

## TD08 – Mar-SAT-ack, un film de Stanley Cubic

On se propose dans ce TD de montrer qu'un jeu rigolo (appelé Cubic) est NP-complet.

**Définition 1 (Cubic).** Cubic est un jeu à un joueur qui se joue sur une grille de carrés. Chaque case peut être occupée par un mur, un bloc de couleur ou être vide.

Le joueur peut à chaque tour déplacer un bloc coloré d'une case vers la droite ou la gauche. Les blocs tombent sous l'effet de la gravité (selon une règle qui correspond à l'idée naturelle qu'on s'en fait). Lorsque deux blocs ou plus de la même couleur se touchent, ils disparaissent (provoquant éventuellement la chute d'autres blocs colorés...). Le but du jeu est d'éliminer tous les blocs colorés.

La figure 1 illustre une configuration initiale qui peut être gagnée.

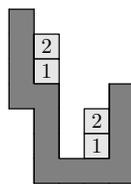


FIG. 1 – Une configuration de Cubic

Etant donnée une instance (configuration initiale) du jeu Cubic, on veut savoir si elle admet une solution. Nous allons montrer que ce problème est NP-complet.

1. Comment peut-on montrer qu'un problème est NP-complet ? (citez deux méthodes, détaillez l'une d'entre elles)
2. On se propose d'utiliser une réduction à partir de SAT. Rappeler quel est le problème SAT en l'exprimant en termes de circuits.

On va encoder une instance de SAT (un circuit) en une instance de Cubic qui admet une solution si et seulement si le circuit admet une affectation des variables qui donne une sortie VRAI. On encode les variables comme indiqué sur la figure 2 et la sortie comme indiqué sur la figure 3.

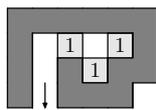


FIG. 2 – Une variable

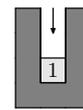


FIG. 3 – Le bout d'un fil

3. Expliquer comment fonctionne cet encodage. Quels autres gadgets doit-on faire pour finir la preuve ?
4. La figure 4 illustre une porte AND. Vérifier son fonctionnement.
5. Comment peut-on faire une porte NOT (beaucoup plus facile que AND, rassurez-vous) ? Et une porte XOR (plus difficile) ? Et une porte OR (il y a deux méthodes : directe et sans réfléchir ou astucieuse, élégante et très difficile) ?
6. La construction illustrée sur la figure 5 s'appelle SWITCH. Que fait-elle au juste ?

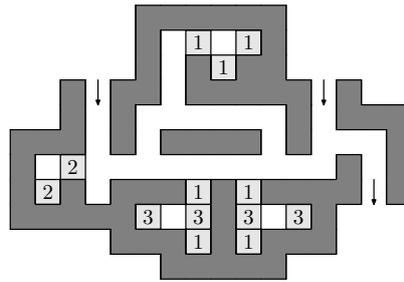


FIG. 4 – Une porte AND

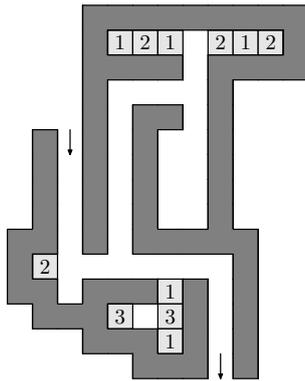


FIG. 5 – SWITCH

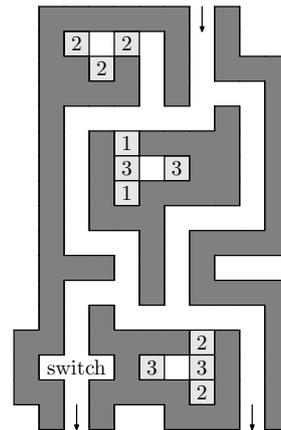


FIG. 6 – Construction mystère...

7. En utilisant la construction *SWITCH*, expliquer comment on peut encoder un croisement de fils.
8. Que fait la construction de la figure 6 ?
9. Montrer que *Cubic* est NP-complet.

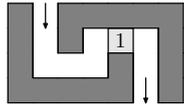


FIG. 7 – La porte NOT

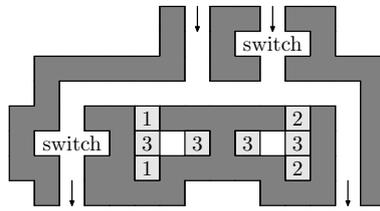


FIG. 8 – Le croisement de deux fils

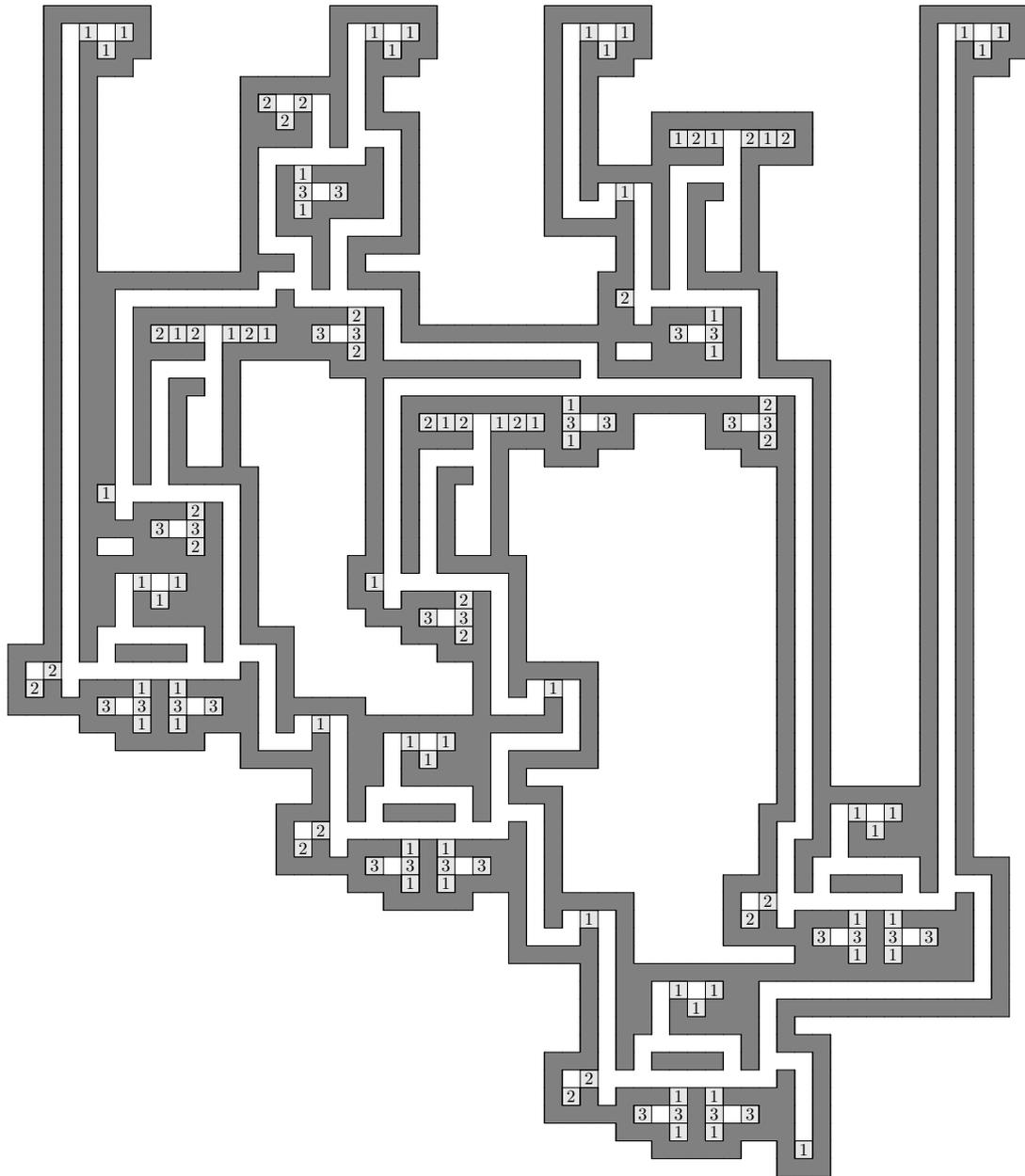


FIG. 9 – Un superbe exemple