TD8. Un autre théorème de Rice

Dans tout l'énoncé, $(\phi_x)_{x\in\mathbb{N}}$ désigne l'énumération usuelle des machines de Turing. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions calculables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
$\langle .,. \rangle$ désigne la bijection usuelle de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.
A toute partie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ on associe $P_\mathcal{C} = \{x \mid \phi_x \text{ calcule une fonction de } \mathcal{C}\}$

Exercice 1 *Réduction*

1. Soit $K = \{x \mid \phi_x(x) \downarrow\}$ et $\overline{K}$ son complémentaire. Montrer que K et $\overline{K}$ ne sont pas récursifs.
2. Soit η la fonction définie par
$$\eta(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si le calcul de } \phi_x \text{ sur l'entrée } y \text{ s'arrête en au plus } z \text{ étapes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que η est récursive totale.
3. Soit ψ une fonction récursive, montrer qu'il existe une fonction récursive totale g telle que
$$\forall x, y \quad \phi_{g(x)}(y) = \begin{cases} \psi(y) & \text{si } \forall z \leq y, \eta(x,x,z) = 0 \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{F}$, on dit que f' est une sous-fonction finie de f si f' a un domaine fini et est la restriction de f sur ce domaine.

4. Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ tel que $P_\mathcal{C}$ soit récursivement énumérable et soit $\psi \in \mathcal{C}$. Montrer que si aucune sous-fonction finie de ψ n'appartient à $\mathcal{C}$ alors il existe un i tel que
$$\overline{K} = \{x \mid (\phi_i \circ g)(x) \downarrow\}$$
5. En déduire que si $P_\mathcal{C}$ est récursivement énumérable, alors pour toute fonction θ de $\mathcal{C}$ il existe une sous-fonction finie de θ qui est ausi dans $\mathcal{C}$.

Exercice 2 *Extension*

Soient ψ et χ deux fonctions de $\mathcal{F}$. On dit que χ étend ψ si ψ est la restriction de χ au domaine de ψ. Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ tel que $P_\mathcal{C}$ soit récursivement énumérable.

1. Soient χ et ψ deux fonctions de $\mathcal{F}$, χ étendant ψ. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale h telle que
$$\forall x, y \quad \phi_{h(x)}(y) = \begin{cases} \chi(y) & \text{si } x \in K \\ \psi(y) & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Montrer que s'il existe $\chi \notin \mathcal{C}$ étendant $\psi \in \mathcal{C}$, il existe i tel que
$$\overline{K} = \{x \mid (\phi_i \circ h)(x) \text{ s'arrête}\}$$
3. En déduire que si $P_\mathcal{C}$ est récursivement énumérable alors toute fonction calculable étendant une fonction de $\mathcal{C}$ est également dans $\mathcal{C}$.

Exercice 3 *Théorème de Rice-Shapiro*

Soit y un entier tel que $y = \langle\langle x_1, y_1\rangle, \dots, \langle x_k, y_k\rangle\rangle$. La fonction *germe* engendrée par y, notée f^*_y, est définie par $f^*_y(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et est indéfinie partout ailleurs.

1. Soit A un ensemble récursivement énumérable, $\mathcal{C}_A$ est la classe des fonctions qui étendent une fonction germe engendrée par un élément de A.
Montrer que $P_{\mathcal{C}_A}$ est récursivement énumérable.

2. On suppose maintenant que $P_{\mathcal{C}}$ est récursivement énumérable. Montrer qu'il existe un ensemble B récursivement énumérable tel que $P_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}_B}$.

3. En déduire que pour tout $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, $P_{\mathcal{C}}$ est récursivement énumérable si et seulement si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions étendant les fonctions germes d'un ensemble récursivement énumérable.

Exercice 4 *Applications*

1. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions récursives totales. Montrer que $P_{\mathcal{C}}$ et $\overline{P_{\mathcal{C}}}$ ne sont pas récursivement énumérables.

2. L'ensemble $\{x \mid \text{le domaine de } \phi_x \text{ est infini}\}$ est-il récursivement énumérable ?