

Grammaires algébriques et automates à pile

Exercice 1

Donner des grammaires engendrant les langages suivants.

- 1 - $\{a^i b^j c^k, i > j\}$
- 2 - $\{a^i b^j c^k, i \neq j\}$
- 3 - $\{a^{2^n}, n \geq 0\}$
- 4 - $\{a^{n^2}, n \geq 0\}$
- 5 - $\{a^p, p \text{ premier}\}$

Exercice 2

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants :

- 1 - l'ensemble des mots bien parenthésés;
- 2 - $\{a^i b^j c^k, i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$;
- 3 - l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b ;
- 4 - l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de a que de b ;
- 5 - $\{w \# \bar{w} \#, w \in (0 + 1)^*\}$;
- 6 - l'ensemble des mots de $(0 + 1)^*$ qui ne sont pas de la forme ww .

Exercice 3

Donner des automates à piles reconnaissant les langages suivants.

- $$L_1 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = |u|_b\}.$$
- $$L_2 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a \geq |u|_b\}.$$
- $$L_3 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = 2|u|_b\}.$$
- $$L_4 = \{\text{bin}(i) \# \text{bin}(i + 1), \text{ où } \text{bin}(i) \text{ est l'écriture binaire de } i\}.$$
- $$L_5 = \{a^i b^j c^k, i \neq j \text{ ou } j \neq k\}.$$

Exercice 4

Montrer que si L est algébrique et si R est rationnel le langage $L \cap R$ est algébrique.

Donner deux langages algébriques dont l'intersection n'est pas algébrique.

Exercice 5

Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

- $$L_1 = \{a^i b^j c^k, i < j < k\}.$$
- $$L_2 = \{a^i b^j, j = i^2\}.$$
- $$L_3 = \{a^i, i \text{ premier}\}.$$
- $$L_4 = \{a^n b^n c^m, n \leq m \leq 2n\}.$$
- $$L_5 = \{a^{n^2}, n \geq 0\}.$$

Exercice 6

Montrer que le langage $L = \{ww, w \in \{a, b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. On donnera un automate à pile.