TD4. “Busy beaver” et graphes récursifs

Exercice 1 *Le championnat du castor affairé*

Dans tout cet exercice les entrées (éventuelles) et sorties des machines de Turing seront codées en unaire.
Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des machines de Turing d'alphabet $\{B; 1\}$ à $n+1$ états $q_0, \ldots, q_n$, où q_0 est l'état initial et q_n l'état d'acceptation, fonctionnant sur un unique ruban bi-infini avec une seule tête.
Le « championnat du castor affairé » est un jeu proposé aux machines de Turing de $\mathcal{M}_n$. Gagne celle qui réussit à écrire le plus grand nombre sur le ruban à partir de l'entrée vide avant de s'arrêter (il est donc bien entendu que la machine *doit* s'arrêter).

1. Montrer que, pour n fixé, l'ensemble des nombres que peuvent écrire les machines de $\mathcal{M}_n$ avant de s'arrêter admet un maximum $C(n)$ (la machine réalisant ce maximum est déclarée vainqueur de la compétition du castor affairé en catégorie n). Montrer que la fonction $C : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

2. Montrer que, si f est une fonction Turing-calculable, alors la fonction

$$g_f : x \mapsto \max\{f(2x+2), f(2x+3)\}$$

est calculable par une machine M_f dont on notera k_f le nombre d'états.

3. Pour $x \in \mathbb{N}$ et f Turing-calculable, construire une machine de Turing $N_{x,f}$ qui, partant de l'entrée vide, écrit $g_f(x)$ sur le ruban. Combien d'états utilise-t-elle ?

4. En déduire que pour toute fonction Turing-calculable f, il existe $x_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall x \geq x_0 \; f(x) < C(x)$. En déduire que C n'est pas récursive.

Lin et Rado (1975) ont montré que $C(1) = 1$, $C(2) = 4$ et $C(3) = 6$. On sait également

$C(4) = 13$		Brady 1966–1975
$C(5) > 500$		U. Schult 1983
$C(8) > 8.10^{44}$		Green 1964
$C(12) > 6.4096^{4096^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4096^4}}}}}$	où 4096 apparaît 166 fois	U. Schult 1983

5. Faire mumuse.

6. Que fait la machine de Turing définie ci-dessous ?

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, B) = (q_1, 1, \rightarrow) & \delta(q_0, 1) = (q_2, 1, \leftarrow) \\ \delta(q_1, B) = (q_0, 1, \leftarrow) & \delta(q_1, 1) = (q_1, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_2, B) = (q_1, 1, \leftarrow) & \delta(q_2, 1) = (q_3, 1, \leftarrow) \end{array}$$

Exercice 2 *C'est pas graphe... et vice-versa*

Dans cet exercice, on notera Π^2 la bijection usuelle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$, Π^2_1 et Π^2_2 ses deux projetées. On a donc

$$\begin{array}{rccc} \Pi^2 : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ & x & \mapsto & (\Pi^2_1(x), \Pi^2_2(x)) \end{array}$$

1. Montrer que pour toute fonction φ récursive, il existe ψ de même arité et de graphe RP telle que $\varphi = \Pi^2_1 \circ \psi$.

2. Montrer que si f est RP, alors le graphe de f l'est aussi, mais que la réciproque est fausse.

Soit ψ une fonction unaire de graphe RP. On pose

$$\psi'(x,y) = \begin{cases} (x, y+1) & \text{si } y < \psi(x) \\ (x, 0) & \text{si } y = \psi(x) \\ (x, y) & \text{si } y > \psi(x) \end{cases}$$

et $\xi = \left(\Pi^2\right)^{-1} \circ \psi' \circ \Pi^2$.

3. Montrer que ξ est bijective et RP.

4. Montrer qu'il existe des fonctions unaires σ et τ RP telles que pour toute fonction unaire φ récursive il existe une fonction ξ RP et bijective telle que $\varphi = \sigma \circ \xi^{-1} \circ \tau$.

5. Montrer qu'il existe une fonction RP bijective dont l'inverse ne l'est pas.