un module
- $M \Delta M'$ est un module
- $M \cup M'$ est un module



L'ensemble des modules d'un graphe forme une famille partitive

Un module est fort s'il ne chevauche aucun autre module

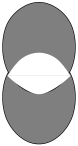
Un graphe est premier s'il ne contient que des modules triviaux

Modules forts

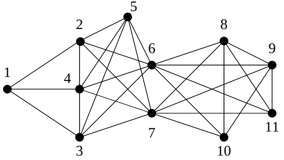
Lemme

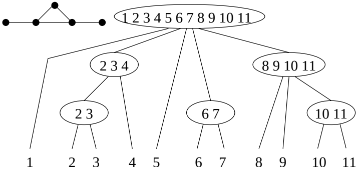
Si M et M' sont deux modules se chevauchant, alors

- $M \setminus M'$ est un module
- $M \cap M'$ est un module
- $M \Delta M'$ est un module
- $M \cup M'$ est un module



Larbre d'inclusion des modules forts d'un graphe forme l'arbre de décomposition modulaire $MD(G)$ of G.





Théorème de décomposition modulaire

Théorème [Galai'67,CHM81] Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors,

1. soit G est non connexe (nœud parallèle)
2. soit $\overline{G}$ est non connexe (nœud série)
3. soit $G_{/\mathcal{M}(G)}$ est premier, avec $\mathcal{M}(G)$ la partition modulaire de G composée des modules forts maximaux (différents de V).

Théorème de décomposition modulaire

Théorème [Galai'67,CHM81] Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors,

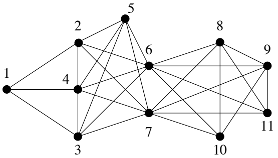
1. soit G est non connexe (nœud parallèle)
2. soit $\overline{G}$ est non connexe (nœud série)
3. soit $G_{/\mathcal{M}(G)}$ est premier, avec $\mathcal{M}(G)$ la partition modulaire de G composée des modules forts maximaux (différents de V).

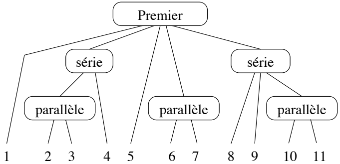
$$\Longrightarrow \text{Algorithme "brute force" en } O(n^3)$$

Théorème de décomposition modulaire

Théorème [Galai'67,CHM81] Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors,

1. soit G est non connexe (nœud parallèle)
2. soit $\overline{G}$ est non connexe (nœud série)
3. soit $G_{/\mathcal{M}(G)}$ est premier, avec $\mathcal{M}(G)$ la partition modulaire de G composée des modules forts maximaux (différents de V).

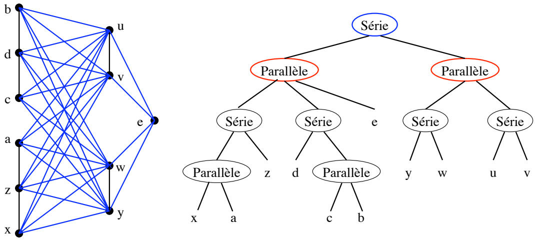




Lemme
Tout module est soit un module fort, soit l'union de modules forts fils d'un module dégénéré (série ou parallèle)

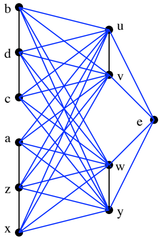
Cographes

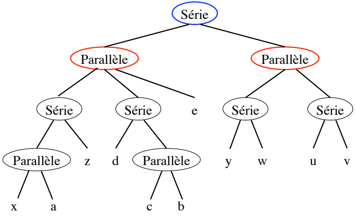
Un cographe est un graphe totalement décomposable
i.e. un graphe G tel que $MD(G)$ ne contient pas de nœud premier.



Cographes

Un cographe est un graphe totalement décomposable
i.e. un graphe G tel que $MD(G)$ ne contient pas de nœud premier.



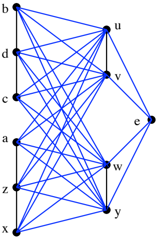


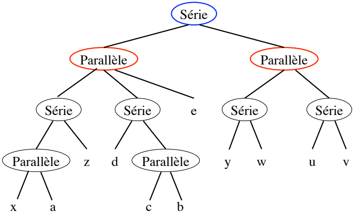
Tout cographe est construit par une séquence de compositions séries et d'unions disjointes

$$\boxed{(((x \oplus a) \otimes z) \oplus (d \otimes (c \oplus b)) \oplus e) \otimes ((y \otimes w) \oplus (u \otimes v))}$$

Cographes

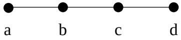
Un cographe est un graphe totalement décomposable
i.e. un graphe G tel que $MD(G)$ ne contient pas de nœud premier.

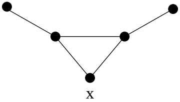




Théorème

Un graphe est un cographe ssi il ne contient pas de P_4 induit.





Intervalles communs

Soit π et σ deux permutations de $\mathcal{S}_n$.

- Un intervalle de π est un ensemble d'éléments consécutifs dans π.
- Un intervalle commun à π et σ est un ensemble déléments consécutifs à la fois dans π et dans σ.

Intervalles communs

Soit π et σ deux permutations de $\mathcal{S}_n$.

- Un intervalle de π est un ensemble d'éléments consécutifs dans π.
- Un intervalle commun à π et σ est un ensemble déléments consécutifs à la fois dans π et dans σ.

Sans perte de généralité, on fixera $\sigma = \mathbb{I}_n$

Intervalles communs

Soit π et σ deux permutations de $\mathcal{S}_n$.

- Un intervalle de π est un ensemble d'éléments consécutifs dans π.
- Un intervalle commun à π et σ est un ensemble déléments consécutifs à la fois dans π et dans σ.

Sans perte de généralité, on fixera $\sigma = \mathbb{I}_n$

Lemme :

Si I et J sont deux intervalles communs de π se chevauchant, alors $I \cup J$, $I \cap J$, $I \setminus J$ et $J \setminus I$ sont des intervalles communs de π.

Intervalles communs

Soit π et σ deux permutations de $\mathcal{S}_n$.

- Un intervalle de π est un ensemble d'éléments consécutifs dans π.
- Un intervalle commun à π et σ est un ensemble déléments consécutifs à la fois dans π et dans σ.

Sans perte de généralité, on fixera $\sigma = \mathbb{I}_n$

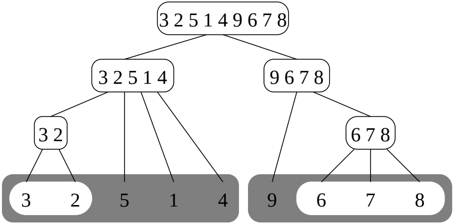
Lemme :

Si I et J sont deux intervalles communs de π se chevauchant, alors $I \cup J$, $I \cap J$, $I \setminus J$ et $J \setminus I$ sont des intervalles communs de π.

L'ensemble des intervalles communs d'une permutation forme une famille faiblement partitive

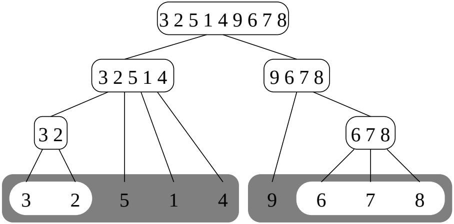
Intervalles communs

$\longrightarrow$ on obtient donc un arbre des intervalles forts



Intervalles communs

$\longrightarrow$ on obtient donc un arbre des intervalles forts

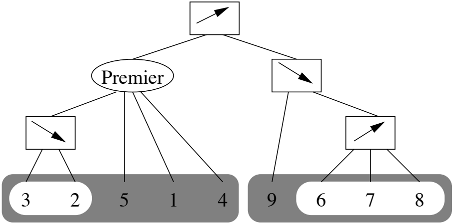


Théorème : Soit π une permutation de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}$ sa partition en intervalles forts maximaux ($|\mathcal{I}| = k$), alors :

$$\boxed{\pi_{/\mathcal{I}} = \mathbb{I}_k \quad \text{ou} \quad \pi_{/\mathcal{I}} = \overline{\mathbb{I}_k} \quad \text{ou} \quad \pi_{/\mathcal{I}} \text{ est première / simple}}$$

Intervalles communs

$\rightarrow$ on obtient donc un arbre des intervalles forts

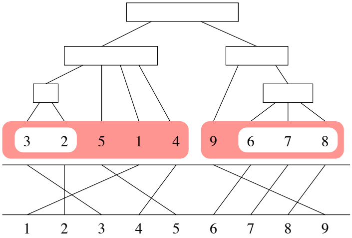


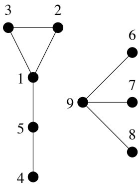
Théorème : Soit π une permutation de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}$ sa partition en intervalles forts maximaux ($|\mathcal{I}| = k$), alors :

$$\boxed{\pi_{/\mathcal{I}} = \mathbb{I}_k \quad \text{ou} \quad \pi_{/\mathcal{I}} = \overline{\mathbb{I}_k} \quad \text{ou} \quad \pi_{/\mathcal{I}} \text{ est première / simple}}$$

Intervalles communs et graphes de permutation

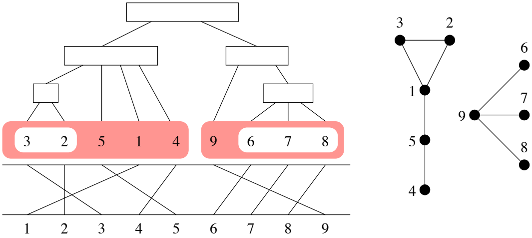
Un graphe de permutation $G = (V, E)$ est le graphe d'intersection d'un ensemble de segments entre deux droites parallèles





Intervalles communs et graphes de permutation

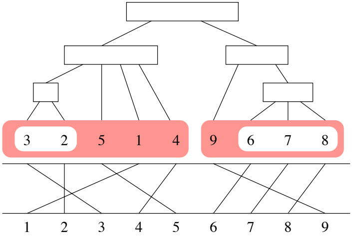
Un graphe de permutation $G = (V, E)$ est le graphe d'intersection d'un ensemble de segments entre deux droites parallèles

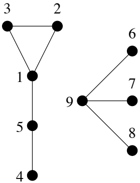


$$\boxed{\exists \pi \in \mathcal{S}_n : \pi(i) > \pi(j) \text{ et } i < j \Leftrightarrow (i,j) \in E}$$

Intervalles communs et graphes de permutation

Un graphe de permutation $G = (V, E)$ est le graphe d'intersection d'un ensemble de segments entre deux droites parallèles



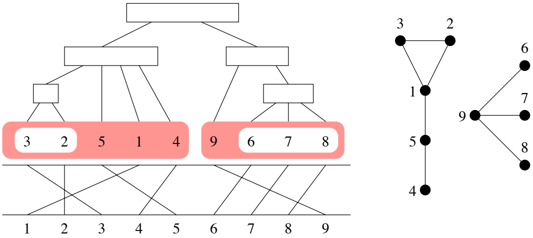


$$\boxed{\exists \pi \in \mathcal{S}_n : \pi(i) > \pi(j) \text{ et } i < j \Leftrightarrow (i,j) \in E}$$

Théorème : L'ensemble des intervalles forts d'une permutation π est l'ensemble des modules forts du graphe de permutation $G(\pi, \mathbb{I}_n)$

Intervalles communs et graphes de permutation

Un graphe de permutation $G = (V, E)$ est le graphe d'intersection d'un ensemble de segments entre deux droites parallèles



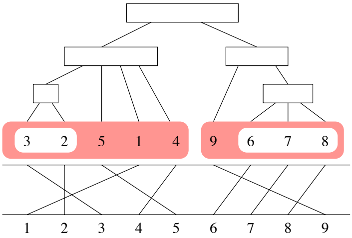
$$\boxed{\exists \pi \in \mathcal{S}_n : \pi(i) > \pi(j) \text{ et } i < j \Leftrightarrow (i,j) \in E}$$

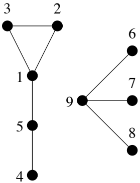
Remarques :

- $\{6, 8\}$ est un module de $G(\pi, \mathbb{I}_n)$ mais pas un intervalle commun de π

Intervalles communs et graphes de permutation

Un graphe de permutation $G = (V, E)$ est le graphe d'intersection d'un ensemble de segments entre deux droites parallèles





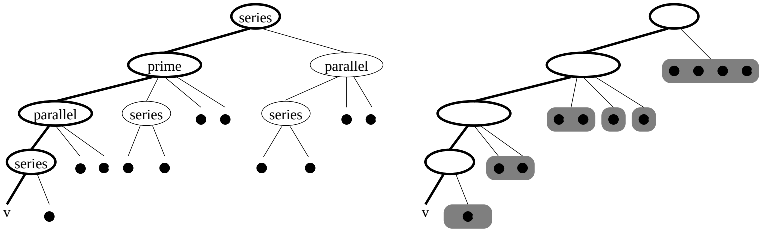
$$\boxed{\exists \pi \in \mathcal{S}_n : \pi(i) > \pi(j) \text{ et } i < j \Leftrightarrow (i, j) \in E}$$

Remarques :

- Les graphes de permutation et leurs complémentaires sont des graphes de comparabilité

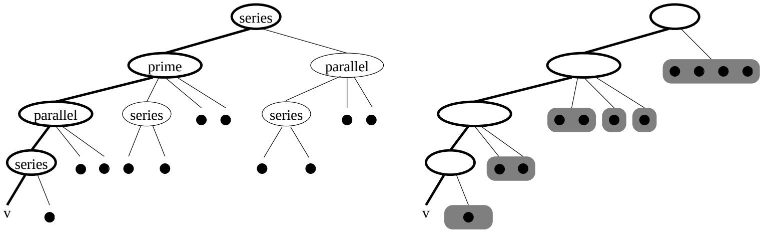
Algorithme de Erhenfeucht et al.

$\mathcal{M}(G, v)$ est composé $\{v\}$ et des modules maximaux de G ne contenant pas v.



Algorithme de Erhenfeucht et al.

$\mathcal{M}(G, v)$ est composé $\{v\}$ et des modules maximaux de G ne contenant pas v.



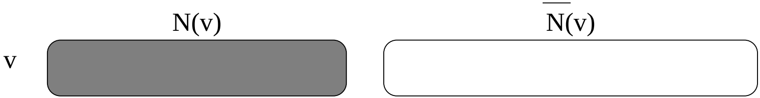
Principe de l'algorithme de Ehrenfeucht et al.

1. Calculer $\mathcal{M}(G, v)$
2. Calculer $MD(G_{/\mathcal{M}(G,v)})$
3. Pour chaque $\mathcal{X} \in \mathcal{M}(G, v)$ calculer $MD(G[\mathcal{X}])$

Affinage de partition

Calcul de $\mathcal{M}(G, v)$

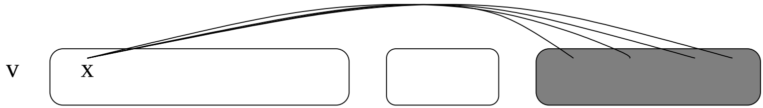
$\Rightarrow O(n + m \log n)$ avec l'affinage de partition.



Affinage de partition

Calcul de $\mathcal{M}(G, v)$

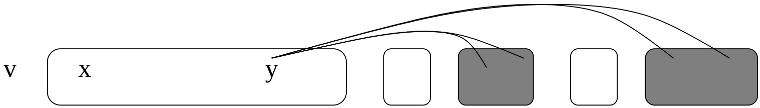
$\Rightarrow$ $O(n + m \log n)$ avec l'affinage de partition.



Affinage de partition

Calcul de $\mathcal{M}(G, v)$

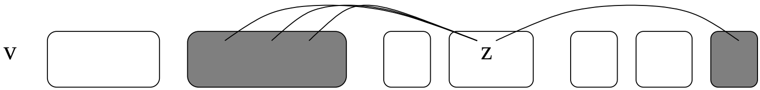
$\Rightarrow$ $O(n + m \log n)$ avec l'affinage de partition.



Affinage de partition

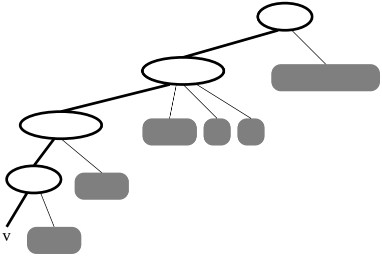
Calcul de $\mathcal{M}(G, v)$

$\Rightarrow O(n + m \log n)$ avec l'affinage de partition.



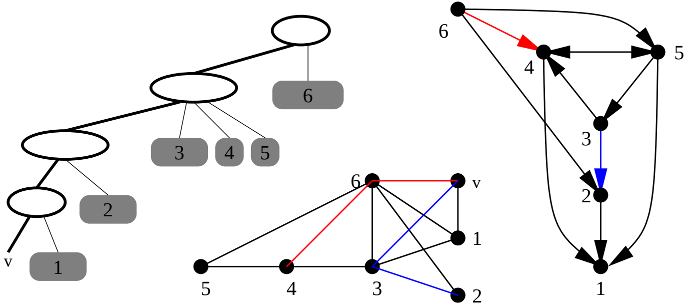
Calcul de $MD(G_{/\mathcal{M}(G,v)})$

- Les modules de $G_{/\mathcal{M}(G,v)}$ sont emboités:
  tout module non-trivial contient v



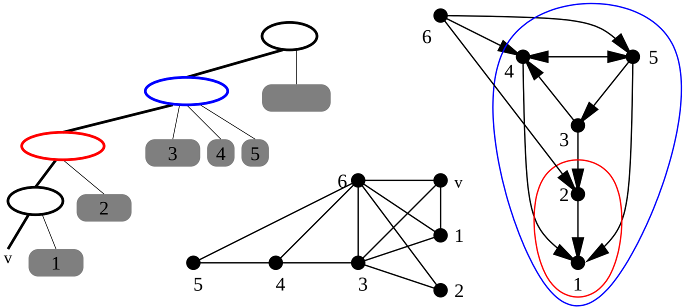
Calcul de $MD(G_{/\mathcal{M}(G,v)})$

- Les modules de $G_{/\mathcal{M}(G,v)}$ sont emboités:
  tout module non-trivial contient v
- Le graphe de forçage $\mathcal{F}(G,v)$ possède l'arc $\overrightarrow{xy}$ ssi y sépare x de v



Calcul de $MD(G_{/\mathcal{M}(G,v)})$

- Les modules de $G_{/\mathcal{M}(G,v)}$ sont emboités:
  tout module non-trivial contient v
- Le graphe de forçage $\mathcal{F}(G,v)$ possède l'arc $\overrightarrow{xy}$ ssi y sépare x de v



Un peu d'histoire

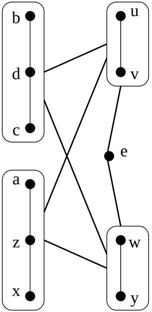
Complexité

- [Ehrenfeucht et al.'94] proposent un algorithme en temps $O(n^2)$.
- [MS00] propose un algorithme simple en temps $O(n + m \log n)$ basé sur l'affinage de partition.
- [DGM'01] propose un algorithme en temps $O(n + m.\alpha(n, m))$ et un autre en temps $O(n + m)$, mais plus compliqué.

Autres algorithmes

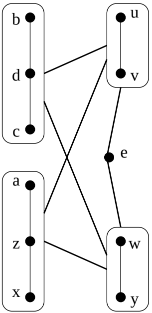
- [CH94] et [MS94] proposent les premiers algorithmes linéaires.
- [MS99] permet de calculer une orientation transitive d'un graphe si elle existe.
- [TCHP08] proposent un algorithme linéaire plus simple.

Parcours en largeur lexicographique



x   y w z u v   a d c b e

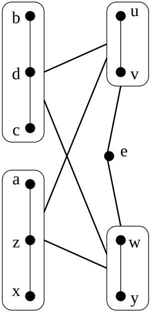
Parcours en largeur lexicographique



x | y w z u v | a d c b e

x | y | w z | u v | a d c b e

Parcours en largeur lexicographique

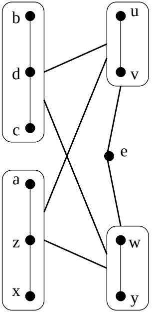


x y w z u v a d c b e

x y w z u v a d c b e

x y w z u v a d c b e

Parcours en largeur lexicographique



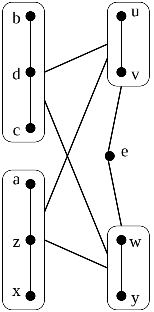
x y w z u v a d c b e

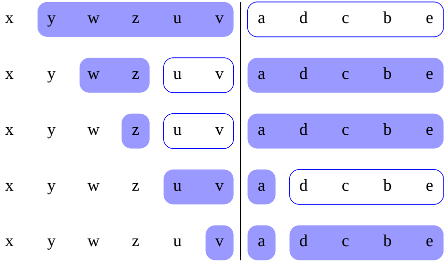
x y w z u v a d c b e

x y w z u v a d c b e

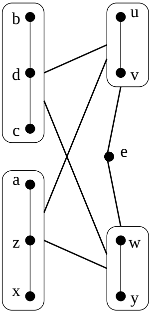
x y w z u v a d c b e

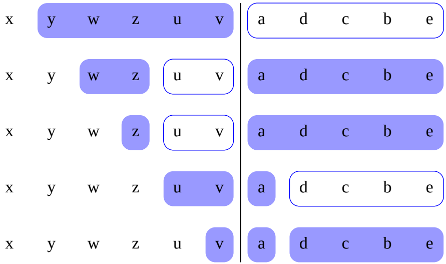
Parcours en largeur lexicographique





Parcours en largeur lexicographique

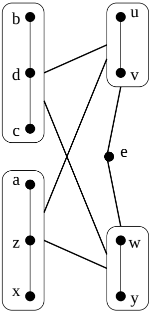




Soit σ un ordre LexBFS.

Un slice de σ est un intervalle $S = \{v \mid i \leqslant \sigma(v) \leqslant j\}$ de σ tel que $\forall v \in S, N_i(v) = N_i(\sigma^{-1}(i))$ et $\forall u : j < \sigma(u), N_i(u) = N_i(\sigma^{-1}(i))$

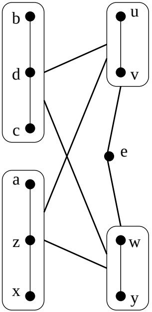
Parcours en largeur lexicographique

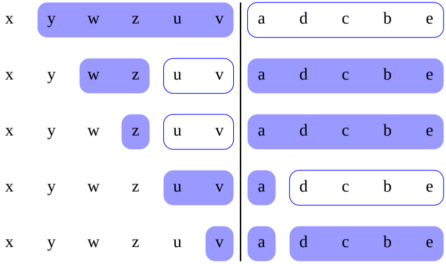


x	y	w	z	u	v	|	a	d	c	b	e
x	y	w	z	u	v	|	a	d	c	b	e
x	y	w	z	u	v	|	a	d	c	b	e
x	y	w	z	u	v	|	a	d	c	b	e
x	y	w	z	u	v	|	a	d	c	b	e

Lemme [Corneil, Olariu, Stewart]
Soit S un slice d'un ordre LexBFS σ du graphe G, alors l'ordre σ restreint à S, noté $\sigma[S]$ est un ordre LexBFS de $G[S]$.

Parcours en largeur lexicographique



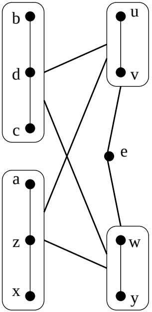


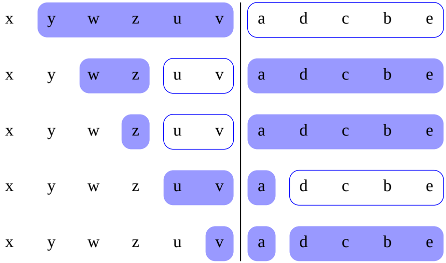
Questions

Quelle est la complexité de LexBFS ?

Comment calculer un ordre LexBFS de $\overline{G}$ étant donné G ?

Parcours en largeur lexicographique





Soit σ un ordre LexBFS. Alors $\forall x \in V$:

- le slice maximal $S(x)$ dont le premier sommet est x;
- $S^A(x)$, le slice $S(x) \cap N(x)$ de σ;
- $S^N(x) = S(x) \cap \overline{N}(x)$ et $S_1(x), \ldots, S_k(x)$ les slices maximaux contenus dans $S^N(x)$.

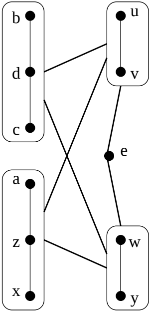
Reconnaissance des cographes

Algorithme de reconnaissance [BCHP03]

1. $\sigma \leftarrow \text{LexBFS}(G)$
2. $\overline{\sigma} \leftarrow \text{LexBFS}^{-}(\overline{G}, \sigma)$
3. **Si** σ et $\overline{\sigma}$ vérifie la propriété d'inclusion des voisinages **alors**
   3.1 Retourner "G est un cographe"
   3.2 Construire $MD(G)$
4. **Sinon** Trouver un P_4

Reconnaissance des cographes

Calcul d'un ordre $\overline{\sigma}$=LexBFS$^{-}(\overline{G}, \sigma)$

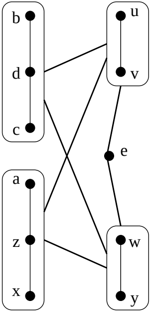


x | y w z u v | a | d c b e

x | a d c b e | y w z u v

Reconnaissance des cographes

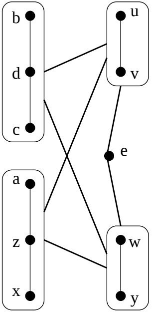
Calcul d'un ordre $\overline{\sigma}$=LexBFS$^{-}(\overline{G}, \sigma)$



x	y	w	z	u	v	a	d	c	b	e
x	a	d	c	b	e	y	w	z	u	v
x	a	d	c	b	e	y	w	z	u	v

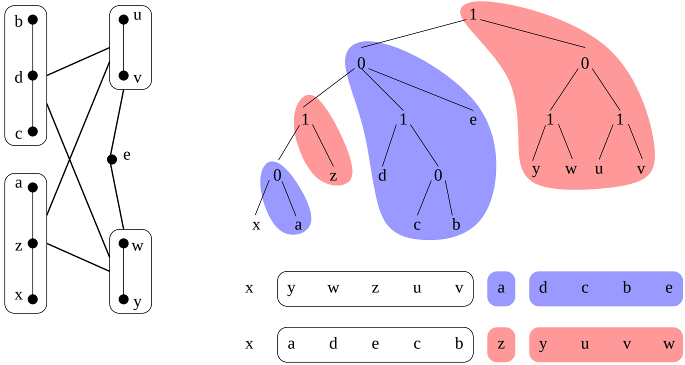
Reconnaissance des cographes

Calcul d'un ordre $\overline{\sigma}$=LexBFS$^-(\overline{G}, \sigma)$



x	y	w	z	u	v	a	d	c	b	e	
x	a	d	c	b	e	y	w	z	u	v	
x	a	d	c	b	e	y	w	z	u	v	
x	a	d	e	c	b	z	y	w	u	v	

Reconnaissance des cographes



$\mathcal{M}(G,x)$ est composé des slices $S_i(x)$ de σ et $\overline{S_j}(x)$ de $\overline{\sigma}$.

Reconnaissance des cographes

Lemme

Soit σ un ordre LexBFS d'un cographe G. Alors pour tout sommet v et tout $i < j$:

1. $\forall x \in S_i(v),\ \forall y \in S_j(v),\ xy \notin E$ et
2. $N(S_j(v)) \subset N(S_i(v))$

Reconnaissance des cographes

Lemme

Soit σ un ordre LexBFS d'un cographe G. Alors pour tout sommet v et tout $i < j$:

1. $\forall x \in S_i(v)$, $\forall y \in S_j(v)$, $xy \notin E$ et
2. $N(S_j(v)) \subset N(S_i(v))$

$\Rightarrow$ Si v est le premier sommet de σ, alors tout slice $S_i(v)$ est un module de $\mathcal{M}(G, v)$.

Reconnaissance des cographes

Lemme

Soit σ un ordre LexBFS d'un cographe G. Alors pour tout sommet v et tout $i < j$:

1. $\forall x \in S_i(v),\ \forall y \in S_j(v),\ xy \notin E$ et
2. $N(S_j(v)) \subset N(S_i(v))$

$\Rightarrow$ Si v est le premier sommet de σ, alors tout slice $S_i(v)$ est un module de $\mathcal{M}(G, v)$.

Définition

Un ordre LexBFS σ d'un graphe $G = (V, E)$ satisfait la propriété d'inclusion des voisinages ssi

$$\forall x \in V,\ \forall i < j,\ N^l(S_j(x)) \subset N^l(S_i(x))$$

avec $N^l(S_i(x)) = N(S_i(x)) \cap S(x)$

Reconnaissance des cographes

Théorème [BCHP03]

Soit σ un ordre LexBFS d'un graphe $G = (V, E)$. Alors G est un cographe ssi

σ et $\overline{\sigma} = \text{LexBFS}^{-}(\overline{G}, \sigma)$ vérifient la propriété d'inclusion des voisinages (dans G et $\overline{G}$ respectivement).

Reconnaissance des cographes

Théorème [BCHP03]
Soit σ un ordre LexBFS d'un graphe $G = (V, E)$. Alors G est un cographe ssi
σ et $\overline{\sigma} = \text{LexBFS}^{-}(\overline{G}, \sigma)$ vérifient la propriété d'inclusion des voisinages (dans G et $\overline{G}$ respectivement).

Théorème [CPS85,BCHP03]
Le problème de la reconnaissance des cographes peut être résolu en temps linéaire.