
TP n° 7 - Fibonacci à Hanoï

Exercice 1.*Le mot de Fibonacci*

Le mot de Fibonacci est un mot infini sur l'alphabet $\{a, b\}$, obtenu en appliquant de manière répétée la substitution suivante au mot initial « a » :

$$\sigma : \begin{cases} a & \rightarrow & ab \\ b & \rightarrow & a \end{cases}$$

On obtient ainsi successivement les mots $a, ab, aba, abaab, \dots$.

1. Montrez que chaque mot de la suite est un préfixe de son successeur. Ce résultat permet de définir le mot de Fibonacci comme étant le mot infini dont tous les termes de la suite sont un préfixe (ou encore le point fixe de la substitution).
2. Écrivez une fonction `sub_fib(s)` qui renvoie la chaîne de caractères obtenue en appliquant la substitution σ à s (on suppose que s ne contient que des a et des b).
3. Écrivez une fonction `fibonacci(n)` qui renvoie le mot obtenu en appliquant n fois la substitution σ au mot a .
4. Affichez les 10 premières itérations de la substitution. Quelle propriété remarquez-vous qui pourrait justifier le nom donné à cette substitution (en rapport avec la suite d'entiers appelée suite de Fibonacci).
5. En utilisant l'observation faite à la question précédente, réécrivez la fonction `fibonacci(n)` de manière récursive sans utiliser la substitution σ .

Exercice 2.*Les tours de Hanoï*

Les tours de Hanoï sont un jeu inventé par le mathématicien Édouard Lucas.

Le jeu est constitué de trois emplacements sur lesquels on peut empiler des disques de tailles différentes. Au départ on commence avec tous les disques empilés sur le premier emplacement du plus grand (en dessous) au plus petit. Le but du jeu est de déplacer toute la tour sur un des deux autres emplacements, en ne déplaçant qu'un seul disque à la fois, sans jamais poser un disque sur un disque plus petit que lui (si vous ne connaissez pas le jeu et que vous n'avez rien compris à l'explication, allez voir sur la page wikipedia, il y a des photos et une animation expliquant le fonctionnement).

On va écrire une fonction qui décrit les coups à jouer pour déplacer une tour de taille n sur un autre emplacement. On représente les n disques par des entiers de 1 à n (n étant le plus grand disque) et les piles qui se trouvent sur chacun des emplacements par une liste *Python* (le fond de la pile au début de la liste).

1. Copiez le contenu du fichier `tp07.py` (lien sur la page web) dans votre fichier *Python*. La variable `tours` contient les trois listes représentant les positions des disques sur chacun des emplacements (initialement tous les disques sont sur le premier emplacement). `N` est le nombre total de disques utilisés (et donc la taille du plus grand). La fonction `affiche(t)` permet de représenter à l'écran l'état des tours (elle est un peu difficile à lire donc regardez rapidement mais ne passez pas une heure à essayer de la comprendre).

Que fait la fonction `saut(i, j, t)` ? (i et j désignent des emplacements (0, 1 ou 2) dans la liste de tours `t`)

La résolution du problème des tours de Hanoï est extrêmement récursive. Si l'on sait déplacer les $(n-1)$ premiers disques d'un emplacement à un autre, pour déplacer les n disques de l'emplacement 0 à l'emplacement 1, on va déplacer les $(n-1)$ premiers disques de l'emplacement 0 à l'emplacement 2, puis déplacer le disque n sur l'emplacement 1 et redéplacer les $(n-1)$ disques de l'emplacement 2 à l'emplacement 1. Bien évidemment, le déplacement des $(n-1)$ disques se fait récursivement en supposant qu'on sait déplacer $(n-2)$ disques...

= =====
====

==== ===== =

==== ===== =

=
====
=====