Calcul des prédicats
Résumé de cours

IUP MIAGE, Université de Nantes
(C. Retoré http://perso.wanadoo.fr/retore/christian)

6 octobre 2001

Table des matières

Ce cours a été rédigé assez rapidement, merci de me signaler les erreurs, pour les versions ultérieures.

1 Introduction

Le calcul des propositions est bien trop limité pour décrire des situations réelles. En effet il ne permet que de décrire des phrases dont la vérité ne dépend pas des individus (par exemple « Il pleut. »); il ne peut pas représenter des phrases qui mettent en jeu des individus ou des objets (par exemple « Si x est le père de y et si z est le père de x alors z est un grand-père de y » ou « Tout individu a un père. »).

Le calcul des prédicats permet d'exprimer de telles relations entre individus, qui sont soit vraies soit fausses suivant la valeur que l'on donne aux symboles de relation appelés prédicats et aux individus intervenant dans les formules. C'est la différence essentielle entre le calcul des prédicats et le calcul des propositions. Pour cela on aura aussi recours à des fonctions, qui à un certain nombre d'entités associent une entité. Par exemple, à un individu on peut associer son père, ou à deux nombres leur somme etc. Attention : en logique tous les individus sont de même type, et on peut donc appliquer les fonctions à tous les individus.

Néanmoins le calcul des prédicats est très similaire à celui des propositions. On aura des formules définies inductivement à partir des symboles de prédicats et de fonctions. On les interprétera dans divers mondes possibles et alors elles deviendront vraies ou fausses. On aura également un système formel pour démontrer ou réfuter des formules. Les formules démontrables seront bien sûr vraies dans toute interprétation (validité du calcul) et les formules vraies dans toute interprétation seront démontrables (complétude) — en cela le calcul des prédicats est semblable au calcul des propositions.

Il y a néanmoins une différence algorithmique importante: il est absolument impossible de vérifier qu'une formule est vraie pour toutes les interprétations (ou démontrable) tandis qu'en logique propositionnelle il suffisait de vérifier pour toutes les valeurs possibles des propositions atomiques ou de construire une démonstration du calcul des séquents. D'une part il y a un infinité d'interprétations, et d'autre part celles-ci comportent en général une infinité d'individus. [1]

1. En fait un théorème dû à Herbrand dit qu'il suffit de considérer un seul domaine pour établir la non consistance d'une formule mais cela ne règle en rien le second point : pour cette interprétation on a en général une infinité d'individus.

2 Un exemple

Avant d'en venir aux définitions formelles, considérons les formules suivantes:
HG : $(\forall x \quad (\forall y \quad (\forall z \quad ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow G(x,z)))))$
HP : $(\forall x \quad (\exists y \quad P(y,x)))$
C : $(\forall x \quad (\exists y \quad G(y,x)))$
D : $(\forall x \quad (\forall z \quad (P(z,f(x)) \Rightarrow G(z,x))))$
F : $((HG \wedge HP) \Rightarrow C) = ((((\forall x \quad (\forall y(\forall z \quad ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow G(x,z)))))\wedge$ $(\forall x \quad (\exists y \quad P(y,x)))) \Rightarrow (\forall x \quad (\exists y \quad G(y,x))))$
Considérons maintenant diverses interprétations de ces formules.

2.1 Interprétation 1

Les individus sont les êtres humains. La relation $P(x,y)$ signifie que x est le père de y. La relation $G(x,y)$ signifie que x est un grand-père de y. La fonction $f(\ldots)$ associe à individu sa mère.

HG signifie alors : pour tous êtres humains x, y, z, si (x est le père de y et y est le père de z) alors (x est un grand-père de z).

HP signifie que « pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x » soit, plus simplement, « tout individu a un père ».

C signifie que « pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le grand-père de x » soit, plus simplement, « tout individu a un grand-père ».

D signifie que si z est le père de la mère de x alors z est un grand père de x.

Ces quatre formules sont vraies dans cette interprétation[2]. L'implication F : $((HG \wedge HP) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

On remarquera que les deux formules HP et HG sont loin de modéliser toutes les propriétés des relations G et P. On n'a pas dit que « le père de chaque individu est unique », ni qu'« un individu x peut-être le grand-père d'un autre z sans qu'il existe un individu dont x soit le père et qui soit le père de z» (le grand-père maternel).

2.2 Interprétation 2

Les individus sont trois points a,b,c. On interprète les prédicats par les relations suivantes:

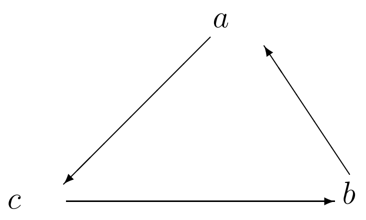
La relation P est vraie pour les couples (a,b) (b,c) et (c,a) et est fausse pour les autres. En d'autres termes, $P(a,b)$, $P(b,c)$, $P(c,a)$ sont vraies, et toutes les autres $P(a,a)$,$P(a,c)$,$P(a,b)$,$P(b,b)$,$P(c,b)$,$P(c,c)$ sont fausses.

2. Sauf peut-être HP: soit il y a un premier homme et celui-ci n'a pas de père, soit en se retrouve peu à peu, en remontant l'évolution, à inclure dans le genre humains des singes, des poissons, des bactéries, ...

La relation G est vraie pour les couples (b,a) (c,b) et (a,c) et est fausse pour les autres. En d'autres termes, $G(b,a)$, $G(c,b)$, $G(a,c)$ sont vraies, et toutes les autres $G(a,a)$,$G(c,a)$,$G(b,a)$,$G(b,b)$,$G(b,c)$, $G(c,c)$ sont fausses.

La fonction f est la fonction définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.

En représentant a b et c par les points suivants, $P(x,y)$ signifie « x précède immédiatement y » et $G(x,y)$ signifie « x suit immédiatement y ».

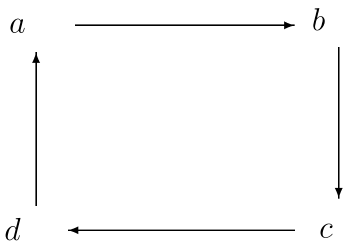


La formule HP signifie que tout point a un prédécesseur immédiat, et elle vraie. La formule HG signifie que pour tous points x,y,z, si x précède immédiatement y et si y précède immédiatement z, alors x suit immédiatement z. Elle est également vraie. Finalement la formule C signifie que tout point a un successeur immédiat; elle est également vraie. L'implication $((HP \wedge HG) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

La formule D signifie que pour tout z et pour tout x, si z précède immédiatement $f(x)$, alors z suit immédiatement x. Elle est donc fausse: c précède $f(a) = a$ sans que c suive immédiatement a.

2.3 Interprétation 3

Les individus sont quatre points a,b,c,d.



$P(x,y)$ signifie que x précède immédiatement y sur le graphe.

$G(x,y)$ signifie que x suit immédiatement y sur le graphe.

La formule HP signifie que tout point a un prédécesseur immédiat, et elle vraie. La formule HG signifie que pour tous points x,y,z, si x précède immédiatement y et si y précède immédiatement z, alors x suit immédiatement z. Elle est fausse. Finalement la formule C signifie que tout point a un successeur immédiat.

Elle est également vraie. L'implication $((HP \wedge HG) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

2.4 Interprétation 4

Les individus sont quatre points a,b,c,d.

$P(x,y)$ signifie que x précède immédiatement y sur le graphe précédent.

$G(x,y)$ signifie que pour aller de x à y on rencontre exactement un point z différent de x et de y.

La formule HP signifie que tout point a un prédécesseur immédiat, et elle vraie. La formule HG signifie que pour tous points x,y,z, si x précède immédiatement y et si y précède immédiatement z, alors x suit immédiatement z. Elle est vraie. Finalement la formule C signifie que tout point a un successeur immédiat. Elle est également vraie. L'implication $((HP \wedge HG) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

2.5 Interprétation 5

Les individus sont les nombres entiers positifs.

$P(x,y)$ signifie que $x = y + 1$. Par exemple $P(5,4)$ est vraie, mais $P(4,5)$ est fausse.

$G(x,y)$ signifie que $x = y + 2$. Par exemple $P(6,4)$ est vraie, mais $P(4,6)$ est fausse.

La formule HP signifie alors que pour tout entier y, il existe un entier x tel que $x = y + 1$. Elle est vraie.

La formule HG signifie que pour tous entiers x,y,z, si $x = y + 1$ et $z = y + 1$ alors $z = x + 2$. Elle est vraie.

Finalement la formule C signifie que pour tout entier x, il existe un entier z tel que $z = x + 2$. Elle est vraie.

L'implication $((HP \wedge HG) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

2.6 Interprétation 6

Les individus sont les nombres entiers positifs.

$P(x,y)$ signifie que $y = x + 1$. Par exemple $P(4,5)$ est vraie, mais $P(5,4)$ est fausse.

$G(x,y)$ signifie que $y = x + 2$. Par exemple $P(4,6)$ est vraie, mais $P(6,4)$ est fausse.

La formule HP signifie alors que pour tout entier y, il existe un entier x tel que $y = x + 1$. Elle est fausse: pour $y = 0$ un tel entier positif n'existe pas.

La formule HG signifie que pour tous entiers x,y,z, si $y = x + 1$ et $z = y + 1$ alors $z = x + 2$. Elle est vraie.

Finalement la formule C signifie que pour tout entier x, il existe un entier z tel que $x = z + 2$. Elle est fausse: pour $x = 0$ il n'existe pas de tel entier positif.

L'implication $((HP \wedge HG) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

2.7 Comparaison des interprétations

On est donc tout à fait libre d'interpréter les formules dans un « monde » de son choix, de sorte que certains énoncés deviennent vrais ou faux. On remarque néanmoins que pour chacune des interprétations considérées, l'implication $((HP \wedge HG) \Rightarrow C)$ est vraie. Ce n'est pas un hasard. Comme on le verra ci-après, cette formule est une tautologie du calcul des prédicats. Elle est vraie dans toute interprétation.

3 Formules du calcul des prédicats

3.1 Termes

On se donne:

- des constantes (qui seront interprétées par des individus fixés)
- des symboles de fonctions ayant chacun une arité ≥ 1 (un nombre d'arguments fixé)
- des variables (qui varient dans l'ensemble des individus de l'interprétation).

Les termes sont définis comme suit:

- une variable est un terme
- une constante est un terme
- si f est un symbole fonctionnel d'arité n et si $t_1, \ldots, t_n$ sont n termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

3.1.1 Exemple

On se donne les constantes o et i. On se donne deux fonctions d'arité 2 notée p et f et une d'arité 1 notée m. Les variables sont x,x_0,$x_1, \ldots, y$,y_1,$y_2, \ldots, z$,z_1,$z_2, \ldots$.

Les expressions suivantes sont alors des termes:

p(f(x,o),m(f(i,y_2))),
f(x,p(y,z)),
p(f(x,y),f(x,z)),
f(i,x),

p(x,o),
f(x,o) ...

3.2 Les formules du calcul des prédicats

On se donne un ensemble de prédicats (appelés aussi symboles de relations) chacun étant muni d'une arité ≥ 0, c.-à-d.de son nombre d'arguments.

Par exemple T d'arité 2, S d'arité 3, P d'arité 0 et U d'arité 1.

3.2.1 Formules atomiques

Soit R un prédicat d'arité n, et soient n termes $t_1,t_2,\ldots,t_n$. Alors l'expression $R(t_1,\ldots,t_n)$ est une formule atomique.

Si R est un prédicat d'arité 0, R est une formule atomique — en fait R est une proposition atomique.

3.2.2 Formules

Les formules sont obtenues à partir des formules atomiques comme suit:

- Une formule atomique est une formule.
- Si F et G sont deux formules alors:
  - $(F \wedge G)$ est une formule
  - $(F \vee G)$ est une formule
  - $(F \Rightarrow G)$ est une formule
- Si F est une formule alors $(\neg F)$ est une formule.
- Si F est une formule et si x est une variable, alors
  - $(\forall x \quad F)$ est une formule.
  - $(\exists x \quad G)$ est une formule.

3.2.3 Occurrences libres et liées d'une variable

On définit inductivement par construction d'une formule les occurrences de variables libres et liées dans une formule, et pour celles qui sont liées le quantificateur qui les lie.

Dans une formule atomique, toutes les occurrences des variables sont libres.

Lorsque la formule est $(F \star G)$ les occurrences de variables situées dans F (resp. G) sont libres ou liées suivant qu'elles le sont dans la formule F (resp. G) et lorsqu'elles sont liées, elles le sont par le même quantificateur situé dans F (resp. G).

Lorsque la formule est $(\neg F)$ les occurrences de variables situées dans F sont libres ou liées suivant qu'elles le sont dans la formule F et lorsqu'elles sont liées, elles le sont par le même quantificateur situé dans F .

Lorsque la formule est $(\forall x \quad F)$, les occurrences de variables liées situées dans F sont toujours liées dans $(\forall x \quad F)$ et le sont par le même quantificateur. Les occurrences libres de variables dans F autres que x restent libres, et les occurrences libres de x sont liées dans $(\forall x \quad F)$ et le sont par le $\forall x$ en tête de la formule.

Lorsque la formule est $(\exists x \quad F)$, les occurrences de variables liées situées dans F sont toujours liées dans $(\exists x \quad F)$ et le sont par le même quantificateur. Les occurrences libres de variables dans F autres que x restent libres, et les occurrences libres de x sont liées dans $(\exists x \quad F)$ et le sont par le $\exists x$ en tête de la formule.

Considérons la formule:

$$(\forall x(F(g(x)) \Rightarrow (H(f(y,x),x)\vee(\exists x \quad K(g(x))))))\wedge(\exists y \quad (G(f(x),y)\vee F(g(y))))$$

Numérotons chaque quantificateur par un entier en indice et attribuons ce même indice aux occurrences de variables qu'il lie. Les variables libres sont alors celles sans indice.

On suit la construction de la formule.

1. $K(g(x))$ — dans une formule atomique toutes les occurrences de variables sont libres.
2. $(\exists x_1 \quad K(g(x_1)))$ — les occurrences libres de x dans $K(g(x))$ sont liées par le $\exists x$.
3. $H(f(y,x),x)$ —- dans une formule atomique toutes les occurrences de variables sont libres.
4. (d'après 2 et 3) $H(f(y,x),x) \vee (\exists x_1 \quad K(g(x_1)))$ — un connecteur logique ne change pas la nature des occurrence de variables, et les quantificateurs liant les occurrences liées restent les mêmes.
5. $F(g(x))$ — dans une formule atomique toutes les occurrences de variables sont libres.
6. (d'après 4 et 5) $F(g(x)) \Rightarrow (H(f(y,x),x) \vee (\exists x_1 \quad K(g(x_1))))$ — un connecteur logique ne change pas la nature des occurrence de variables, et les quantificateurs liant les occurrences liées restent les mêmes.
7. $(\forall x_2 \quad (F(g(x_2)) \Rightarrow (H(f(y,x_2),x_2) \vee (\exists x_1 \quad K(g(x_1))))))$ — les occurrences libres de x dans $F(g(x)) \Rightarrow (H(f(y,x),x) \vee (\exists x_1 \quad K(g(x_1))))$ sont liées par le $\forall x$ ajouté en tête.

8. $F(g(y))$ — dans une formule atomique toutes les occurrences de variables sont libres.
9. $G(f(x),y)$ — dans une formule atomique toutes les occurrences de variables sont libres.
10. $G(f(x),y) \vee F(g(y))$ — un connecteur logique ne change pas la nature des occurrence de variables, elles sont donc toutes libres.
11. $\exists y_3 \quad (G(f(x),y_3) \vee F(g(y_3)))$ — les occurrences libres de y dans $(G(f(x),y) \vee F(g(y))$ sont liées par le $\exists y$ ajouté en tête.
12. d'après 7 et 11

$$(\forall x_2(F(g(x_2)) \Rightarrow (H(f(y,x_2),x_2) \vee (\exists x_1 \quad K(g(x_1)))))) \wedge (\exists y_3 \quad (G(f(x),y_3) \vee F(g(y_3))))$$

On peut alors réécrire cette formule en une formule qui porte moins à confusion:

$$(\forall u(F(g(u)) \Rightarrow (H(f(y,u),u) \vee (\exists e \quad K(g(e)))))) \wedge (\exists e' \quad (G(f(x),e') \vee F(g(e'))))$$

3.2.4 Exemple 1

On considère le langage défini par:

- variables: $x,x_0,x_1,\ldots,y,y_1,y_2,\ldots,z,z_1,z_2,\ldots$
- pas de constante
- pas de symbole fonctionnel
- deux prédicats d'arité 2, P et G.

Les expressions suivantes sont des formules:
$(\forall x \quad (\forall y(\forall z \quad ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow G(x,z)))))$
$(\forall x \quad (\exists y \quad P(y,x)))$
$(\forall x \quad (\exists y \quad G(y,x)))$
$((((\forall x \quad (\forall y(\forall z \quad ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow G(x,z))))) \wedge (\forall x \quad (\exists y \quad P(y,x)))) \Rightarrow (\forall x \quad (\exists y \quad G(y,x))))$

3.2.5 Exemple 2

On considère le langage défini par:

- variables: $x,x_0,x_1,\ldots,y,y_1,y_2,\ldots,z,z_1,z_2,\ldots$
- constantes o et i.
- deux fonctions d'arité 2 notée p et f et une d'arité 1 notée m.
- un prédicat d'arité 2 noté E, deux prédicats d'arité 3 noté P et F.

Les expressions suivantes sont alors des formules:
$(\forall x \quad P(x,y,\mathsf{p}(x,y)))$
$(\forall x \quad ((\exists y P(x,y,\mathsf{o})) \vee (\exists y S(x,y,\mathsf{i}))))$
$\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad ((\forall u \quad F(x,\mathsf{p}(y,z),u) \Rightarrow P(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(x,z),u)) \Rightarrow (\forall w \quad (F(\mathsf{p}(w,x),\mathsf{p}(y,z),v) \wedge P(w,x,z))))$

4 Interprétation d'une formule dans un modèle

Comme pour le calcul des propositions, on va définir l'interprétation d'une formule en fonction de l'interprétation des formules élémentaires. Pour qu'une formule devienne vraie ou fausse (valle 0 ou 1), il faut non seulement dire comment s'interprètent les prédicats et les symboles de fonctions, (ce qui est l'analogue d'interpréter les propositions pour le calcul propositionnel) mais aussi ce que valent les variables : en effet les formules peuvent contenir des variables libres, et on a besoin de connaître leur valeur pour que la formule devienne vraie ou fausse. Bien sûr la valeur des variables liées n'intervient en rien dans le calcul de la valeur d'une formule.

Par exemple pour connaître la valeur de $P(x,y)$ il faut non seulement connaître la signification de P dans le modèle, mais aussi la valeur de x et de y. Dans la formule $\exists x \quad P(x,y)$ il faut également connaître la valeur de y (mais celle de x n'a aucune importance). Cependant, comme la valeur de $\exists y \quad P(x,y)$ va être définie en fonction de la valeur de $P(x,y)$, on fera aussi intervenir la valeur de x, ou plus précisément les valeurs de $P(x,y)$ pour toutes les valeurs de x.

On va définir $[F]_{I,A}$ la valeur d'une formule F en fonction d'une interprétation I et d'une assignation des variables A.

- Une assignation est simplement une fonction des variables dans les éléments du domaine d'interprétation. On dira qu'une assignation A' est une variante en x de l'assignation A si $A'(z) = A(z)$ pour toute variable z autre que x.
- Une interprétation I est la donnée:
  - d'un domaine D_I (un ensemble)
  - d'un élément a_I du domaine D pour chaque constante
  - d'une fonction f_i de D^n dans D pour tout symbole de fonction f d'arité n.
  - d'une relation n-aire $R_I \subset D^n$ pour tout prédicats à n arguments.

Si I et A sont fixées, toute formule atomique prend la valeur 0 ou 1, selon la définition formelle suivante, qui suit l'intuition. Étant donnée une interprétation et une assignation des variables, l'interprétation de toute formule, qui sera 0 ou 1, est définie ainsi:

- La valeur d'une formule obtenue à partir d'une ou deux formule par un connecteur ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) s'obtient comme dans le cas propositionnel. On note $\widetilde{\star}$ l'opération sur 0 et 1 correspondant au connecteur $\star$ — par exemple $0\widetilde{\wedge}1 = 0$, $\widetilde{\neg}0 = 1$, etc.

  - $[(X \wedge Y)]_{I,A} = [X]_{I,A}\widetilde{\wedge}[Y]_{I,A}$
  - $[(X \vee Y)]_{I,A} = [X]_{I,A}\widetilde{\vee}[Y]_{I,A}$
  - $[(X \Rightarrow Y)]_{I,A} = [X]_{I,A}\widetilde{\Rightarrow}[Y]_{I,A}$

- La valeur de $[((\forall x) \quad F)]_{I,A}]$ ou de $[((\exists x) \quad F)]_{I,A}]$ dépend bien sûr de la valeur de cette même formule pour la même interprétation *pour les autres assignations* A'. Plus précisément on dira qu'une assignation A' est une variation en x d'une assignation A si $A(u) = A'(u)$ pour toute variable u sauf x.
  - $[((\forall x) \quad F)]_{I,A}] = 1$ si et seulement si $[((\forall x) \quad F)]_{I,A'}] = 1$ pour toute assignation A' qui soit une variation en x de A — c.-à-d.lorsque quelle que soit la valeur assignée à la variable x on obtient une formule vraie.
  - $[((\exists x) \quad F)]_{I,A}] = 1$ si et seulement si $[((\exists x) \quad F)]_{I,A'}] = 1$ pour au moins une assignation A' qui soit une variation en x de A — c.-à-d.lorsqu'il existe une valeur assignée à la variable x qui donne une formule vraie.

On remarque que la valeur de $[((\forall x) \quad F)]_{I,A}]$ ou $[((\exists x) \quad F)]_{I,A}] = 1$ ne dépend pas de $A(x)$. Par suite la valeur de $[G]_{I,A}$ ne dépend pas de $A(x)$ lorsque x est une variable liée. Si G est une formule sans variable liée, alors $[G]_{I,A}$ ne dépend pas de A (conformément à l'intuition) et par conséquent on écrira $[G]_I$.

4.1 Un exemple

Soit la formule $(\forall x \quad (\exists y(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))))$. Pour trouver $[(\forall x \quad (\exists y(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))))]_I$ où I est l'interprétation donnée au paragraphe 2.2, il faut considérer toutes les assignations de x et de y, soient 9 assignations:

- $A_{aa} : x = a, y = a$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{aa}}] = P(a,a) \vee P(a,a) = 0$
- $A_{ab} : x = a, y = b$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ab}}] = P(a,b) \vee P(b,a) = 1$
- $A_{ac} : x = a, y = c$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ac}}] = P(a,a) \vee P(c,a) = 1$
- $A_{ba} : x = b, y = a$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ba}}] = P(b,a) \vee P(a,b) = 1$
- $A_{bb} : x = b, y = b$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{bb}}] = P(b,b) \vee P(b,b) = 0$
- $A_{bc} : x = b, y = c$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{bc}}] = P(b,a) \vee P(c,b) = 0$
- $A_{ca} : x = c, y = a$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ca}}] = P(a,a) \vee P(a,a) = 0$
- $A_{cb} : x = c, y = b$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{cb}}] = P(a,b) \vee P(b,a) = 1$
- $A_{cc} : x = c, y = c$ — $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{cc}}] = P(c,a) \vee P(c,a) = 1$

  On a
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{aa}} = 1$ En effet il existe une variante en y A' de A_{aa} ($A' = A_{ab}$ ou $A' = A_{ac}$) pour laquelle $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A'} = 1$.

  On a de même
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ac}} = 1$
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ab}} = 1$.

  Cela est cohérent avec l'intuition qui veut que la valeur d'une formule $\exists y \ldots$ ne dépende pas de la valeur de y.

  On a
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ca}} = 1$ En effet il existe une variante en y A' de A_{cb} ($A' = A_{cc}$ ou $A' = A_{cb}$) pour laquelle $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A'} = 1$.

  On a de même
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{cb}} = 1$
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{cc}} = 1$.

  Cela est cohérent avec l'intuition qui veut que la valeur d'une formule $\exists y \ldots$ ne dépende pas de la valeur de y.

  On a
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{ba}} = 1$ En effet il existe une variante en y A' de A_{ba} (elle-même: $A' = A_{ba}$) pour laquelle $[(P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A'} = 1$.

  On a de même
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{bc}} = 1$
- $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A_{bb}} = 1$.

Cela est cohérent avec l'intuition qui veut que la valeur d'une formule $\exists y \ldots$ ne dépende pas de la valeur de y.

Voyons maintenant la valeur de

$$[\forall x \quad (\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_A$$

Il faut voir si pour toute valeur u de x les variantes A' en x de A, on a $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_{A'} = 1$

On remarque ci dessus que pour chaque assignation A parmi les 9 assignations possible on a $[\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x)))]_A = 1$

On aura donc

$$[\forall x \quad (\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_A$$

pour tout assignation A. En effet pour une assignation donnée A ses variantes en x sont trois des neuf assignations possibles (par exemple si $A = A_{ab}$ les trois variantes en x sont A_{ab}, A_{bb} et A_{cb}.); et quelle que soit la variante A' choisie, on a $[(\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_{A'} = 1$ (par exemple $[(\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_{A_{ab}} = 1$, $[(\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_{A_{bb}} = 1$ et $[(\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_{A_{cb}} = 1$) et on peut donc en conclure que

$$[\forall x \quad (\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_A = 1$$

(dans le cas de $A = A_{ab}$ cela donne $[\forall x \quad (\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_{A_{ab}} = 1$).

On a donc, pour toute assignation A:

$$[\forall x \quad (\exists y \quad (P(x,f(y)) \vee P(y,f(x))))]_A = 1$$

La valeur ne dépend donc pas de l'assignation, ce qui est conforme à l'intuition: il n'y a pas d'occurrence libre de x ou de y dans la formule, sa valeur est donc indépendante de l'assignation.

La formule est donc vraie dans ce modèle et ce pour toute assignation. Elle serait par contre fausse si le modèle était composé des points $\{a,b,c\}$ avec $P = \{(a,b),(c,c),\}$ et $f(a) = b$, $f(b) = a, f(c) = a$. En effet pour $x = c$ il n'y a pas de y tel que $P(c,f(y)$ (car $f(y)$ vaut toujours a ou b, et qu'on n'a ni $P(c,a)$, ni $P(c,b)$) ni de y tel que $P(y,f(c))$ (car on n'a jamais $P(\ldots,a)$).

Ce n'est pas une tautologie, cette formule n'est pas démontrable.

5 Extension du calcul des séquents aux prédicats

Les séquents sont des expressions $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des suites de formules du calcul des prédicats:

$(\forall x \quad (\forall y \quad (\forall z \quad ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow G(x,z))))),(\forall x \quad (\exists y \quad P(y,x))) \vdash$
$(\forall x \quad (\exists y \quad G(y,x)))$

Les axiomes sont tous les séquents $\Gamma \vdash \Delta$ Il suffit de rajouter les quatre règles qui suivent aux règles du calcul propositionnel. On notera la restriction dans les règles $\forall_d$ et $\exists_g$.

Pour $\forall_d$ la règle et sa restriction se comprennent bien : pour déduire que ce qu'on a montré vaut pour tout y, il faut bien ne pas être en train de supposer des propriétés particulières de y, ce qui correspond à la présence d'occurrence libres de y.

La règle $\exists_g$ lui ressemble beaucoup : si sous l'hypothèse A on a une certaine propriété, et qu'on ne suppose rien d'autre sur y (pas d'occurrence libre de x) alors $\exists x\ A$ suffit pour obtenir le séquent démontré.

La règle $\forall_g$ affirme simplement que si on utilise une hypothèse $(\forall x \quad A)$ et l'une de ses instances particulières $A[t/x]$ alors l'hypothèse $(\forall x \quad A)$ suffit.

Symétriquement, la règle $\exists_d$ affirme que si on montre la disjonction de formules $A[t/x] \vee (\exists x \quad A)$ alors on a aussi montré $(\exists x \quad A)$ qui contient $A[t/x]$.

Règles pour les quantificateurs

$$\frac{\Gamma, A[t/x], (\forall x \quad A), \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (\forall x \quad A), \Delta \vdash \Theta}\ \forall_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A[y/x], \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (\forall x \quad A), \Delta}\ \forall_d \text{ plus de } y \text{ libre ensuite}$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x], \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (\exists x \quad A), \Delta \vdash \Theta}\ \exists_g \text{ plus de } y \text{ libre ensuite} \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A[t/x], (\exists x \quad A), \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (\exists x \quad A), \Delta}\ \exists_d$$

Rappelons les règles du calcul propositionnel, qui s'appliquent aussi au calcul des prédicats.

Règles

$$\frac{\Gamma,A,B,\Delta \vdash \Theta}{\Gamma,(A \wedge B),\Delta \vdash \Theta}\wedge_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma,A,\Delta \qquad \Theta \vdash \Gamma,B,\Delta}{\Theta \vdash \Gamma,(A \wedge B),\Delta}\wedge_d$$

$$\frac{\Gamma,A,\Delta \vdash \Theta \qquad \Gamma,B,\Delta \vdash \Theta}{\Gamma,(A \vee B),\Delta \vdash \Theta}\vee_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma,A,B,\Delta}{\Theta \vdash \Gamma,(A \vee B),\Delta}\vee_d$$

$$\frac{\Gamma,\Delta \vdash A,\Theta \qquad B,\Gamma,\Delta \vdash \Theta}{\Gamma,(A \Rightarrow B),\Delta \vdash \Theta}\Rightarrow_g \qquad \frac{A,\Gamma \vdash B,\Delta,\Theta}{\Gamma \vdash \Delta,(A \Rightarrow B),\Theta}\Rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma,\Delta \vdash A,\Theta}{\Gamma,(\neg A),\Delta \vdash \Theta}\neg_g \qquad \frac{A,\Gamma \vdash \Delta,\Theta}{\Gamma \vdash \Delta,(\neg A),\Theta}\neg_d$$

Attention : à cause des règles $\forall_g$ et $\exists_d$ (dont on ne peut se passer), on n'a aucune garantie qu'il existe un algorithme de recherche de démonstration qui termine. Si on pense à celui étudié, pour exemple, pour le calcul propositionnel, on voit que si l'on choisit l'une des deux règles mentionnées la taille du séquent à démontrer augmente.

Un exemple de démonstration (on remarquera l'absence d'occurrence libre de y après l'application de $\forall_d$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))),P(y),Q(y) \vdash P(y)}}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))),(P(y) \wedge Q(y)) \vdash P(y)}\wedge_g}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))) \vdash P(y)}\forall_g}{(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \vdash (\forall x\ P(x))}\forall_d \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))),P(z),Q(z) \vdash Q(y)}}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))),(P(z) \wedge Q(z)) \vdash Q(z)}}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))) \vdash Q(z)}}{(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \vdash (\forall x\ Q(x))}\forall_d}{(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))) \vdash ((\forall x P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x)))}\wedge_d$$

Un exemple de démonstration *incorrecte* conduisant à une formule *fausse*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{P(y) \vdash P(y)}}{P(y) \vdash (\forall x\ P(x))}}{(\exists x\ P(x)) \vdash (\forall x\ P(x))}\exists_g}{\vdash (\exists x\ P(x)) \Rightarrow (\forall x\ P(x))}\Rightarrow_d$$

La faute est commise lors de l'application de la règle $\forall_d$. En effet on conclut

$\forall x\ P(x)$ à partir de $P(y)$ mais en hypothèse on était entrain de supposer $P(y)$. Formellement cela se voit dans cette occurrence de y qui reste libre après la règle : la règle n'est pas correctement appliquée.

On voit d'ailleurs intuitivement que la formule est fausse : ce n'est pas parce qu'il existe un individu satisfaisant la propriété $P(\dots)$ que tous les individus satisfont cette propriété (pour un contre-exemple formel, prendre par exemple comme domaine les entiers et comme propriété $P(x)$ « x est pair »).

6 Complétude du calcul des prédicats

On a le même résultat que pour le calcul des propositions : les formules qui sont démontrables formellement $\vdash F$, sont exactement les formules vraies dans tout modèle pour toute interprétation.

La différence est celle mentionnée ultérieurement : il n'y a pas d'algorithme qui termine pour toute formule et qui vérifie si celle-ci est démontrable ou non.

7 Distributivité de la quantification universelle sur la conjonction et de la quantification existentielle sur la disjonction

Pour toutes formules F et G et pour toute variable x, on a

$$(1): \quad ((\forall xF) \wedge (\forall xG)) \equiv (\forall x(F \wedge G)) \quad :(2)$$

Cela se comprend intuitivement.

Si on a (1), on a $(1a): \quad (\forall xF)$ et $(1b): \quad (\forall xG)$. Pour n'importe quelle valeur de x, on à la fois G et F, et donc $F \wedge G$. Comme cela est vrai pour n'importe quelles valeur de x on a $(\forall x(F \wedge G))$.

Réciproquement, supposons (2). On a $F \wedge G$ qui est vraie pour toute valeur de x. Et donc pour toute valeur de x F est vraie, soit $(1a): \quad (\forall xF)$, et de même G est vraie pour toute valeur de x soit $(1b): \quad (\forall xG)$. On a donc $(1a) \wedge (1b)$ soit (1).

Pour toutes formules F et G et pour toute variable x on a

$$(1'): \quad ((\exists xF) \vee (\exists xG)) \equiv (\exists x(F \vee G)) \quad :(2')$$

Cela se comprend pareillement.

Si $(1')$ est vraie, un au moins des deux énoncés $(1'a): \quad (\exists xF)$ et $(1'b): (\exists xF)$. Si $(1'a)$ est vraie, soit a une valeur de x telle que F soit vraie; alors $F \vee G$

est vraie pour cette même valeur a de x, et par conséquent $(2')$ est vraie. Si $(1'b)$ est vraie, soit b une valeur de x telle que G soit vraie; alors $F \vee G$ est vraie pour cette même valeur b de x, et par conséquent $(2')$ est vraie. Dans les deux cas, $(2')$ est vraie.

Si $(2')$ est vraie, alors il existe une valeur c de x telle que $(F \vee G)$ soit vraie. pour cette valeur c de x l'une au moins des deux formules F ou G est vraie. Si F est vraie pour cette valeur de x, alors $(\exists x F)$ est vraie, et par suite $(\exists x F) \vee (\exists x G) \quad : (1)$ est vraie. Si G est vraie pour cette valeur de x, alors $(\exists x G)$ est vraie, et par suite $(\exists x F) \vee (\exists x G) \quad : (1)$ est vraie.

Attention : en général on n'a pas

$$(1*): \quad ((\forall x F) \vee (\forall x G)) \not\equiv (\forall x (F \vee G)) \quad : (2*)$$

Il suffit pour cela de trouver deux formules F et G et une interprétation qui rende l'une vraie et l'autre fausse. Considérons la formule $F = P(x)$ et $G = I(x)$. Prenons pour domaine les entiers et interprétons $P(x)$ par x *est pair* et $I(x)$ par x *est impair*. On a bien $(2*)$ (tout entier est pair ou impair) mais on n'a pas $(1*)$ il est faux que tout entier soit pair, et il est égalent faux que tout entier soit pair.

Exercice : montrer que si on a $(1*)$, on a toujours $(2*)$.

Attention : en général on n'a pas

$$(1'*): \quad ((\exists x F) \wedge (\exists x G)) \not\equiv (\exists x (F \wedge G)) \quad : (2'*)$$

Il suffit pour cela de trouver deux formules F et G et une interprétation qui rende l'une vraie et l'autre fausse. Considérons la formule $F = P(x)$ et $G = I(x)$. Prenons pour domaine les entiers et interprétons $P(x)$ par x *est pair* et $I(x)$ par x *est impair*. On a bien $(1'*)$ (il existe un entier pair et il existe un entier impair) mais on n'a pas $(2'*)$ car il n'existe pas d'entier qui soit pair et aussi impair.

Exercice : montrer que si on a $(2'*)$, on a toujours $(1'*)$.

8 Formes prénexes

$$\begin{array}{rcl} \neg(\forall x F) & \equiv & (\exists x(\neg F)) \\ \neg(\exists x F) & \equiv & (\forall x(\neg F)) \end{array}$$

cela se comprend : dire qu'on n'a pas pour tout x la propriété F c'est dire qu'il existe un x qui satisfait $(\neg F)$. De même dire qu'il n'existe pas de x satisfaisant F, c'est dire que tout x satisfait $(\neg F)$.

Soit x une variable qui n'apparaisse pas dans G (qui ne soit pas libre dans G suffit, mais on peut toujours s'y ramener). Alors on a les équivalence suivantes:

$$
\begin{array}{rcl}
((\forall x F) \wedge G) & \equiv & (\forall x (F \wedge G)) \\
((\exists x F) \wedge G) & \equiv & (\exists x (F \wedge G)) \\
\hline
((\forall x F) \vee G) & \equiv & (\forall x (F \vee G)) \\
((\exists x F) \vee G) & \equiv & (\exists x (F \vee G)) \\
\hline\hline
((\forall x F) \Rightarrow G) & \equiv & (\exists x (F \Rightarrow G)) \\
((\exists x F) \Rightarrow G) & \equiv & (\forall x (F \Rightarrow G)) \\
(G \Rightarrow (\forall x F)) & \equiv & (\forall x (F \Rightarrow G)) \\
(G \Rightarrow (\exists x F)) & \equiv & (\exists x (F \Rightarrow G))
\end{array}
$$

Les équivalences pour l'implication s'obtiennent (exercice possible) à partir de celles sur la disjonction et la négation, puisque $(A \Rightarrow B) \equiv ((\neg A) \vee B)$. Le changement de quantificateur lorsque le quantificateur porte sur le premier argument, est bien sûr dû à la négation cachée dans l'implication.

Il faut bien prendre garde à la condition: *x est une variable qui n'apparaît pas dans G*. Soit par exemple la formule: $(\exists x ((\exists x P(x)) \wedge I(x)))$ Comme $(\exists x P(x))$ est vraie la formule se ramène à $(\exists x (\top \wedge I(x)))$ c'est-à-dire à $(\exists x I(x))$ qui est vraie.

Par contre, si on applique la transformation au $\exists$ interne, sans se soucier de la condition, on a $(\exists x P(x)) \wedge I(x) \equiv (\exists x (P(x) \wedge I(x)))$ et par remplacement d'une sous formule par une sous formule équivalente, la formule devient $(\exists x (\exists x (P(x) \wedge I(x))))$ et, comme il n'existe pas d'entier qui soit pair et impair, elle devient $(\exists x \bot)$ qui est bien sûr faux.

Pour pouvoir appliquer ce schéma il faut tout d'abord renommer les variables liées, ce qui fait apparaître la dépendance entre occurrences de variables et quantificateurs: $(\exists x ((\exists y P(y)) \wedge I(x)))$. On obtient alors $(\exists x (\exists y (P(y) \wedge I(x))))$ qui est bien équivalent à la formule de départ. Il existe un entier x et un entier y tels que x soit pair et y soit impair est bien équivalent à : il existe un entier x tel que x soit pair et qu'il existe un entier pair (par forcément le même).

Il n'est pas difficile de voir qu'en utilisant les équivalences de la gauche vers la droite (et en opérant au préalable les renommages nécessaires) toute formule est équivalente à une formule où tous les quantificateurs sont en tête.

Exemple: $((\forall x (\exists y F(x,y))) \Rightarrow (\forall x (\exists y G(x,y))))$ devient successivement:

1. $((\forall x (\exists y F(x,y))) \Rightarrow (\forall z (\exists w G(z,w))))$ (renommage des variables liées)
2. $(\exists x ((\exists y F(x,y)) \Rightarrow (\forall z (\exists w G(x,y)))))$ ($\exists x$ et $\Rightarrow$)
3. $(\exists x (\forall y (F(x,y) \Rightarrow (\forall z (\exists w G(x,y))))))$ ($\forall y$ et $\Rightarrow$)
4. $(\exists x (\forall y (\forall z (F(x,y) \Rightarrow (\exists w G(x,y))))))$ ($\forall z$ et $\Rightarrow$)
5. $(\exists x (\forall y (\forall z (\exists w (F(x,y) \Rightarrow G(x,y))))))$ ($\exists w$ et $\Rightarrow$)

Tous les quantificateurs sont en tête.

On aurait pu procéder dans un autre ordre et par exemple passer de 1 à 2':

2'. $(\forall z ((\forall x (\exists y F(x,y))) \Rightarrow (\exists w G(z,w))))$

mais le résultat obtenu aurait été équivalent.

Une formule est dite en forme prénexe si elle s'écrit:

$$(Q_1 x_1 (Q_2 x_2 (\dots (Q_n x_n F) \dots)))$$

où les Q_i sont des quantificateurs ($\exists$ ou $\forall$)

9 Formes de Skolem

Étant donnée une formule sous forme prénexe (tous les quantificateurs sont en tête), on va enrichir le langage de manière à l'écrire plus simplement.

Supposons que la formule prénexe F soit consistante, c.-à-d.qu'il existe une interprétation qui la rende vraie.

Lorsqu'on a un quantificateur $\exists s$, la ou les valeurs du s qui rendent la formule vraie ne dépendent que des variables quantifiées universellement ($\forall$) qui précède $\exists s$. Par exemple pour une formule $\exists x \forall y \exists z \forall t \exists u F$ le x ne dépend de rien, le y qui rend la formule vraie ne dépend que de y, et le u ne dépend que de y et t (et de z mais celui-ci est fonction de y).

D'où l'idée, étant donnée une formule, de la tranformer en une formule où on remplace chaque variable quantifiée existentiellement s par un nouveau symbole de fonction appliqué aux variables quantifiées universellement avant s , ou par une constante s'il n'y en a pas.

Prenons un exemple:

$$\exists x \quad \exists y \quad \forall z \quad \exists w \quad \forall u \quad \exists v ((R(x,y) \Rightarrow ((\neg F(z,u,v)) \vee K(w))) \wedge G(v))$$

se transforme en:

$$((R(a,b) \Rightarrow ((\neg F(z,u,f(z,u))) \vee K(g(z)))) \wedge G(f(z,u)))$$

où a et b sont de nouvelles constantes, et f un nouveau symbole de fonction à deux arguments, et g un nouveau symbole de fonction à un argument.

Comme les variables sont toutes quatifiées universellement (puisqu'on a remplacé les quantifications existentielles) on omet souvent les quantificateurs, mais une telle formule doit être comprise comme sa clôture universelle c.-à-d.:

$$\forall z \quad \forall u \quad ((R(a,b) \Rightarrow ((\neg F(z,u,f(z,u))) \vee K(g(z)))) \wedge G(f(z,u)))$$

— on remarquera que l'ordre des quantifications universelles est sans importance, tout autre ordre conduisant à une formule équivalente.

Soit G une formule sous forme prénexe et G' sa forme de Skolem; G est consistante si et seulement si G' est consistante.

S'il existe un domaine D et une interprétation dans D qui rend G vrai, alors définissons une interprétation de même domaine pour le langage de G' comme suit. Le domaine est le même, et le langage commun reçoit la même interprétation. Comme pour toutes les valeurs des variables universelles, il existe des valeurs des variables existentielles situées après elles qui rendent la formule vraie, on peut définir une fonction qui associent à un n-uplets de valeurs des variables universelles la valeur qui rend la formule vraie. En interprétant les nouveaux symboles fonctionnels ainsi, on obtient un domaine et une interprétation qui rend la formule de Skolem vraie.

Réciproquement, si la formule de Skolem est vraie pour une interprétation alors la formule non transformée est également vraie pour cette même interprétation. Le $\exists s$ sera précisément garanti par l'élément du domaine f appliqué aux variables universelles le précédant.

Un exemple: soit la formule $\forall x \exists y P(x,y)$, elle est vraie avec pour domaine les entiers et pour interprétation de $P(x,y)$ la relation $x < y$. Sa transformée de Skolem est $P(x,f(x))$ qui se comprend comme $\forall x P(x,f(x))$.

Comme pour tout entier il existe un entier qui lui est supérieur, on peut définir une fonction qui réalise cette existence, par exemple $f(x) = x + 5$ (ou $f(x) = 2^x$ ou $f(x) = 2x$ si x est impair et x^2 si x et pair, ou.. $\ldots$). Il est clair qu'en gardant la même interprétation pour P et en donnant au symbole f l'une des interprétations possibles on obtient une interprétation dans laquelle la forme de Skolem est vraie.

Réciproquement, supposons que nous ayons une interprétation qui rende $\forall x P(x,f(x))$ vraie. Cela veut dire qu'on a un domaine D, une relation binaire $P \subset D \times D$ sur ce domaine, et une fonction de $D \times D$ dans D qui rend la formule vraie. Par exemple si D est l'ensemble des entiers, P est $x < y$ et f est $f(x) = x + 1$, on a bien $\forall x \quad x < x + 1$. En gardant cette même interprétation la formule $\forall x \exists y P(x,y)$ est vraie. Pourquoi ? On sait que $f(x)$ est définie pour tout x de D, et $y = f(x)$ est une valeur pour laquelle $P(x,y)$ est vraie.

On a donc : si F est une formule prénexe et si F' est sa forme de Skolem, alors F est consistante si et seulement si F' est consistante, ou, en d'autres termes, F est inconsistante (ou contradictoire) si et seulement si F' est inconsistante (ou contradictoire).

10 Formes clausales et théorème de Herbrand

Lorsqu'une formule est sous forme de Skolem, la partie sans quantificateur peut se mettre sous forme normale conjonctive, puisque les lois de de Morgan, et la distributivité entre $\wedge$ et $\vee$ s'appliquent.

On se retrouve alors avec une formule équivalente qui a la forme:

$$\forall x \forall y \ldots (C_1 \wedge \cdots \wedge C_N)$$

où chaque C_i est une disjonction de formules atomiques ou de négations de formules atomiques.

Comme les $\forall$ et $\wedge$ commutent, la formule est équivalente à une formule

$$(\forall x \forall y \ldots C_1) \wedge \cdots (\forall x \forall y \ldots C_n)$$

ce qui s'appelle une forme clausale.

Supposons qu'on veuille montrer qu'une formule F est inconsistante. D'après ce qui précède, cela revient à montrer que sa forme clausale est inconsistante, et pour cela on dispose du théorème de Herbrand :

Une forme clausale est inconsistante si et seulement s'il est possible de remplacer dans chaque clause les variables par des termes de Herbrand de sorte que l'ensemble des clauses (propositionnelles) obtenues soit inconsistant.

Quels sont les termes de Herbrand? Ce sont tous les termes obtenus à partir des constantes et des fonctions — les termes sans variable. Par exemple si les fonctions sont f (d'arité 2) et g (d'arité 1) et h (d'arité 3) et les constantes a,b,c, les termes suivants sont des termes de Herbrand: $h(f(a,a),g(b),h(a,b,f(a,c)))$, $f(g(a),h(a,c,f(a,b)))$, $\ldots$

Pour montrer l'inconsistance de ces ensembles de clauses propositionnelles, on peut bien sûr utiliser la méthode de résolution en engendrant librement les termes de Herbrand.

En fait Prolog procède différemment : on part des clauses, et on les instancie pour obtenir une paire de clauses à laquelle appliquer la résolution, en utilisant pour cela l'unification des termes.

Unifier deux termes t_1 et t_2 consiste à trouver une substitution des variables qui les rendent égaux. C'est un peu compliqué pour ce cours, mais quelques exemples devraient suffire pour en saisir l'idée.

Soient $t_1 = f(x,g(y))$ et $t_2 = f(g(u),g(z))$. La substitution $\sigma : x \mapsto g(u), z \mapsto y$ donne $\sigma t_1 = f(g(u),g(z)) = \sigma t_2$.

Soient $t_1 = f(x,g(y))$ et $t_2 = f(g(u),h(z))$. Il n'y a pas de substitution qui unifie ces deux termes, car cela imposerait $g = h$ et seules les variables sont substituables.

Soient $t_1 = h(x,g(x),x)$ et $t_2 = h(g(u),g(g(z)),z)$. Pour unifier ces termes, il faut que $x = g(u) = z$. Mais il faut aussi que $g(x) = g(g(z))$ et donc que $g(z) = x$, ce qui entraîne $z = g(z)$, ce qui n'est pas possible.

L'unification permet de transformer deux formules atomiques $R(\ldots)$ et $(\neg R(\ldots))$ de sorte que l'une soit la négation de l'autre. Par exemple $(\neg R(f(u,g(v)),g(u)))$ et $R(f(x,x)),g(z))$ conduit à $u = z$ et $u = x = g(v)$ et les deux formules deviennent: $R(f(g(v),g(v)),g(g(v)))$ et $(\neg R(f(g(v),g(v)),g(g(v))))$.

11 Le mécanisme de Prolog

Un programme Prolog est une liste de clauses (j variant de 1 à P) — éventuellement il n'y a pas de F^j:

$$Clause^j : \quad F^j :- H_1^j, \ldots ,H_{n_j}^j$$

Chacune se comprend comme une formule:

$$C^j : \quad \forall x,\forall y, \ldots (H_1^j \wedge \ldots \wedge H_{n_j}^j \Rightarrow F^j) = \forall x,\forall y, \ldots \neg H_1^j \vee \ldots \vee \neg H_{n_j}^j \vee F^j)$$

où $x,y,\ldots$ sont toutes les variables de la formule/clause. On observe qu'une seule formule est positive par clause. Le programme n'est autre que la conjonction de ces clauses.

Lorsqu'on cherche à réaliser le but G, c.-à-d.$G = \exists u,v, \ldots B$, Prolog cherche à trouver des valeurs pour $u,v \ldots$ telle que

$$\bigwedge_{j=1,\ldots,P} C^j \Rightarrow G$$

ce qui revient à réfuter

$$W = (\neg G) \wedge (\bigwedge_{j=1,\ldots,P} C^j)$$

c.-à-d.à montrer

$$(\neg G) \wedge (\bigwedge_{j=1,\ldots,P} C^j) \vdash$$

On observe alors que $\neg G$ est aussi de la forme $\forall u \forall v \ldots (\neg B)$. C'est aussi une clause, mais sans formule atomique positive.

On a donc un ensemble de clauses dont une est particulière (pas de formule positive) et dont toutes les autres ont au plus une formule positive.

Le théorème de Herbrand affirme alors que si cet ensemble de clauses est inconsistant alors il existe des instanciations des variables universelles (on les instancie par clauses, mais les clauses utilisent des variables distinctes) par des termes de Herbrand qui réfutent cette clause et la réfutation est faite par la méthode de résolution.

Plutôt que d'énumérer successivement tous les termes de Herbrand, on résout les clauses en utilisant l'unification, ce qui donne les termes de Herbrand nécessaires. C'est cette propriété de commutation entre unification et résolution qui est à la base Prolog.

Une seconde optimisation utilisée par Prolog, et que pour ces ensembles de clauses particulières (une clause négative et une seule formule positive dans les autres clauses) on peut partir du but (la clause négative) et construire par résolution et unification une suite de clauses ainsi:

- le but
- résolvant du but et d'une des clauses initiales
- résolvant de la clause précédente et d'une des clauses initiales
- résolvant de la clause précédente et d'une des clauses initiales
- ...
- résolvant de la clause précédente et d'une des clauses initiales
- $\perp$ (la clause vide établissant la contradiction)

Dans cette suite, une même clause initiale peut bien sûr être utilisée plusieurs fois.

L'un des intérêt de Prolog est qu'il ne se contente pas de dire « il y a une solution » mais qu'il calcule une solution en fonction des constantes (et des fonctions) présentes dans le but et dans les clauses.

Cela est possible et même facile pour les clauses particulières utilisées et avec la méthode ci-dessus en gardant mémorisant les substitutions, comme on va le voir sur un exemple.

Montrons ainsi l'inconsistance de l'ensemble des trois clauses:

Clause 1 $(\neg F(x,y) \vee \neg F(y,z) \vee G(x,z))$

Clause 2 $F(g(x'),x'))$

Clause 3 $\neg G(x'',a))$ — *but*

Il faut trouver une clause qui se résolve, par unification, avec le but. On peut unifier $G(x'',a)$ de 3 et $G(x,z)$ de 1 ce qui conduit à la substitution $\sigma(x) = x''$ et $\sigma(z) = a$ et donc aux clauses (il faut appliquer la substitution à toute la clause qu'on instancie) $(\neg F(x'',y) \vee \neg F(y,a) \vee G(x'',a))$ et $\neg G(x'',a))$ dont le résolvant à ajouter aux clauses initiales, est la

Clause 4 $(\neg F(x'',y) \vee \neg F(y,a)$

On peut ensuite unifier $F(y,a)$ avec $F(g(x'),x'))$ (clause 2) par la substitution $\tau(x') = a$ et $\tau(y) = g(a)$, ce qui donne les clauses $(\neg F(x'',g(a)) \vee \neg F(g(a),a)$ (d'après la clause 4) et $F(g(a),a)$ (d'après la clause 2) dont le résolvant est la clause:

Clause 5 $\neg F(x'',g(a))$

On peut maintenant unifier pour appliquer la résolution à cette clause et à une autre instance de la clause initiale $F(g(x'),x')$ (clause 2). La substitution obtenue est: $\phi(x') = g(a),\phi(x'') = g(g(a))$, et les deux clauses deviennent : $F(g(g(a)),g(a))$ (d'après la clause 2) et $\neg F(g(g(a)),g(a))$ (d'après la clause 5) dont le résolvant est la clause vide ($\perp$), on a donc dérivé une contradiction.

On peut maintenant voir que les substitutions utilisées déterminent la valeur à donner au variables (dans l'univers de Herbrand) pour obtenir la contradiction. Ici on voit que la seule substitution sur x'' est $\phi(x'') = g(g(a))$

La résolution vue ci-dessus correspond au calcul qu'effectue Prolog lorsque les clauses sont:

$G(x,z) :- F(x,y),F(y,z).$

$F(g(x'),x').$

et que le but est:

$G(x'',a).$

On peut suivre plus directement le calcul sans mettre sous forme clausale:

$G(x'',a)$ est produit par $G(x,z) :- F(x,y),F(y,z).$ avec $x = x''$ et $z = a$. Il faut donc produire $F(x'',y)$ et $F(y,a)$ pour une *même* valeur de y.

Pour produire $F(y,a)$, on peut utiliser la clause $F(g(x'),x').$ qui conduit à $x' = a$ et $y = g(a)$. On a à ce moment-là déterminé une valeur possible de y : $g(a)$.

Il faut donc réussir à montrer $F(x'',g(a))$. En utilisant la clause $F(g(x'),x').$ on y parvient et cela conduit à $x'' = g(g(a))$.

En fait, lors des TP, nous n'avons pas utilisé de fonction définies par l'utilisateur en Prolog, mais simplement la fonction prédéfinie $[X|L]$ qui, étant donnés une liste L et un élément (ou une variable) X, construit la liste obtenue en ajoutant X en tête de L. On peut néanmoins reformuler la résolution précédente en remplaçant (par exemple) $g(u)$ par $[1|u]$, et a par la constante $[]$. Le programme s'écrit alors:

$G(x,z) :- F(x,y),F(y,z).$

$F([1|x'],x').$

et le but recherché est

$G(x'',[]).$

et la solution trouvée par Prolog est: $x'' = [1,1]$

En effet dans ce cas la première clause signifie que $G(x,z)$ est vraie lorsqu'on peut trouver un y tel que $F(x,y)$ et $F(y,z)$ soient vraies, et la clause $F(x,y)$ signifie que x est la liste obtenue en ajoutant un 1 en tête de y. $G(x'',[])$ est donc vraie lorsque x'' est $[1,1] = g(g([]))$, la liste intermédiaire y étant la liste $[1]$, pour laquelle on a $F([1,1],[1])$ et $F([1],[])$.