TP n° 6 - Polynômes

Exercice 1. *Les revenantes*

1. Écrivez les fonctions suivantes (que vous devriez reconnaître) en utilisant les primitives `liste()`, `cons(x,l)`, `tete(l)`, `queue(l)` et `vide(l)` vues en cours, TD et TP (on suppose que les listes contiennent des entiers) :

- `avant_dernier(l)` qui renvoie l'avant-dernier élément de la liste `l` ;
- `ajoute(x,l)` qui ajoute `x` à chacun des éléments de `l` ;
- `multiple(l)` qui calcule le plus petit commun multiple des éléments de `l`. On pourra supposer que l'on a déjà une fonction `ppcm(a,b)` qui calcule le plus petit commun multiple de deux entiers ;
- `paire(l)` qui teste si la liste `l` ne contient que des entiers pairs ;
- `repete(n,i,l)` qui répète `n` fois l'élément de `l` en position `i`. Par exemple si `n` $= 3$, `i` $= 2$ et `l` $= 1, 2, 3, 4$, la fonction doit renvoyer la liste $1, 2, 3, 3, 3, 4$ (la numérotation des positions commence à 0) ;
- `applique(f, l1, l2)` qui applique un certain nombre de fois la fonction `f` aux éléments de `l1`. On suppose que la liste `l2` est de même longueur que `l1` et c'est elle qui donne pour chacun des éléments de `l1` le nombre de fois qu'il faut appliquer `f`. Par exemple, si `l1` $= 1, 2, 3$ et `l2` $= 2, 0, 1$, la fonction doit renvoyer la liste $f(f(1)), 2, f(3)$;
- `alterne(l)` qui teste si une liste est *alternée*, c'est-à-dire si son premier élément est plus petit que le second, que le second est plus grand que le troisième, le troisième est plus petit que le quatrième, le quatrième plus grand que le cinquième et ainsi de suite.

2. Testez vos fonctions en exécutant le code se trouvant dans le fichier `tp06_test.py` (à récupérer sur le web à côté du sujet de TP).

Exercice 2. *Polynômes*

On va s'intéresser dans cet exercice aux fonctions permettant de manipuler des polynômes à coefficients entiers ou réels (ou plus exactement *flottants*). On représente les polynômes par des listes python, la valeur à l'indice i étant le coefficient de X^i dans le polynôme.
Par exemple, le polynôme $3X^3 + 5X^2 + 4$ est représenté par la liste $[4, 0, 5, 3]$.

Remarque : On utilisera maintenant les « vraies » listes python. Par ailleurs vous pourrez choisir d'écrire les fonctions de manière itérative ou récursive selon ce qui vous paraît le plus adapté et le plus pratique.

1. Écrivez les fonctions suivantes :

- `degre(p)` qui donne le degré du polynôme `p` ;
- `addition(p1, p2)` et `soustraction(p1, p2)` qui renvoient la somme et la différence des polynômes `p1` et `p2` ;
- `scalaire(x, p)` qui renvoie le polynome `p` multiplié par l'entier `x` ;
- `monome(a, n)` qui renvoie le monôme aX^n ;
- `derive(p)` qui renvoie le polynôme dérivé de `p` ;
- `primitive(p)` qui renvoie une primitive du polynôme `p` (par exemple celle qui s'annule en 0) ;
- `multiplication(p1, p2)` qui renvoie le produit de `p1` par `p2`.

2. Écrivez la fonction `affiche(p)` qui prend en entrée une liste d'entiers et affiche (par des instructions `print`) le polynôme correspondant en traitant correctement les différents cas particuliers (X^1 et X^0 ainsi que les monômes dont le coefficient est 0 ou 1).

Indication : Il est conseillé de construire la chaîne complète à afficher (en utilisant l'opérateur +) puis de l'afficher à la fin.

3. Écrivez une fonction `eval(p, x)` qui renvoie la valeur du polynôme `p` en l'entier `x`.

On va maintenant écrire une fonction `divise(p1, p2)` qui effectue la division euclidienne de `p1` par `p2`. On rappelle que la division euclidienne d'un polynôme P_1 par un polynôme P_2 renvoie un couple de polynômes (Q, R) (appelés respectivement le *quotient* et le *reste*) tels que

$$P_1 = Q \times P_2 + R$$

et le degré de R est strictement inférieur au degré de P_2.
On rappelle l'algorithme de la division euclidienne de P_1 par P_2 :
Soient n et m les degrés respectifs de P_1 et P_2. Si $n < m$, on renvoie $(0, P_1)$. Sinon, soient a et b les deux coefficients dominants (de plus haut degré) de P_1 et P_2 respectivement, on calcule

$$(Q', R') = \text{divise}(P_1 - \frac{a}{b}X^{n-m} \times P_2, P_2)$$

et on renvoie le résultat

$$(Q, R) = (\frac{a}{b}X^{n-m} + Q', R')$$

4. Vérifiez que les relations précédentes donnent bien

$$P_1 = Q \times P_2 + R$$

5. En utilisant les fonctions de l'exercice précédent, écrivez la fonction `divise(p1, p2)`.

6. Testez votre fonction sur quelques exemples.