TD3. Automates et langages rationnels

Exercice 1 *Automates*

1. Trouver un automate fini déterministe reconnaissant les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 0 modulo 3.

2. Donner un automate fini déterministe qui reconnaisse l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{ième}$ lettre en partant de la fin est un a.

Exercice 2 *Langages rationnels*

1. Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :

1. $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$
2. $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$
3. $\{a^p,\ p \text{ premier}\}$
4. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs
5. L'ensembles des mots qui ont un nombre égal de a et de b
6. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$
7. $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$
8. $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$
9. $\{a^i b^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$
10. $\{a^i b^j, i \geq j\}$

Exercice 3 *Longueur et périodicité*

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

1. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i,\ a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

2. En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 4

1. Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels :

1. CYCLE(L) = $\{x_1x_2,\ x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2. MAX(L) = $\{x \in L,\ \forall y \neq \varepsilon, xy \notin L\}$
3. MIN(L) = $\{x \in L$, aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
4. INIT(L) = $\{x \in \Sigma^*,\ \exists y \in \Sigma^*,\ xy \in L\}$
5. $\overline{L} = \{x, \overline{x} \in L\}$
6. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*,\ \exists\, y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
7. SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^*,\ \exists\, y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$

8. LOG(L) = $\{x \in \Sigma^*,\ \exists\, y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| \ = \ 2^{|x|}\}$

2. Montrer que pour un langage L rationnel le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel :
BORD(L) = $\{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$