Algorithmes Combinatoires (2)

Décomposition en coupes - familles bipartitives

Christophe PAUL
(CNRS - LIRMM)

November 19, 2009

Familles bipartitives

- Familles des coupes (splits)
- Théorème de représentation

Décomposition en coupes (splits)

- Graph Labeled Trees (GLT)
- Graphes totalement décomposables
- Algorithme incrémental de décomposition en split

Graphes de cercles

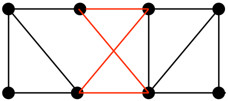
- Décomposition en coupe des graphes de cercle

Décomposition et largeur de rang

Coupes (splits)

Une bipartition (A, B) des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une coupe (split) ssi

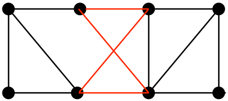
- $|A| \geqslant 2$, $|B| \geqslant 2$;
- pour $x \in A$ et $y \in B$, $xy \in E$ ssi $x \in N(B)$ et $y \in N(A)$.



Coupes (splits)

Une bipartition (A, B) des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une coupe (split) ssi

- $|A| \geqslant 2$, $|B| \geqslant 2$;
- pour $x \in A$ et $y \in B$, $xy \in E$ ssi $x \in N(B)$ et $y \in N(A)$.



Exemples de splits

- toute bipartition non-triviale de la clique
- toute bipartition non-triviale de $K_{1,n}$

Familles bipartitive

Théorème

La famille des splits d'un graphe est une famille bipartitive : si (A_1, A_2) et (B_1, B_1) sont deux splits tels que A_1 et B_1 se chevauchent, alors

- $(A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2)$ est un split;

Familles bipartitive

Théorème

La famille des splits d'un graphe est une famille bipartitive :
si (A_1, A_2) et (B_1, B_1) sont deux splits tels que A_1 et B_1 se chevauchent, alors

- $(A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2)$ est un split;
- $(A_1 \cap B_2, A_1 \cup B_1)$, $(A_2 \cap B_1, A_1 \cup B_2)$, $(A_2 \cap B_2, A_1 \cup B_1)$ sont des splits;

Familles bipartitive

Théorème

La famille des splits d'un graphe est une famille bipartitive :
si (A_1, A_2) et (B_1, B_1) sont deux splits tels que A_1 et B_1 se chevauchent, alors

- $(A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2)$ est un split;
- $(A_1 \cap B_2, A_1 \cup B_1)$, $(A_2 \cap B_1, A_1 \cup B_2)$, $(A_2 \cap B_2, A_1 \cup B_1)$ sont des splits;
- $(A_1 \bigtriangleup B_1, A_1 \bigtriangleup B_2)$ est un split.

Familles bipartitive

Théorème

La famille des splits d'un graphe est une famille bipartitive :
si (A_1, A_2) et (B_1, B_1) sont deux splits tels que A_1 et B_1 se chevauchent, alors

- $(A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2)$ est un split;
- $(A_1 \cap B_2, A_1 \cup B_1)$, $(A_2 \cap B_1, A_1 \cup B_2)$, $(A_2 \cap B_2, A_1 \cup B_1)$ sont des splits;
- $(A_1 \triangle B_1, A_1 \triangle B_2)$ est un split.

Une bipartition (A_1, A_2) est forte si elle ne chevauche aucune autre bipartition de la famille.

Représentation arborée

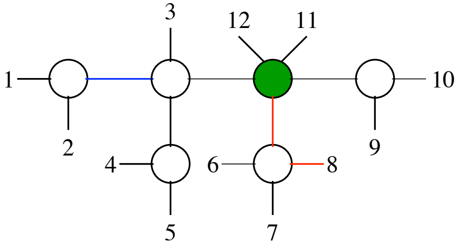
Théorème Soit $\mathcal{F}$ une famille bipartitive sur l'ensemble X. Il existe un arbre T tel que

- les feuilles de T sont en bijection avec X
- les arêtes de T sont en bijection avec les bipartitions fortes

Représentation arborée

Théorème Soit $\mathcal{F}$ une famille bipartitive sur l'ensemble X. Il existe un arbre T tel que

- les feuilles de T sont en bijection avec X
- les arêtes de T sont en bijection avec les bipartitions fortes

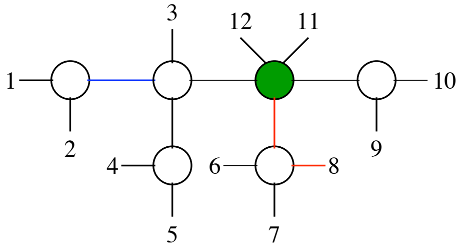


$$\mathcal{F} = \{(\{1,2\},-), (\{1,2,3\},-), (\{3,4,5\},-), (\{1,2,4,5\},-), (\{1,2,3,4,5\},-), (\{6,7\},-), (\{7,8\},-), (\{6,8\},-), (\{6,7,8\},-), (\{9,10\},-)\}$$

Représentation arborée

Théorème Soit $\mathcal{F}$ une famille bipartitive sur l'ensemble X. Il existe un arbre T tel que

- les feuilles de T sont en bijection avec X
- les arêtes de T sont en bijection avec les bipartitions fortes

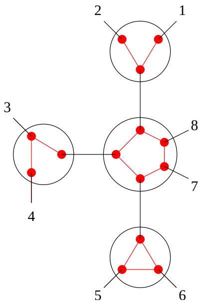


Il est possible d'étiqueter les nœuds de T premier ou dégénéré tq :

- pour toute bipartition (A_1, A_2) non-forte, il existe un nœud dégénéré u de T tel que $A_1 = \bigcup_{v \in C} L(T_v)$ pour $C \subset N_T(u)$.

Graph-labeled trees (GLT)

- une paire $(T, \mathcal{F})$, où T un arbre et $\mathcal{F}$ un ensemble de graphes
- chaque nœud v de T tq $d(v) = k$ est étiqueté par un graphe $G_v \in \mathcal{F}$ tq $|V(G_v)| = k$
- il y a une bijection ρ_v entre les arêtes de T incidentes à v et les sommets de G_v ($\rightarrow$ sommets marqueurs)



Graphe d'accessibilité d'un GLT

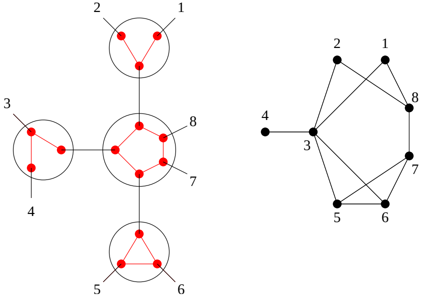
Le graphe d'accessibilité $G_S(T, \mathcal{F})$ d'un GLT $(T, \mathcal{F})$, est le graphe dont les sommets sont les feuilles de T et les arêtes sont :

- $xy \in E(G_S(T, \mathcal{F}))$ ssi $\rho_v(uv)\rho_v(vw) \in E(G_v)$, $\forall$ arête uv, vw du chemin entre x et y dans T

Graphe d'accessibilité d'un GLT

Le graphe d'accessibilité $G_S(T,\mathcal{F})$ d'un GLT $(T,\mathcal{F})$, est le graphe dont les sommets sont les feuilles de T et les arêtes sont :

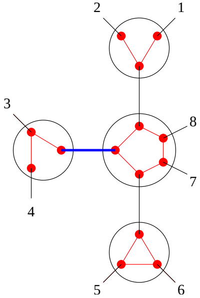
- $xy \in E(G_S(T,\mathcal{F}))$ ssi $\rho_v(uv)\rho_v(vw) \in E(G_v)$, $\forall$ arête uv, vw du chemin entre x et y dans T

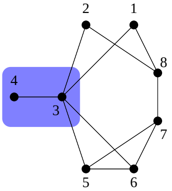


Graphe d'accessibilité d'un GLT

Le graphe d'accessibilité $G_S(T,\mathcal{F})$ d'un GLT $(T,\mathcal{F})$, est le graphe dont les sommets sont les feuilles de T et les arêtes sont :

- $xy \in E(G_S(T,\mathcal{F}))$ ssi $\rho_v(uv)\rho_v(vw) \in E(G_v)$, $\forall$ arête uv, vw du chemin entre x et y dans T



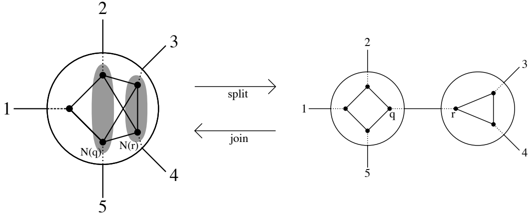


Lemme Toute arête uv de T définit une coupe de $G_S(T,\mathcal{F})$.

Graphe d'accessibilité d'un GLT

Le graphe d'accessibilité $G_S(T,\mathcal{F})$ d'un GLT $(T,\mathcal{F})$, est le graphe dont les sommets sont les feuilles de T et les arêtes sont :

- $xy \in E(G_S(T,\mathcal{F}))$ ssi $\rho_v(uv)\rho_v(vw) \in E(G_v)$,
  $\forall$ arête uv, vw du chemin entre x et y dans T



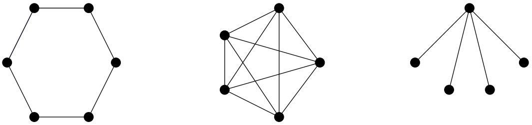
Lemme Toute arête uv de T définit une coupe de $G_S(T,\mathcal{F})$.

Théorème de décomposition en coupes

Théorème [Cunnigham'82]

Pour tout graphe connexe G, il existe un unique GLT $(T, \mathcal{F})$ ayant un minimum de nœuds tq

1. $G = G_S(T, \mathcal{F})$,
2. tout graphe de $\mathcal{F}$ est premier ou dégénéré pour la décomposition en split



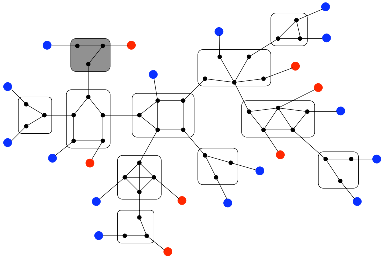
Prime Degenerate

Théorème de décomposition en coupes

Théorème [Cunnigham'82]

Pour tout graphe connexe G, il existe un unique GLT $(T, \mathcal{F})$ ayant un minimum de nœuds tq

1. $G = G_S(T, \mathcal{F})$,
2. tout graphe de $\mathcal{F}$ est premier ou dégénéré pour la décomposition en split



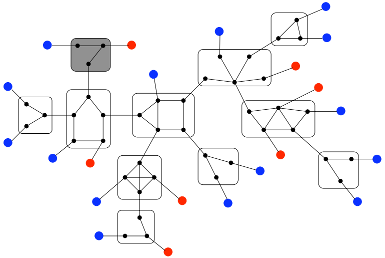
→ Ce GLT, noté $(T, \mathcal{F}) = ST(G)$, est appelé split tree

Théorème de décomposition en coupes

Théorème [Cunnigham'82]

Pour tout graphe connexe G, il existe un unique GLT $(T, \mathcal{F})$ ayant un minimum de nœuds tq

1. $G = G_S(T, \mathcal{F})$,
2. tout graphe de $\mathcal{F}$ est premier ou dégénéré pour la décomposition en split



$\rightarrow$ Ce GLT, noté $(T, \mathcal{F}) = ST(G)$, est appelé split tree

Remarque : Tout split de G est représenté soit par une arête de $ST(G)$ ou par une union d'arête incidente à un nœud dégénéré.

Graphes totalement décomposables

Théorème

Un graphe G est totalement décomposable pour la décomposition en split ssi

- $ST(G)$ ne contient que des nœuds dégénérés (clique ou star)
- G est distance héréditaire
- G admet un ordre d'élimination des sommets vrai/faux jumeaux et pendants
- G ne contient pas de trou, de diamand, de maison comme sous-graphe induit

Graphes totalement décomposables

Théorème

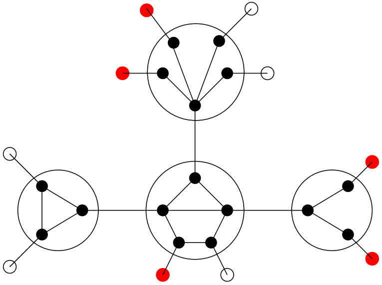
Un graphe G est totalement décomposable pour la décomposition en split ssi

- $ST(G)$ ne contient que des nœuds dégénérés (clique ou star)
- G est distance héréditaire
- G admet un ordre d'élimination des sommets vrai/faux jumeaux et pendants
- G ne contient pas de trou, de diamand, de maison comme sous-graphe induit

$\longrightarrow$ nombreux algorithmes de reconnaissance en temps linéaire

Caractérisation incrémentale du split-tree

Un sommet x est ajouté au graphe $G = (V, E)$ avec pour voisinage $S \subseteq V$. (S est en rouge)

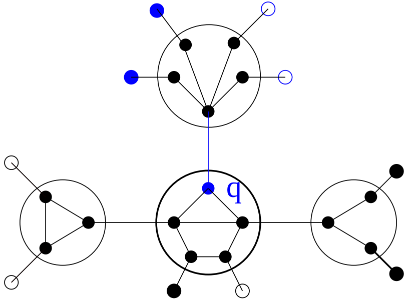


- Comment calculer le split-tree $ST(G + (x, S))$ depuis $ST(G)$?

Caractérisation incrémentale du split-tree

Etat des sommets marqueurs

Soit q un sommet marqueur (ou une feuille)
Soit $L(q)$ l'ensemble des feuilles l tq le chemin de l à q contient l'arête de T incidente à q.

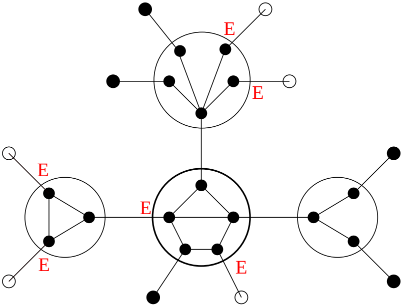


Caractérisation incrémentale du split-tree

Etat des sommets marqueurs

Soit q un sommet marqueur (ou une feuille)
Soit $L(q)$ l'ensemble des feuilles l tq le chemin de l à q contient l'arête de T incidente à q.

- q est vide si $L(q) \cap S = \emptyset$

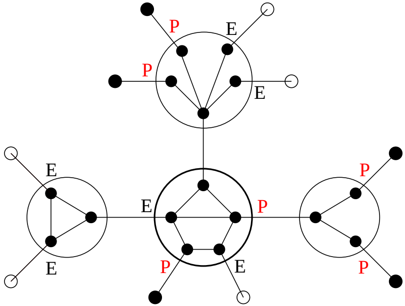


Caractérisation incrémentale du split-tree

Etat des sommets marqueurs

Soit q un sommet marqueur (ou une feuille)
Soit $L(q)$ l'ensemble des feuilles l tq le chemin de l à q contient l'arête de T incidente à q.

- q est vide si $L(q) \cap S = \emptyset$
- q est parfait si $L(q) \cap S = Accessible(q)$

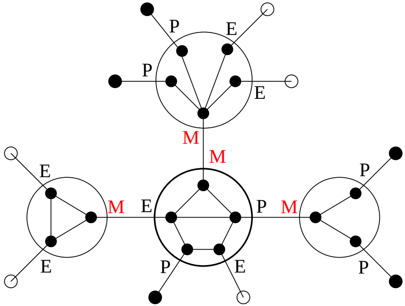


Caractérisation incrémentale du split-tree

Etat des sommets marqueurs

Soit q un sommet marqueur (ou une feuille)
Soit $L(q)$ l'ensemble des feuilles l tq le chemin de l à q contient l'arête de T incidente à q.

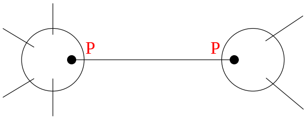
- q est vide si $L(q) \cap S = \emptyset$
- q est parfait si $L(q) \cap S = Accessible(q)$
- q est mixte sinon



Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

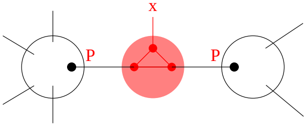
- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites



Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

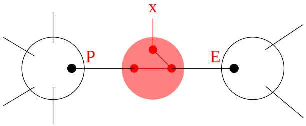
- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites



Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites
- 2 - T possède un arête e, dont une extrémité est parfaite et l'autre vide

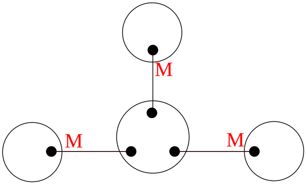


Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites
- 2 - T possède un arête e, dont une extrémité est parfaite et l'autre vide
- 3 - T possède un nœud totalement-mixte u

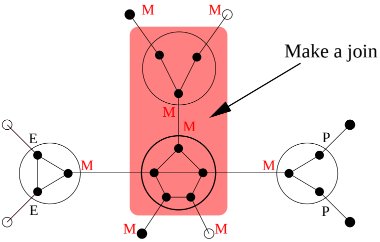
tout sommet marqueur voisin de u est mixte



Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

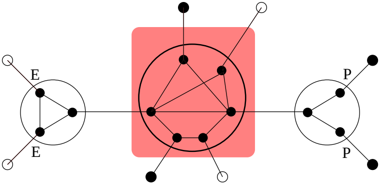
- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites
- 2 - T possède un arête e, dont une extrémité est parfaite et l'autre vide
- 3 - T possède un nœud totalement-mixte u (l'ensembe des nœuds totallement-mixtes forme un sous-arbre de T)



Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

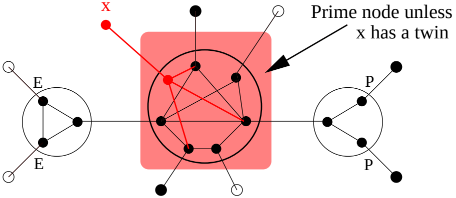
- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites
- 2 - T possède un arête e, dont une extrémité est parfaite et l'autre vide
- 3 - T possède un nœud totalement-mixte u (l'ensembe des nœuds totallement-mixtes forme un sous-arbre de T)



Caractérisation incrémentale du split-tree

Le split-tree de $G + (x, S)$ est obtenu à partir de $ST(G)$ selon 3 cas :

- 1 - T possède un arête e dont les extremités sont parfaites
- 2 - T possède un arête e, dont une extrémité est parfaite et l'autre vide
- 3 - T possède un nœud totalement-mixte u (l'ensembe des nœuds totallement-mixtes forme un sous-arbre de T)



Caractérisation incrémentale du split-tree

Théorème: La complexité de l'algorithme incrémental de split-decomposition est

$$O((n+m)\alpha(n,m))$$

Ingrédients pour l'analyse de complexité

- ajout des sommets selon un ordre LexBFS
- analyse fine de complexité amortie basée sur une technique de déchargement

Résultats connus

- [Cunningham 1982] $O(nm)$
- [Ma, Spinrad 1994] $O(n^2)$
- [Dahlhaus 2000] $O(n+m)$ (difficile !)
- [Charbit, De Montgolfier, Raffinot 2009] $O(n+m)$

Familles bipartitives

- Familles des coupes (splits)
- Théorème de représentation

Décomposition en coupes (splits)

- Graph Labeled Trees (GLT)
- Graphes totalement décomposables
- Algorithme incrémental de décomposition en split

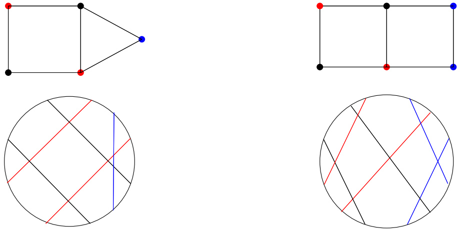
Graphes de cercles

- Décomposition en coupe des graphes de cercle

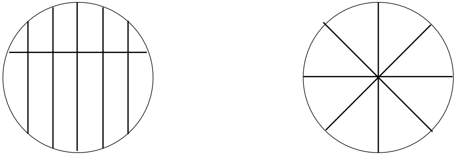
Décomposition et largeur de rang

Graphes de cercle

- Un graphe est un graphe de cercle ssi c'est le graphe d'intersection de cordes dans un cercle.

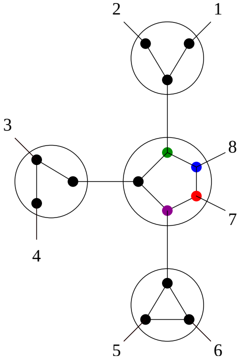


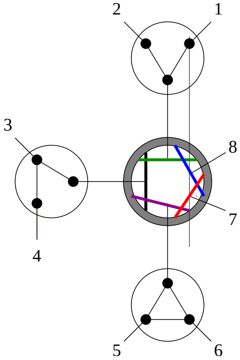
Question : Quels sont ces graphes ?



Graphes de cercle

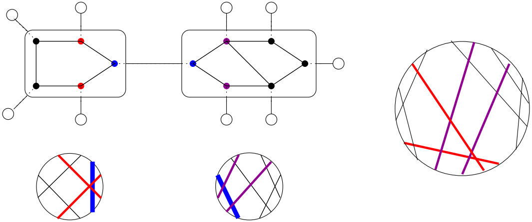
- Un graphe est un graphe de cercle ssi c'est le graphe d'intersection de cordes dans un cercle.
- Un graphe est un graphe de circle ssi tous les nœuds premiers de son split-tree sont des graphes de cercle





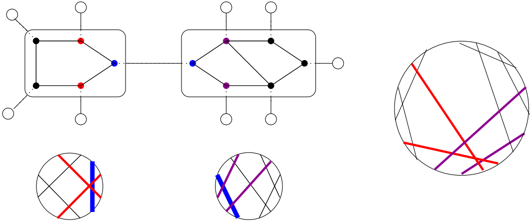
Graphes de cercle

- Un graphe est un graphe de cercle ssi c'est le graphe d'intersection de cordes dans un cercle.
- Un graphe est un graphe de circle ssi tous les nœuds premiers de son split-tree sont des graphes de cercle
- Un graphe de cercle est premier ssi il possède un unique diagramme de corde (à miroir près)



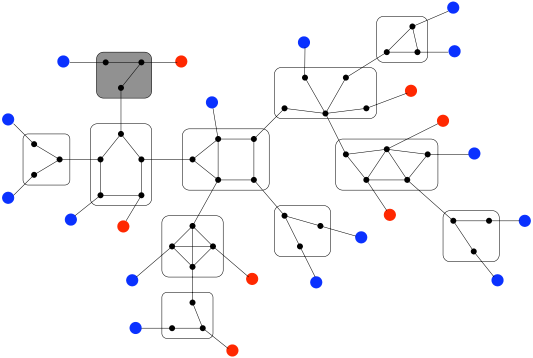
Graphes de cercle

- Un graphe est un graphe de cercle ssi c'est le graphe d'intersection de cordes dans un cercle.
- Un graphe est un graphe de circle ssi tous les nœuds premiers de son split-tree sont des graphes de cercle
- Un graphe de cercle est premier ssi il possède un unique diagramme de corde (à miroir près)



Graphes de cercle et décomposition en coupes

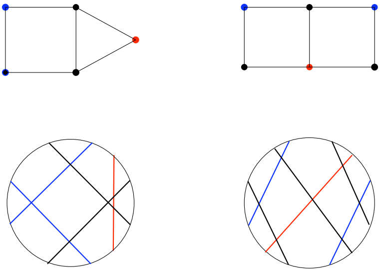
Question : est-ce que le graphe correspondant est un graphe de cercle ?



Reconnaissance des graphes de cercle

Sommet - corde extrême

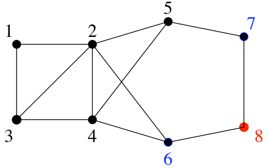
Un sommet x est extrême si sa corde $c(x)$ coupe le diagramme de sorte que les cordes de tous les non-voisins de x sont soit toutes à droite ou toutes à gauche de $c(x)$.

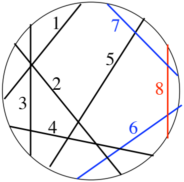


Reconnaissance des graphes de cercle

Premier Lemme LexBFS

Soient G un graphe decercle et σ un ordre LexBFS de G terminant en x. Alors il existe un diagramme de cordes pour G dans lequel $c(x)$ est extrême.

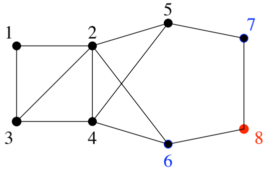


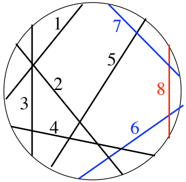


Reconnaissance des graphes de cercle

Premier Lemme LexBFS

Soient G un graphe decercle et σ un ordre LexBFS de G terminant en x. Alors il existe un diagramme de cordes pour G dans lequel $c(x)$ est extrême.



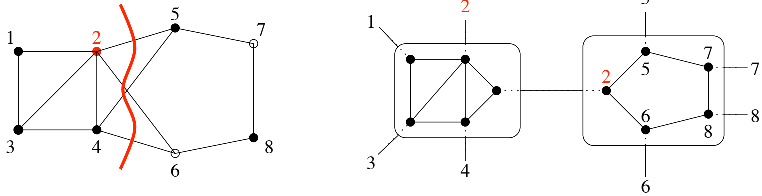


- Conséquence: en temps constant, nous savons où insérer $c(x)$ dans un diagramme de cordes de G.
- Mais beaucoup de diagrammes sont possibles, ssauf si G est premier.

Reconnaissance des graphes de cercle

Un second Lemme LexBFS

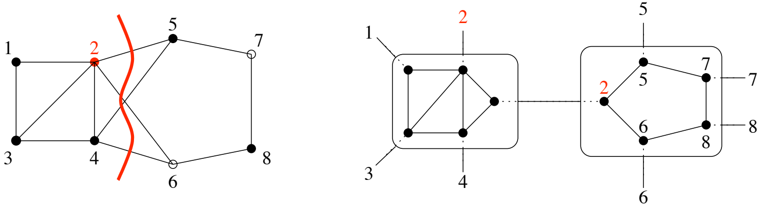
Soit σ un ordre LexBFS de $G = G_S(T, \mathcal{F})$. L'ordre σ_u *"induit"* par les sommets marqueurs de G_u est un ordre LexBFS.



Reconnaissance des graphes de cercle

Un second Lemme LexBFS

Soit σ un ordre LexBFS de $G = G_S(T, \mathcal{F})$. L'ordre σ_u *"induit"* par les sommets marqueurs de G_u est un ordre LexBFS.

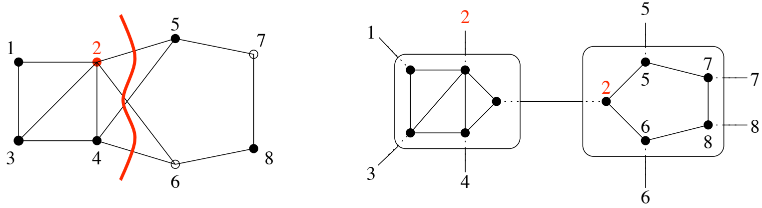


- conséquence: il est possible d'appliquer le lemme précédent sur les nœuds du split-tree.

Reconnaissance des graphes de cercle

Un second Lemme LexBFS

Soit σ un ordre LexBFS de $G = G_S(T, \mathcal{F})$. L'ordre σ_u *"induit"* par les sommets marqueurs de G_u est un ordre LexBFS.



- conséquence: il est possible d'appliquer le lemme précédent sur les nœuds du split-tree.
- Que reste-t-il à faire ?
  Effectuer les opérations de join nécéssaires sur les nœuds totalement mixtes.

Reconnaissance des graphes de cercle

1. Insertion des sommets selon un ordre LexBFS.
2. Maintien du split-tree en représentant les nœuds premiers par leur diagramme de corde.
3. Faire les opréations de join sur les diagrammes des nœuds totalement mixtes en utilisant les lemmes LexBFS.
   $\Rightarrow$ nécessite quelques astuces pour manipuler la représentation des diagrammes

Reconnaissance des graphes de cercle

1. Insertion des sommets selon un ordre LexBFS.
2. Maintien du split-tree en représentant les nœuds premiers par leur diagramme de corde.
3. Faire les opréations de join sur les diagrammes des nœuds totalement mixtes en utilisant les lemmes LexBFS.
   $\Rightarrow$ nécessite quelques astuces pour manipuler la représentation des diagrammes

Théorème :
La reconnaissance des graphes de cercle est résolue en temps

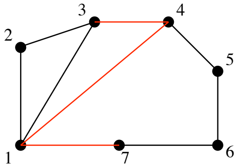
$$O((n+m)\alpha(n,m))$$

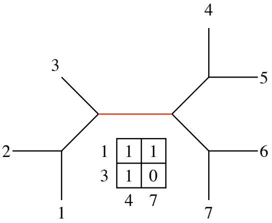
$\rightarrow$ Complexité connue : $O(n^2)$ [Spinrad, J. of Alg. (16), 1994]

- Familles bipartitives
  - Familles des coupes (splits)
  - Théorème de représentation
- Décomposition en coupes (splits)
  - Graph Labeled Trees (GLT)
  - Graphes totalement décomposables
  - Algorithme incrémental de décomposition en split
- Graphes de cercles
  - Décomposition en coupe des graphes de cercle
- Décomposition et largeur de rang

Largeur de rang

Soient $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre ternaire dont les feuilles sont en bijection avec V

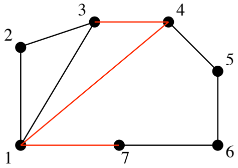


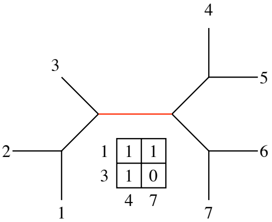


- Chaque arête e de T définit une bipartition (A, B) de V

Largeur de rang

Soient $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre ternaire dont les feuilles sont en bijection avec V

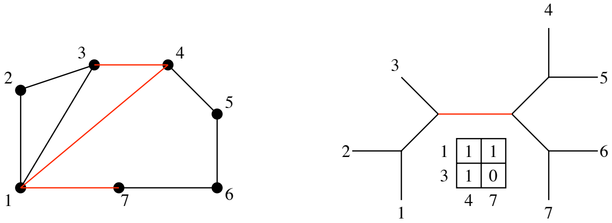




- Chaque arête e de T définit une bipartition (A, B) de V
- Largeur de e : $rk(e) = rk(A \times B)$

Largeur de rang

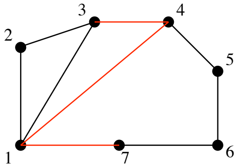
Soient $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre ternaire dont les feuilles sont en bijection avec V

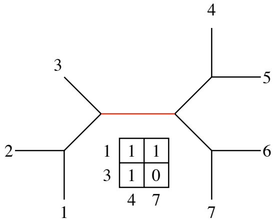


- Chaque arête e de T définit une bipartition (A, B) de V
- Largeur de e : $rk(e) = rk(A \times B)$
- Largeur de T : $rk(T) = \max_{e \in T} rk(e)$

Largeur de rang

Soient $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre ternaire dont les feuilles sont en bijection avec V





- Chaque arête e de T définit une bipartition (A, B) de V
- Largeur de e : $rk(e) = rk(A \times B)$
- Largeur de T : $rk(T) = \max_{e \in T} rk(e)$

- Largeur de G : $\boxed{rw(G) = \min_T rk(T)}$

Largeur de rang

Lemme

Soit $ST(G)$ le split-tree d'un graphe G et $\mathcal{F}$ l'ensemble des graphes (premiers) étiquetant $ST(G)$. Alors

$$rw(G) = \max_{H \in \mathcal{F}} rw(H)$$

Preuve : il suffit de montrer que la largeur d'un split est 1.

Largeur de rang

Lemme

Soit $ST(G)$ le split-tree d'un graphe G et $\mathcal{F}$ l'ensemble des graphes (premiers) étiquetant $ST(G)$. Alors

$$rw(G) = \max_{H \in \mathcal{F}} rw(H)$$

Preuve : il suffit de montrer que la largeur d'un split est 1.

Lemme

Les graphes de largeur de rang 1 sont exactement les graphes totalement décomposable par la split-decomposition

Preuve : il suffit de montrer que les cliques et les graphes $K_{1,n}$ ont une lageur de rang 1