Correction des TD d'UMIN207

Année 2006

Version 2.0

Université de Montpellier
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5

Rodolphe Giroudeau
161, rue Ada
34392 MONTPELLIER Cedex 5
TEL : 04-67-41-85-40
Mail : rgirou@lirmm.fr

Université de Montpellier II — 2006/2007
UMIN 207I — Durée: 3h

Méthode de Résolution de problèmes $\mathcal{NP}$-complet
TD – Séance n° 1

Exercice 1 – Unicité de la répresnetation d'un vecteur

1. Rappeler la définition d'un ensemble de vecteurs linéairement dépendants (resp. linéairement indépendant).
2. Est-ce que l'ensemble des vecteurs suivant est linéairement dépendants $\{(1,2,0,0,0),\ (1,0,0,0,0),\ (0,0,1,1,0),\ (0,1,0,0,0)\}$?
3. Est-ce que l'ensemble des vecteurs suivant est linéairement indépendant $\{(1,1,3,1),\ (1,2,1,1),\ (1,0,0,1)\}$?
4. Montrer que si $\{P_1,\ P_2, \ldots,\ P_r\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants et P est un vecteur tel que $P = \sum_{j=1}^{r} c_j P_j$ et $P = \sum_{j=1}^{r} d_j P_j$ alors $c_j = d_j,\ i = 1,\ \ldots, r$.
5. Montrer qu'un ensemble de vecteurs $\{P_1,\ ,P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ est linéairement dépendant si et seulement si un de ses vecteurs est ue combinaison linéaire du reste.
6. Montrer qu'un ensemble d'au moins $m+1$ vecteurs de dimension m sont linéairement dépendants.

Correction exercice 1

1. Un ensemble de vecteurs de dimension m $\{P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n\}$ est linéairement indépendant si il existe des constantes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ non toutes égales à zéro tel que $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n = 0$ (resp. Si $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n = 0$ alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$).
2. Il suffit de prendre $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 2$.
3. Nous devons résoudre $\alpha_1(1,1,3,1) + \alpha_2(1,2,1,1) + \alpha_3(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$, ainsi on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ est la seule solution. Et donc, l'ensemble des vecteujrs est linéairement indépendant.
4. En soustrayant les deux représentations, on trouve $0 = \sum_{j=1}^{r}(c_j - d_j)P_j$. Il suffit de poser $\alpha_j = c_j - d_j$ et $n = r$ pour retrouver la définition d'un vecteur linéairement indépendant. En effet, sachant que $P_1,\ P_2, \ldots, P_r$ est linéairement indépendant, il suit que $\alpha_j = 0,\ c_j = d_j,\ i = 1, \ldots, r$.
5. Si $P_i = \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{i-1}P_{i-1} + \alpha_{i+1}P_{i+1} + \ldots + \alpha_n P_n$, dans laquelle quelques ou tous les coefficients α_k peuvent être nuls, alors $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{i-1}P_{i-1} + (-1)P_i + \alpha_{i+1}P_{i+1} + \ldots + \alpha_n P_n = 0$ et ainsi l'ensemble est linéairement indépendant. Inversement, si l'ensemble des vecteurs est linéairement indépendant, soit α_j le premier coefficent non nul. Alors $P_j = 0P_1 + 0P_2 + \ldots + 0P_{j-1} + (\frac{\alpha_j}{-\alpha_j})P_{j+1} + \ldots + (\frac{\alpha_n}{-\alpha_j})P_n$. c'est à dire P_j est une combinaison linéaire du reste.

6. Il est clair que si j'ai un espace de dimension m avec $m+1$ alors il existe un vecteur qui est combinaisosn linéaire des autres. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, si j'ai trois vecteurs, un vecteur est linéiarement dépendant des autres.

Fin correction exercice 1

Exercice 2 – Combinaison convexe

1. Rappeler la définition d'une combinaison convexe.
2. Est-ce que le point A de coordonnées $(1,1,1)$ est une combinaison convexe des points $(2,2,0)$, $(0,0,3)$, $(0,0,0)$?
3. Déterminer si le point de coordonnées $(0,7)$ est une combinaison convexe de l'ensemble des points $\{(3,6),\ (-6,9),\ (2,1),\ (-1,1)\}$?
4. Déterminer graphiquement si le point de coordonnées $(1,2)$ est une combinaison convexe des points $(1,1)$ et $(2,-1)$?

Correction exercice 2

1. Etant donnée p points $x_1, \ldots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$ et p nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non négatifs de somme 1 ($\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$), on dira que $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$ est une combinaison convexe de $x_1, \ldots, x_p$.
2. Il suffit de résoudre le système suivant $\alpha_1(2,2,0) + \alpha_2(0,0,3) + \alpha_3(0,0,0) = (1,1,1)$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. La résolution du système donne $\alpha_1 = 1/2,\ \alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 1/6$.
3. Nous obtenons le système suivant à résoudre $(0,7) = \alpha_1(3,6) + \alpha_2(-6,9) + \alpha_3(2,1) + \alpha_4(-1,1)$ avec $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$. La résolution de ce système donne $\alpha_1 = 2/3 + 1/2\alpha_4,\ \alpha_2 = 1/3 - (5/16)\alpha_4,\ \alpha_3 = (-19/16)\alpha_4$ avec α_4 arbitraire. Le choix de $\alpha_4 = 0$ donne $\alpha_1 = 2/3,\ \alpha_2 = 1/3,\ \alpha_3 = 0$. Ainsi le point $(0,7)$ est une combinaison convexe du système.
4. La réponse est non, car le point de coordonées $(1,2)$ n'est pas sur le segment reliant les autres points.

Fin correction exercice 2

Exercice 3 – Forme standard et forme canonique

Dans cet exercice vous devez mettre les programmes suivants sous forme standard et donner également la forme matricielle :

1. $$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 2 \end{cases}$$

3. Réécrire le programme précédent dans le cas où la fonction objectif est la minimisation.

4.
$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + +2x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 2 \end{cases}$$

Correction exercice 3

1. Nous ajoutons des variables d'écarts x_3 et x_4 dans le système et dans la fonction objectif, nous obtenons :
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$
Chaque équation contenant une variable d'écart, aucune autre variables n'est nécessaire.
Sous forme matricielle, nous obtenons $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t$, $C = [1, 1, 0, 0]^t$ et
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \; X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

2. Dans le but de convertir la première inégalité en égalité, nous ajoutons une variable d'écart x_3 à gauche de l'inégalité. Sachant que la deuxième contrainte, cette équation n'e contient pas de variable d'écart, nous ajoutons une variable artificielle x_4 à gauche de l'inégalité. Ces deux variables sont inclus dans la fonction objectif, la variable d'écart avec pour coefficient zéro et la variable artificielle avec un coefficient un très grand nombre négatif. Nous obenons donc le programme suivant :
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 - Mx_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$
Sous forme matricielle, nous obtenons $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t$, $C = [80, 60, 0, -M]^t$ et
$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}, \; X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

3. Le seul changement est le coût du coefficient associé à la variable artificielle ; il devient $+M$ au lieu de $-M$.

4. Nous ajoutons des variables de surplus à gauche des contraintes, et nous incluons dans la fonction objectif chaque nouvelle variable avec pour coefficient zéro. Nous obtenons le premier programme.
$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ x_1 + +2x_2 - x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$
Sachant qu'aucune contrainte ne contient des variables d'écarts, nous ajoutons trois variables artificiels x_6, x_7 et x_8 respectivement à gauche des équations. Nous incluons également ces variables dans la fonction objectif avec comme coefficient un très grand nombre $-M$. Nous arrivons ainsi au programme suivant :
$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 + +2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 8 \end{cases}$$
Sous forme matricielle, nous obtenons $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t$, $C = [80, 60, 0, -M]^t$ et
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}, \; X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}.$$

Fin correction exercice 3

Exercice 4 – Relation entre points extrêmes, solutions basiques réalisables et coefficient du vecteur

Montrer que chaque point extrême de $\mathcal{S}$ (où $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions réalisables d'un programme linéaire mis sous forme standard, c'est à dire que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des vecteurs X tel que $AX = B$ et $X \geq 0$) admet au moins $n - m$ tuples nulles et c'est une solution basique réalisable.

Correction exercice 4

– Soit $X = [x_1, \; x_2, \ldots, x_n]^T$ un point extrême de $\mathcal{S}$. Sans perte de généralité, nous pouvons assurer que les $x-$variables sont indexés tel que $x_1, \; x_2, \ldots, x_r, r \leq n$ sont positif.

Sachant $X \in \mathcal{S}$, nous avons $AX = B$, avec pour conséquence $x_j = 0, j > r$. Sous forme de vecteur, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{r} x_j A_j = B \tag{1}$$

Nous allons dans un premier temps montrer que les vecteurs impliqués dans l'équation 1 sont linéairement indépendant. Supposons le contraire. Alors il existe des constantes $\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ non nulles telle que

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j = B \tag{2}$$

Soit θ un nombre positif, ajoutons et retranchons cette quantité aux deux équations 1 et 2. On obtient

$$\sum_{j=1}^{r}(x_j + \theta\alpha_j)A_j = B \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{r}(x_j - \theta\alpha_j)A_j = B \tag{3}$$

Si θ est choisit assez petit afin que $x_j + \theta\alpha_j$ et $x_j - \theta\alpha_j$ restes des quantités positives pour tout les $j = 1, \ 2, \ldots, \ r$ alors il s'ensuit d'après 3 que

$$X_1 = [x_1 + \theta\alpha_1, \ x_2 + \theta\alpha_2, \ldots, x_r + \theta\alpha_r, 0, \ 0, \ldots, 0]^T \tag{4}$$
$$X_2 = [x_1 - \theta\alpha_1, \ x_2 - \theta\alpha_2, \ldots, x_r - \theta\alpha_r, 0, \ 0, \ldots, 0]^T \tag{5}$$

sont des éléments distincts de $\mathcal{S}$. Mais alors $X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$, ce qui est impossible, sachant que X est un point extrême de e$\mathcal{S}$. Ainsi, $\{A_1, \ A_2, \ldots, \ Ar\}$ doit linéairement indépendant. Sachant que les vecteurs admettent une dimension m, il s'ensuit d'après la question 6 de l'exercice 1 qu'il ne peut avoir pas plus de m de ces vecteurs qui sont linéairement indépendant en accord avec le fait que $r \leq m$. Mais touts les tuples de X passe de la valeur une à zéro donc X doit avoir au moins $n - m$ tuples nulles.

- Dans le cas où $r = m$, la preuve précédente établi que X est une solution basique réalisable.
- Si $r < m$, nous pouvons toujours (suppos) identifier $m - r$ tuples nulles de X correspondant aux A-vecteurs combiné à $A_1, \ A_2, \ldots, \ A_r$ pour faire un ensemble indépendant. Encore une fois X est une solution basique.

Fin correction exercice 4

Exercice 5 – Solution basique réalisable et points extrêmes

Montrer que toute solution basique et un point extrême de $\mathcal{S}$.

Correction exercice 5

Soit X une solution basique réalisable. Alors $X \in \mathcal{S}$ et au moins $n - m$ des coeeficents de X sont nulles. Sans perte de généralité, nous pouvons assurer que les $x-$varaibles sont indéxés tel que les composantes positives de X apparaissent en premier, ainsi X peut s'écrire $X = [x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, x_s, \ 0, \ 0, \ldots, \ 0]^T$ avec $x_j > 0, j = 1, \ldots, s, s \leq m$. Par conséquent, l'égalité $AX = B$ peut se réécrire sous la forme

$$\sum_{j=1}^{s} x_j A_j = B$$

Sachant que X est une solution basique alors d'après l'exercice précédent l'ensemble $\{A_1, \ A_2, \ldots, \ A_s\}$ est linéairement indépendant.

Supposons le contraire, c'est à dire que X n'est pas un point extrême de $\mathcal{S}$, alors X peut s'écrire comme combinaison convexe de deux points extrêmes de $\mathcal{S}$: $X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ avec $X_1 \neq X_2$.

Sachant que les coeeficients des vecteurs X_1 et X_2 sont non négatifs et que les valeurs $\beta_i, \ i = 1, \ 2$ sont strictement positives, il s'ensuit qu'au moins $n - s$ tuples de X_1 et X_2 sont nulles. Donc, $X_1 = [c_1, \ c_2, \ c_3, \ldots, c_s, \ 0, \ 0, \ldots, \ 0]^T$ et $X_1 = [d_1, \ d_2, \ d_3, \ldots, d_s, \ 0, \ 0, \ldots, \ 0]^T$

Les vecteurs X_1 et X_2 sont forcément des solutions basiques réalisables, et donc $AX_1 = B$ et $AX_2 = B$ et en les mettant sous la forme de vecteurs, on obtient

$$\sum_{j=1}^{s} c_j A_j = B \text{ et } \sum_{j=1}^{s} d_j A_j = B$$

.

En utilisant le résultat de l'exercice 1 question 4, nous pouvons conclure que $c_j = d_j$ et donc $X_1 = X_2$. Cette contradiction implique le vecteur X est en réalité un point extrême.

Fin correction exercice 5

Exercice 6 – Détermination de Solutions basiques réalisables

Donner une solution basique pour les programmes linéaires donnés dans l'exercice 3.

Correction exercice 6

1. Une solution basique réalisable est la suivante : $x_3 = 5, \ x_4 = 4, \ x_1 = x_2 = 0$,
2. Une solution basique réalisable est la suivante : $x_3 = 0.25, \ x_4 = 1, \ x_1 = x_2 = 0$,
3. Une solution basique réalisable est la suivante : $x_6 = 6, \ x_7 = 12, \ x_8 = 4, \ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$,

Fin correction exercice 6

Exercice 7 – Changement de base

Dans cet exercice, nous allons répondre à la question suivante :"Sous quelle condition un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}$ peut-il remplacer l'un des vecteurs d'une base pour que l'ensemble nouvellement créé soit également une base de $\mathbb{R}^n$? "

1. Soit la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   et le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Exprimer le vecteur v dans la base canonique.
2. Nous considérons la base formé par les vecteurs e_1, e_2, v. Exprimer le vecteur $x = (4, 10, 6)$ dans cette nouvelle base.
3. Généralisons le résultat précédent. Soit un ensemble de vecteurs de base $a_1, \ldots, a_n$ et un vecteur $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur v peut donc s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de base : $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Remplaçons à présent l'un des vecteurs de base, disons a_k par v.
   (a) Donner le nouvel ensemble de n vecteurs.
   (b) Sous quelle condition l'ensemble précédent forme une base ?
   (c) Quel est la condition sur la valeur de α_k afin que les n forment une base ?
   (d) Soit x un vecteur quelconque appartenant à $\mathbb{R}^n$. Exprimer le vecteur v et x dans la base $a_1, \ldots, a_n$. Maintenat exprimer x dans la nouvelle base.

Correction exercice 7

1. Le vecteur v s'exprime dans la base canonique $v = 7e_1 + 0e_2 + 2e_3$. Ainsi $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 2$.
2. Exprimons dans un premier temps le vecteur x dans la base canonique e_1, e_2, e_3. Nous obtonons $x = 4e_1 + 10e_2 + 6e_3$ avec $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 1$ et $\gamma_3 = 6$. Pour exprimer x dans la nouvelle base, on utilise l'expression

$$x = \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\gamma_k)a_i + \frac{\gamma_k}{\alpha_k}v$$

   On trouve alors :

$$\begin{aligned} x &= (4 - \frac{7}{2}e_1) + (10 - \frac{0}{2})e_2 + \frac{6}{2}v \\ &= -17e_1 + 10e_2 + 3v \end{aligned}$$

   Les coordonnées de x dans ceette nouvelle base sont $x = (-17, 10, 3)$.

3. Raisonnons maintenant de façon générale.
   (a) Le nouvel ensemble de vecteurs est $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, v, a_{k+1}, \ldots, a_n$.
   (b) Pour que l'ensemble de vecteurs soit une base de $\mathbb{R}^n$,ceux-ci doivent être linéairement indépendants. Dans notre cas, v ne doit pas être combinaison linéaire des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$. Or v est combinaison linéaires de ces $n-1$ vecteurs si et seulement si$\alpha_k = 0$. Par conséquent les n vecteur formant ce nouvel ensemble sont linéairement indépendants si et seulement si $\alpha_k \neq 0$. De plus,tout vecteur x quelconque appartenant à $\mathbb{R}^n$ doit pouvoir s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$, ce qui n'est possible que si $\alpha_k \neq k$ comme l'indique le développement suivant.
   (c) Dans la base $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n$, v et x s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \ldots + \alpha_n a_n \\ x &= \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k + \ldots + \gamma_n a_n \end{aligned}$$

   Si $\alpha_k \neq 0$, a_k peut être exprimé comme combinaison linéaire de $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, v, a_{k+1}, \ldots, a_n$.

$$a_k = \frac{v - \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_{k-1}a_{k-1} - \alpha_{k+1} - \ldots \alpha_n a_n}{\alpha_k}$$

   Ainsi,

$$a_k = \frac{1}{\alpha_k} - \sum_{i=1, i\neq k}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_k}a_i$$

   Par conséquent, suivant les termes de la nouvelle base, x s'écrit

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k(\frac{1}{\alpha_k} - \sum_{i=1, i\neq k} \frac{\alpha_i}{\alpha_k}a_i) + \ldots + \gamma_n a_n \\ &= \sum_{i=1, i\neq k}^n (\gamma_i \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\gamma_k)a_i + \frac{\gamma_k}{\alpha_k}v \\ x &= \sum_{i=1}^n (\gamma_i \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\gamma_k)a_i + \frac{\gamma_k}{\alpha_k}v \end{aligned}$$

   La dernière implication provient du fait que le coefficient de a_k est nul, $\gamma_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_k}\gamma_k = 0$. Par conséquent, x s'écrit comme combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_{k-1}, v, a_{k+1}, \ldots, a_n$.

Fin correction exercice 7

Université de Montpellier II — 2006/2007

UMIN 207 — Durée: 3h

Méthode de Résolution de problèmes $\mathcal{NP}$-complet

TD – Séance n° 2

Algorithme du simplexe

Exercice 1 – Resolution à l'aide du dictionnaire

Résoudre l'exercice suivant par la méthode du simplexe :

1. en faisant entrer en base celle des variables dont les coefficients est leplus grand dans la fonction objectif ;
2. en faisant entrer en base celle des variables dont l'augmentation de valeur, à partir de 0 permettra d'augmenter le plus la fonction objectif.

$$(PL_1)\begin{cases} \max z(x_1,x_2,x_3,x_4) = 5x_1+6x_2+9x_3+8x_4 \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4 \le 5 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 \le 3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas vous préciserez les variables en base (resp. hors base), la solution basique et la valeur de z.

Correction exercice 1

1. Nous introduisons les variables d'écart x_5, x_6

$$\begin{aligned} x_5 &= 5-x_1-2x_2-3x_3-x_4 \\ x_6 &= 3-x_1-x_2-2x_3-3x_4 \\ z &= 5x_1+6x_2+9x_3+8x_4 \end{aligned}$$

$Base = \{x_5,x_6\}$ et $Hbase = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, la solution basique est donnée par $SB = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,0,0,0,5,3)$ et $z=0$. D'après le critère retenu ici pour faire entrer une variable en base, c'est tou dábord la variable x_3 qui entre en base. La variable sortante est x_6. Le nouveau dictionnaire est le suivant :

$$\begin{aligned} x_5 &= 5-x_1-2x_2-9/2+3/2(x_1+x_2+3x_4)-x_4 \\ x_5 &= (1/2)+(1/2)x_1-(1/2)x_2+(7/2)x_4+(3/2)x_6 \\ x_3 &= (3/2)-(1/2)(x_1+x_2+3x_4+x_6) \\ z &= 27/2+(1/2)x_1+(3/2)x_2-(11/2)x_4-(9/2)x_6 \end{aligned}$$

$Base = \{x_5,x_3\}$ et $Hbase = \{x_1,x_2,x_6,x_4\}$, la solution basique est donnée par $SB = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,0,3/2,0,1/2,0)$ et $z=27/2$.
Si on choisit encore la variable entrante de plus grand coefficient, il ságit de x_2. La variable sortante est alors x_5.

$$\begin{aligned} x_2 &= 1+x_1+7x_4-2x_5+3x_6 \\ x_3 &= 1-x_1-5x_4+x_5-2x_6 \\ z &= 15+2x_1+5x_4-3x_5 \end{aligned}$$

$Base = \{x_2,x_3\}$ et $Hbase = \{x_1,x_5,x_6,x_4\}$, la solution basique est donnée par $SB = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,1,3/2,0,0,0)$ et $z=15$.
Si on choisit encore la variable entrante de plus grand coefficient, il s'agit de x_4. La variable sortante est alors x_3.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2.4-0.4x_1-1.4x_3-0.6x_5+0.2x_6 \\ x_4 &= 0.2-0.2x_1-0.2x_3+0.2x_5-0.4x_6 \\ z &= 16+x_1-x_3-2x_5-2x_6 \end{aligned}$$

$Base = \{x_2,x_4\}$ et $Hbase = \{x_1,x_5,x_6,x_3\}$, la solution basique est donnée par $SB = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,2.4,0,0.2,0,0)$ et $z=16$.
Enfin la variable x_1 entre en base et x_4 en sort

$$\begin{aligned} x_2 &= 2-x_3+2x_4-x_5+x_6 \\ x_1 &= 1-x_3-5x_4+x_5-2x_6 \\ z &= 17-2x_1-5x_4-x_5-4x_6 \end{aligned}$$

$Base = \{x_2,x_1\}$ et $Hbase = \{x_4,x_5,x_6,x_3\}$, la solution basique est donnée par $SB = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (2,1.0,0,0,0,0)$ et $z=17$.

2. Envisageons maintenant, à l'aide du tableau ci-dessous, les quatre possibilités pour le choix de la variable entrante.

variable entrante	x_1	x_2	x_3	x_4
accroissement maximum de la variable	3	5/2	3/2	1
acrroissement correspondant de z	15	15	27/2	8

Le critère acutel conduit à choisr x_1 ou x_2. Faisons par exmeple entrer x_1 ; c'est alors la variable x_6 qui sort ; le nouveau dictionnaire est :

$$\begin{aligned} x_1 &= 3-x_2-2x_3-3x_4-x_6 \\ x_5 &= 2-x_2-x_3+2x_4+x_6 \\ z &= 15+x_2-x_3-7x_4-5x_6 \end{aligned}$$

Seule la variable x_2 est candidate à entrer, la variable x_5 sort; la base est alors constitué de $\{x_1, x_2\}$ et donc la base optimale, déterminéé ci-dessus. Nous remarquons que, avec la première stratégie sur le choix de la variable entrante, le nombre d'étapes est de quatre alors qu'avec la seocnde, ce nombre n'est pplus que de deux. Sur ce cas particulier, la seconde stratégie est plus avantageuse.

Fin correction exercice 1

Exercice 2 – Solutions non unique

Considérons le programme suivant :

$$(PL_2)\begin{cases} \max z(x_1,x_2) = 8x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \leq 32 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner la solution graphique associé à PL_2
2. Donner la solution en utilisant la méthode des tableaux

Correction exercice 2

1. Les valeurs de f aux sommets de la region réalisable sont
   - $A = (0, 16),\ f(0, 16) = 32,$
   - $B = (6, 8),\ f(6, 8) = 64,$
   - $C = (8, 0),\ f(8, 0) = 64,$
   - $D = (0, 0),\ f(0, 0) = 0,$

   La valeur maximale est de 64 et elle est ateinte en deux sommets, B et C. La fonction f prend cette valeur en tout point du segment joignant B et C. L'équation de la droite passant par ces deux points est $x_2 = -4x_1 + 32$. Donc tout point de cette droite compris entre les points B et C est solution optimale. Ainsi le point $x_1 = 7$ et x_2 remplit ces conditions et lón a $f(7, 4) = 64$
2. Appliquons maintenant l'algorithme du simplexe à cet exemple. On obtient les tableaux successifs suivants :

   Le système devient en ajoutant des variables d'écarts :

$$(PL_2)\begin{cases} \max z(x_1,x_2) = 8x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 32 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Fin correction exercice 2

Exercice 3 – Solution non bornée

		c	8	2	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	32	4	1	1	0
0	$x_2^J = x_4$	48	4	3	0	1
	$z(x)$	0	-8	-2	0	0

TAB. 1 – Premier tableau du simplexe, $k = 1$ et $r = 1$

		c	8	2	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
8	$x_1^J = x_1$	8	1	1/4	1/4	0
0	$x_2^J = x_4$	16	2	2	-1	1
	$z(x)$	64	0	2	0	0

TAB. 2 – Second tableau du simplexe

Donner un exemple de problème de programmation linéaire, écrit sous forme standard, non borné.

Correction exercice 3

Considérons le problème :

$$(PL)\begin{cases} \max z(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Toute solution d ela forme $x_1 = 0,\ x_2 = t \geq 0$ est réalisable et pour ces valeurs $z = t$. Comme t n'est pas borné, le problème n'est pas borné.

Fin correction exercice 3

Exercice 4 – Solution non bornée

Donner un exemple de problème de programmation linéaire, écrit sous forme standard, infaisable.

Correction exercice 4

Considérons le problème :

		c	1	9	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_4$	9	1	2	3	1	0
0	$x_2^J = x_5$	15	3	2	2	0	1
	$z(x)$	0	-1	-9	-1	0	0

TAB. 3 – Premier tableau du simplexe $k = 2$ et $r = 1$

$$(PL) \begin{cases} \max z(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Supposons la seconde contrainte satisfaite, on a alors $-x_1 + x_2 \geq -1$ d'où $-3x_1 + 3x_2 \geq -3$; comme $-3 > -4$, la première contrainte $-2x_1 + 3x_2 \leq -4$ n'est pas satisfaite. Le problème est donc infaisable.

Fin correction exercice 4

Exercice 5 – Solution tableau bis

Considérons le problème :

$$(PL) \begin{cases} \max z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 9x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Donner sa solution en utilisant la méthode des tableaux.

Correction exercice 5

Nous mettons ce programme sous forme standard en ajoutant les variables d'écarts x_4 et x_5 dans les deux premières équations Sous forme matricielle, nous obtenons $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^t$, $C = [1, 1, 0, 0]^t$ et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix},\ X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

On a la solution optimale.

Fin correction exercice 5

Exercice 6 – Solution basique initiale non triviale

		c	1	9	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
9	$x_1^J = x_2$	9/2	1/2	1	3/2	1/2	0
0	$x_2^J = x_5$	6	2	0	-1	-1	1
	$z(x)$	81/2	7/2	0	25/2	9/2	0

TAB. 4 – Second tableau du simplexe

		c	$-80 + M$	$-60 + M$	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	0.25	0.2	0.32	1	0
0	$x_2^J = x_4$	1	1	1	0	1
$-M$	$z(x)$	$-M$	$-M + 80$	$-M + 60$	0	0

TAB. 5 – Premier tableau du simplexe. Ici $k = 2$ et $r = 1$

Considérons le problème :

$$(PL) \begin{cases} \min z(x_1, x_2) = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Donner sa solution en utilisant la méthode des tableaux.

Correction exercice 6

- On doit introduire une variable d'écart x_3 dans la première équation et une variable artificielle x_4 dans la second équation. On obtient donc le système suivant et en en prenant le max au lieu du min :

$$(PL) \begin{cases} \max z(x_1, x_2) = -80x_1 - 60x_2 - Mx_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

  Ce qu'on veut faire c'est enlever c'est le x_4 de la fonction objectif : ainsi on a d'après la deuxième équation de (PL) $-x_1 - x_2 + 1 = x_4$ et donc $\max(x_1, x_2) = -80x_1 - 60x_2 - M(-x_1 - x_2 + 1) = (-80 + M)x_1 + (-60 + M)x_2 - M$.
  On obtient ainsi le tableau suivant (voir le premier tableau du simplexe) :
  Or dans la fonction objectif au départ, $\max z(x_1, x_2) = (-80 + M)x_1 + (-60 + M)x_2 - M$ et $\max z(x_1, x_2) = -71.67 + M - M$.
  En prenant $\min = -\max$ on arrive à ce qu'on voulait $\min z(x_1, x_2) = 71.67$. ET voilà.
- On doit introduire une variable d'écart x_3 dans la première équation et une variable artificielle x_4 dans la second équation. On obtient donc le système suivant :

	c		$-80+M$	$-60+M$	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
$M-60$	$x_1^J = x_2$	$0,78125$	0.625	1	$3,125$	0
0	$x_2^J = x_4$	$0,21875$	$0,375$	0	$-3,125$	1
$-M$	$z(x)$	$-46,875+0,78125M$	$42,5-0,375M$	0	$-187,5+3,125M$	0

TAB. 6 – Second tableau du simplexe. Ici $k=1$ et $r=2$.

	c		$-80+M$	$-60+M$	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
$M-60$	$x_1^J = x_2$	0.4167	0	1	$6,208$	$-1,66$
$M-80$	$x_2^J = x_1$	0.5833	1	0	-8.3333	$2,666$
$-M$	$z(x)$	$-71.67+M$	0	0	$-541,6666+6,2071M$	$-15,9375+0,14M$

TAB. 7 – Dernier tableau du simplexe

$$(PL)\begin{cases} \min z(x_1,x_2) = 80x_1 + 60x_2 + Mx_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Fin correction exercice 6

Exercice 7 – Algorithme du simplexe

On considère le programme linéaire suivant :

$$(PL)\begin{cases} \min z(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Mettre ce programme sous forme standard en vue de la résolution par l'algorithme du simplexe. En supposant que vous ne disposiez pas d'une solution de départ qui soit admissible (ou réalisable), à quelle démarche initiale devrez-vous avoir recours pour amorcer la résolution de ce P.L. ?

	c		80	60	0	M
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	0	0.2	0.32	1	0
0	$x_2^J = x_4$	1	1	1	0	1
	$z(x)$	M	$M-80$	$M-60$	0	0

TAB. 8 – Premier tableau du simplexe

	c		80	60	0	M
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	0.05	0.0	0.12	1	0
80	$x_2^J = x_1$	1	1	1	0	0
	$z(x)$	80	0	20	0	0

TAB. 9 – Second tableau du simplexe

	c		80	60	0	M
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
60	$x_1^J = x_2$	0.4167	0	1	8.3333	0
80	$x_2^J = x_1$	0.5833	1	0	-8.3333	0
	$z(x)$	71.67	0	0	-166.7	0

TAB. 10 – Dernier tableau du simplexe

2. Dresser alors le tableau intial du simplexe.
3. Par quel changement de variable, on peut se ramener à un P.L. pour lequel l'origine est admissible. Quel-est-il ?

Correction exercice 7

1. Si on remplace chaque inégalité de la forme canonique pa run eégalité. Cette forme standard s'obtient en ajoutant une variable d'écart qui représente l'écart par rapport à la valeur du seuil laquelle est positive. Ces variables d'écart sont positives. Dans la forme standared, les variables d'écart ont une contribution nulle quant à la fonction objective.

$$(PL)\begin{cases} \min z(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 20 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

avec x_3 et x_4 des variables de surplus et x_5 et x_6 des variables d'écart.

2. Nous voyons qu'il n'existe pas d ebase intiale évidente pour la détermination de la solution par la méthode du simplexe, en effet toutes les variables d'écart ne pas positives. La base qui serait formée par ces variables d'écart n'est pas admissible.

   Nous allons utiliser un procédé consistant à introduire des variables artificielles, pour obtenir une base intiale admissible.

   Pour obtenir une solution réalisable il suffira de faire sortir de la base les variables artificielles.Pour cela, deux méthodes peuvent être utilisées :
   – La méthode en deux phases
   – La méthode ds pénalités

		c	-2	-3	0	0	0	0	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	$x_1^J = x_7$	4	1	0	-1	0	0	0	1	0
0	$x_2^J = x_8$	3	0	1	0	-1	0	0	0	1
0	$x_3^J = x_5$	13	1	1	0	0	1	0	0	0
0	$x_4^J = x_6$	20	1	2	0	0	0	1	0	0
	$z(x)$	$7M$	$2-M$	$-M$	M	M	0	0	0	0

TAB. 11 – Premier tableau du simplexe

		c	-2	-3	0	0	0	0	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	$x_1^J = x_1$	4	1	0	-1	0	0	0	1	0
0	$x_2^J = x_8$	3	0	1	0	-1	0	0	0	1
0	$x_3^J = x_5$	9	0	1	1	0	1	0	-1	0
0	$x_4^J = x_6$	16	0	2	1	0	0	1	-1	0
	$z(x)$	$3M+8$	0	$3-M$	2	M	0	0	$-2+M$	0

TAB. 12 – Second tableau du simplexe

Pour ces deux méthodes la base initiale de départ est composée de toutes les variables artificielles. IL faut, en partant de cette base, obtenir une base intiale ne comportant plus aucune variable artificielle et cela en déroulant l'algorithme du simplexe. Celles-ci seront hors base sinon cela signifie que des contraintes sont contradictoires. Nous utiliserons la méthode des pénalités.

Le programme linéaire s'écrit en introduisant dans la fonction objective les variable sartificielles pénalisées par un coefficient, M très grand, devant les autres valeurs des coefficients de la fonction objective et ce M est positif.

On obtient donc ne introduisant deux nouvelles variables artificielles dans les deux premières équations :

$$(PL)\begin{cases} \max -z(x_1,x_2) = -2x_1 - 3x_2 - Mx_5 - Mx_6 \\ x_1 - x_3 + x_7 = 4 \\ x_2 - x_4 + x_8 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 20 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Par application du premier critère de Dantzig la variable entrante dans la base est celle ayant le plus fort coefficient positif (si maximisation). Ici c'est x_1. Celle sortant de la base est celle ayant le plus peit rapport, b_i/a_{ij} ici x_7. On modifie par substitution à láide de cette ligne les autres lignes du tableau y compris celle des profits marginaux de façon à annuler les coeeficients de la colonne de base du tableau et de la fonction économique.

On soustrait la ligne du pivot de la ligne correspondant à x_5 et x_6. On sosutrait la ligne du pivot multipliée par $(2-M)$ de la ligne de la fonction économique. On obtient

		c	-2	-3	0	0	0	0	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	$x_1^J = x_1$	4	1	0	-1	0	0	0	1	0
3	$x_2^J = x_2$	3	0	1	0	-1	0	0	0	1
0	$x_3^J = x_5$	6	0	0	1	1	1	0	-1	-1
0	$x_4^J = x_6$	10	0	0	0	2	0	1	-1	-2
	$z(x)$	17	0	0	2	3	0	0	$-2+M$	$M-3$

TAB. 13 – Dernier tableau du simplexe

Par application du premier critère de Dantzig la variable entrant en base est celle ayany le plus fort coefficient positif (si maximisation). Ici x_2. Celle sortante de la base est celle ayant le pivot le plus petit, ici c'est x_8.

Nous avons maintenant une base intiale mous permettant de continuer le processus dóptimisation sans variable artificielle. Celle-ci s'écrit $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$. Tous les coefficients de la fonction économique sont positif ou nuls nous sommes donc à l'optimum, $z = 17$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_5 = 6, x_7 = 10$.

3. Reprenons le programme linéaire sous sa forme canonique :

$$(PL)\begin{cases} \min z(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$(PL)\begin{cases} Y_1 = x_1 - 4 \\ Y_2 = x_2 - 3 \end{cases}$$

$$(PL)\begin{cases} x_1 = Y_1 + 4 \\ x_2 = Y_2 + 3 \end{cases}$$

Avec ce changement de variable, on obtient

$$(PL)\begin{cases} \min z(Y_1,Y_2) = 2(Y_1+4) + 3(Y_2+3) \\ Y_1 + 4 + 2(Y_2+3) \leq 13 \\ Y_1 + 4 + Y_2 + 3 \leq 20 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

On a donc

$$(PL)\begin{cases} \min z(Y_1,Y_2) = 2Y_1 + 3Y_2 + 17 \\ Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 3 \\ Y_1 + Y_2 + Y_4 = 13 \\ Y_i, \geq 0 \end{cases}$$

Nous sommes déjà à l'optimum. Donc en revenant aux varaibles x_1 et x_2 on trouve $x - 1 = 4$, $x_2 = 3$ et $z(x) = 17$.

		c	2	3	0	0
c^J	variables de base		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	$x_1^J = Y_3$	3	1	2	1	0
0	$x_2^J = Y_4$	13	1	1	0	1
	$z(x)$	17	-2	-3	0	0

TAB. 14 – Premier tableau du simplexe avec les variables Y_1 et Y_2

		c	c	1	0	0
c^J	variables de base		$x_1 \dots x_{n-1}$	x_n	$y_1 \dots y_{n-1}$	y_n
0	$x_l^J = y_l$	b	A	0	I	0
1	$x_n^J = x_n$	5^n	$2c$	1	0	1
	$z(x)$	5^n	c	0	0	1

TAB. 15 – Dernier tableau du simplexe pour PL_n

Fin correction exercice 7

Exercice 8 – La méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale

Dans cet exercice nous allons montrer que la méthode du simplexe n'est pas méthode polynomiale. Pour cela, nous allons considérer le programme linéaire suivant :

$$(PL_n)\begin{cases} \max\ 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n \\ x_1 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ \vdots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + 2^{n-2}x_3 + \ldots + 4x_{n-1} + x_n \leq 5^n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner la forme standard de PL_n.
2. Donner la solution optimale.
3. Montrer que $\forall i, x_i$ et y_i (y_i est la varaible d'écart associé à la variable x_i) ne peuvent être en même temps des variables hors base.
4. Nous allons montrer que 2^n tableaux sont nécessaires pour résoudre ce problème.
   (a) Vérifier-le pour $n = 1$.
   (b) Montrer-le pour $n = 2$
      i. Résoudre graphiquement.
      ii. Résoudre par la méthode des tableaux. Combien de tableaux sont nécessaires pour résoudre PL_2 ?
      iii. Quel est le chemin des visites des points extrêmes. Montrez que le dernier tableau peut se mettre sous la forme (voir le tableau 15).
      avec $l \in \{1, \dots, n-1\}$ et $c = (2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2)$ et A est la matrice associé au $n-1$ première contraintes et la dernière contrainte est $2cx + x_n \leq 5^n$.

		$2c$	2	1	1	0	0	0
c^J	variables de base		$x_1 \dots x_{n-1}$	x_n	x_{n+1}	$y_1 \dots y_{n-1}$	y_n	y_{n+1}
0	$x_l^J = y_l$	b	A	0	0	I	0	0
1	$x_n^J = x_n$	5^n	$2c$	1	0	0	1	0
1	$x_{n+1}^J = y_{n+1}$	5^n	$-4c$	0	1	0	-4	1
	$z(x)$	2.5^n	$2c$	0	-1	0	2	0

TAB. 16 – tableau 2^n du simplexe pour PL_{n+1}

   (c) Supposons par hypothèse de récurrence que la résolution du programme linéaire PL_n nécessite 2^n tableaux, nous allons montrer que la résolution de programme linéaire PL_{n+1} nécessite 2^{n+1} tableaux.
      i. Ecrire le premier tableau de PL_{n+1} . Que remarque-t'on lorsqu'on enlève deux lignes et deux colonnes. Conclure sur les 2^n premiers tableaux. Donner les variables hors et les variables en base.
      ii. Soit le 2^n ième tableaux associé à PL_{n+1} (voir le tableau 16). Ecrire le tableau 2^n+1.
      iii. Combien est-il nécessaire d'effectuer de modification pour obtenir le tableau final pour PL_{n+1}
5. Conclure.

Correction exercice 8

1. Nous rajoutons n variables d'écarts y_i.
2. La solution optimale est donnée quand $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ et $x_n = 5^n$. Donc la solution basique liée à la solution optimale est $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n)$.
3. $\exists! i \backslash x_i = y_i = 0$. Donc le programme linéaire devient

$$(PL_n)\begin{cases} \max\ 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n \\ x_1 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ \vdots \\ 2^{i-1}x_1 + 2^{i-2}x_2 + \ldots + 4x_{i-2} + x_{i-1} + y_{i-1} \leq 5^{i-1} \\ 2^i x_1 + 2^{i-1}x_2 + \ldots + 4x_{i-1} + x_i + y_i \leq 5^i \\ \vdots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + 2^{n-2}x_3 + \ldots + 4x_{n-1} + x_n \leq 5^n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi si $y_{i-1} = 0$ alors on a pas égalité entre les deux équations 3 et 3. Si $x_{i-1} = 0$ alors $y_{i-1} < 0$, ceci est impossible.

		c	1	-2	1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
0	$x_1^J = y_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^J = y_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0

TAB. 17 – Premier tableau du simplexe pour PL_2

		c	1	-2	1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
1	$x_1^J = x_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^J = y_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	-1	2	0

TAB. 18 – Second tableau du simplexe pour PL_2

4. Nous sommes dans la phase de récurrence
   (a) Pour $n = 1$ c'est facile.
   (b) Pour $n = 2$
      i. Graphiquement c'est facile, il suffit de regarder le polytope associé aux contraintes et de calculer toutes les valeurs associées à la fonctions objective pour tous les points extrêmes.
      ii. Voici la succession des tableaux pour résoudre PL_2. On a $r = k = 1$.
      On $k = r = 2$ Ona $r = 1$ et $k = 3$.
      Il faut quatre tableaux pour résoudre PL_2.
      iii. Nous avons quatre sommets de coordonnées $A = (0, 0),\ B = (5, 0),\ C = (5, 5),\ D = (0, 25)$. On suit ce chemin la et la fonction objective passe de $0 \to 10 = 2 \times 5 \to 15 = 3 \times 5 \to 25 = 5^2$.
   (c) Nous allons nous basé sur ce qui a été fait précédemment.
      avec $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $c = (2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2)$ et A est la mtrice associé au $n - 1$ première contraintes et la dernière contrainte e st $2cx + x_{n+1} \leq 5^{n+1}$.
      IL est clair que avec ce que l'on a vu précédemment la colonne qui va être choisie c'est $l \in \{1, \ldots, n\}$ (dans cette ordre) et nous arrivons au tableau 16.

		c	1	-2	1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
2	$x_1^J = x_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^J = x_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	15	0	0	-2	1

TAB. 19 – Troisième tableau du simplexe pour PL_2

		c	1	-2	1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
0	$x_1^J = y_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^J = x_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	25	2	0	0	1

TAB. 20 – Dernier tableau du simplexe pour PL_2

i.

		$2c$	2	1	1	0	0	0
c^J	variables de base		$x_1 \ldots x_{n-1}$	x_n	x_{n+1}	$y_1 \ldots y_{n-1}$	y_n	y_{n+1}
0	$x_l^J = y_l$	b	A	0	0	I	0	0
1	$x_n^J = x_n$	5^n	$2c$	1	0	0	1	0
1	$x_{n+}^J = y_{n+1}$	5^{n+1}	$4c$	4	1	0	0	1
	$z(x)$	5^n	$-2c$	-2	-1	0	0	0

TAB. 21 – Premier tableau du simplexe pour PL_{n+1}

Lorsque nous supprimons une ligne et une colonne on retrouve le premier tableau pour PL_n avec la dernière multiplié par 2. Ainsi les 2^n premiers tableaux sont similaires à ceux de de PL_n. De plus, la colonne pivot n'est pas la $(n + 1)$ ieme, et la ligne du pivot ne sera la dernière car dans la cas contraire on violeraile principe de la question 3 c'est à dire x_{n+1} et y_{n+1} varaible non basique. Ainsi après le $2^n - 1$ pivot, les variables de base sont $y_1,\ y_2,\ \ldots, x_N, y_{n+1}$. Alors le 2^n tableau pour PL_{n+1} est donné par 16. Le 2^n pivot est clair et unique. Enlevons encore une fois la dernière ligne et les deux colonnes contenant x_{n+1} et y_{n+1} le tableau $2^n + 1$ est similaire au premier tableau de PL_n (voir 22) avec pour différence la dernière ligne multiplier par 2 et la valeur objective est de 3.5^n.
avec $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $c = (2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2)$ et A est la mtrice associé au $n - 1$ première contraintes.

iii. IL faut faire encore 2^n tableaux, voici le dernier tableau (voir tableau 24).

5. On a bien montrer par récurrence qu'il faut 2^n tableaux pour obtenir la solution au programme PL_n.

Fin correction exercice 8

		$2c$	2	1	0	0
c^J	variables de base		$x_1 \ldots x_{n-1}$	x_n	$y_1 \ldots y_{n-1}$	y_n
0	$x_l^J = y_l$	b	A	0	I	0
1	$x_n^J = x_n$	5^n	$2c$	1	0	1
	$z(x)$	3.5^n	$-c$	-1	0	0

TAB. 22 – Premier tableau du simplexe pour PL_n

ii.

		$2c$	2	1	1	0	0	0
c^J	variables de base		$x_1 \ldots x_{n-1}$	x_n	x_{n+1}	$y_1 \ldots y_{n-1}$	y_n	y_{n+1}
0	$x_l^J = y_l$	b	A	0	0	I	0	0
1	$x_n^J = x_n$	5^n	$2c$	1	0	0	1	0
1	$x_{n+1}^J = y_{n+1}$	5^n	$-4c$	0	1	0	-4	1
	$z(x)$	3.5^n	$-2c$	0	0	0	-2	1

TAB. 23 – tableau 2^n+1 du simplexe pour PL_{n+1}

		$2c$	2	1	1	0	0	0
c^J	variables de base		$x_1 \ldots x_{n-1}$	x_n	x_{n+1}	$y_1 \ldots y_{n-1}$	y_n	y_{n+1}
0	$x_l^J = y_l$	b	A	0	0	I	0	0
1	$x_n^J = x_n$	5^n	$2c$	1	0	0	1	0
1	$x_{n+1}^J = y_{n+1}$	5^{n+1}	$4c$	4	1	0	0	1
	$z(x)$	5^{n+1}	$2c$	2	0	0	0	1

TAB. 24 – tableau 2^{n+1} du simplexe pour PL_{n+1}

Méthode de Résolution de problèmes $\mathcal{NP}$-complet
TD – Séance n° 2

Dualité et analyse de sensibilité

Exercice 1 – Détermination du dual

Déterminer le dual des programmes suivants :

1.

$$(PL_0)\begin{cases} \min z(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.

$$(PL_1)\begin{cases} \max z(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Montrer que les programmes dual et primal de PL_1 admettent la même valeur optimale pour z, et que la solution de chaque programme (primal et dual) est incluse dans les taleaux finaux du simplexe de l'autre.
4. Résoudre le programme suivant :

$$(PL_2)\begin{cases} \min z(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + x_6 \geq 7 \\ x_1 + x_2 \geq 20 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_4 \geq 20 \\ x_4 + x_5 \geq 10 \\ x_5 + x_6 \geq 5 \\ x_i, \geq 0 \end{cases}$$

Correction exercice 1

1. Le dual est donné par le programme PL_0bis, et est déterminé en prenant lóptimum opposé, en changeant les valeurs qui se trouvent dans la fonction objective et les contraintes, on obtient :

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_3$	10	1	5	1	0	0
0	$x_2^J = x_4$	6	1	3	0	1	0
0	$x_3^J = x_5$	8	2	2	0	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0	0

TAB. 1 – Premier tableau du simplexe pour le primal

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_3$	6	0	4	1	0	$-1/2$
0	$x_2^J = x_4$	2	0	2	0	1	$-1/2$
2	$x_3^J = x_1$	4	1	1	0	0	$1/2$
	$z(x)$	8	0	1	0	0	1

TAB. 2 – Dernier tableau du simplexe pour le primal

$$(PL_0bis)\begin{cases} \max z(w_1,w_2,w_3,w_4) = 20w_1 + 30w_2 + 40w_3 + 50w_4 \\ 2w_1 + 6w_2 + 7w_3 + w_4 \leq 5 \\ 3w_1 + 8w_2 + w_3 + 2w_4 \leq 2 \\ w_1 + 5w_2 + 3w_3 + 4w_4 \leq 1 \\ w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{cases}$$

2.

$$(PL_1bis)\begin{cases} \min z(w_1,w_2,w_3) = 10w_1 + 6w_2 + 8w_3 \\ w_1 + w_2 + w_3 \geq 2 \\ 5w_1 + 3w_2 + 2w_3 \geq 1 \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Nous introduisons les variables d'écart x_3, x_4 et x_5 dans les contraintes du programme PL_1 et nous utilisons la méthode du simplexe pour résoudre PL_1. Le tableau 1 donne le tableau initial et 2 le tableau final pour le primal (PL_1)..

   Les trois dernières valeurs de la dernière ligne correspondant aux valeurs du coût réduit associé aux variables d'écart sont les solutions du dual c'est à dire $w_1^* = 0$, $w_2^* = 0$ et $w_3^* = 1$.

   Nous pouvons directement résoudre le dual en introduisant des variables de surplus w_4 et w_5 et des variables artificielles w_6 et w_7 au programme PL_1bis et appliqué la méthode M ou méthode des deux phases.

   Nous obtenons le tableau 3 et le tableau final pour le dual 4

   La solution du dual se lit de la manière suivante : $w_1^* = 0$, $w_2^* = 0$ et $w_3^* = 1$ avec $z^* = -(-8)$. La solution du primal est donnée sur la dernière ligne les deux dernières colonnes correspondant aux variables de surplus.
4. Si nous voulions résoudre directement ce programme nous devrions introduire 12 nouvelles variables; six varaibles de surplus et six variables artificielles et utiliser la méthode à deux phases. Une approche plus judicieuse préconise d'utiliser le dual :

		c	10	6	8	0	0	M	M
c^J	variables de base		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
M	$x_1^J = w_6$	2	1	1	2	-1	0	1	0
M	$x_2^J = w_7$	1	5	3	2	0	-1	0	1
	$z(x)$	0	-6	-4	-4	1	1	0	0

TAB. 3 – Premier tableau du simplexe pour le dual

		c	10	6	8	0	0
c^J	variables de base		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0	$x_1^J = w_5$	1	-4	-5	0	-1	1
8	$x_2^J = w_3$	1	$1/2$	$1/2$	1	$-1/2$	0
	$z(x)$	-8	6	2	0	4	0

TAB. 4 – Dernier tableau du simplexe pour le dual

$$(PL_2bis)\begin{cases} \max z(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6) = 7w_1 + 20w_2 + 14w_3 + 20w_4 + 10w_5 + 5w_6 \\ w_1 + w_2 \leq 1 \\ w_2 + w_3 \leq 1 \\ w_3 + w_4 \leq 1 \\ w_4 + w_5 \leq 1 \\ w_5 + w_6 \leq 1 \\ w_1 + w_6 \leq 1 \\ w_i \geq 0 \end{cases}$$

On obtient donc le premier tableau (voir 5).

Le système est mis sous forme standard en introduisant six nouvelles variables d'écart, et nous appliquons la méthode du simplexe générant plusieurs tableau, le tableau 6 donne la solution optiamle du dual, et la solution du primal est donné par les dernière colonnes du tableau 6. On trouve $x_1^* = 2,\ x_2^* = 18,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 20,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 5$ avec $z^* = 45$.

		c	7	20	14	20	10	5	0	0	0	0	0	0
c^J	variables de base		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
0	$x_1^J = w_7$	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	$x_2^J = w_8$	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	$x_3^J = w_9$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	$x_4^J = w_{10}$	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	$x_5^J = w_{11}$	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	$x_6^J = w_{12}$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
	$z(x)$	0	-7	-20	-14	-20	-10	-5	0	0	0	0	0	0

TAB. 5 – Premier tableau du simplexe pour le dual associé à PL_2

		c	7	20	14	20	10	5	0	0	0	0	0	0
c^J	variables de base		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
7	$x_1^J = w_1$	0	1	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
20	$x_2^J = w_2$	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	$x_3^J = w_9$	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0
20	$x_4^J = w_4$	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	$x_5^J = w_{11}$	0	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	1	-1
5	$x_6^J = w_6$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
	$z(x)$	45	0	0	4	0	10	0	2	18	0	20	0	5

TAB. 6 – Dernier tableau du simplexe pour le dual associé à PL_2

		c	2	-3	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_4$	$7/3$	0	5	0	1	$-2/3$	$-1/3$
2	$x_2^J = x_1$	$1/3$	1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$
1	$x_3^J = x_3$	$8/3$	0	-2	1	0	$-1/3$	$4/3$
	$z(x)$	$10/3$	0	3	0	0	$1/3$	$2/3$

TAB. 7 – Dernier tableau du simplexe pour PL_3

Fin correction exercice 1

Exercice 2 – Analyse de sensibilité

Soit le programme linéaire ci-dessous :

$$(PL_3)\begin{cases} \max z(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Le résoudre par la méthode des tableaux.
2. Poser le programme dual ; quelles sont les difficultés de sa résolution ? Poser le premeir tableau (sans poursuivre plus loin la résolution).
3. Le tableau optimal du primal est le suivant :

   Donner les valeurs de $w_1,\ w_2, w_3, \ldots,$ de l'optimal du dual. On ne demande pas le tableau optimal du dual.
4. Le coefficient de x_3 passe de 1 à $(1+\lambda)$ avec $-1 < \lambda$. Recalculer les coûts réduits et discuter leur signe. Que devient l'optimum lorsque $1 < \lambda < 3/2$?

Correction exercice 2

	c		2	-3	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_4$	6	3	6	1	1	0	0
0	$x_2^J = x_5$	4	4	2	1	0	1	0
0	$x_3^J = x_6$	3	1	-1	1	0	0	1
	$z(x)$	0	0	-2	3	-1	0	0

TAB. 8 – Premier tableau du simplexe pour PL_3

	c		2	-3	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_4$	3	0	$9/2$	$1/4$	1	$-3/4$	0
2	$x_2^J = x_1$	1	1	$1/2$	$1/4$	0	$1/4$	0
0	$x_3^J = x_6$	2	0	$-3/2$	$3/4$	0	$-1/4$	1
	$z(x)$	2	0	4	$-1/2$	0	$1/2$	0

TAB. 9 – Deuxième tableau du simplexe pour PL_3

1.

$$(PL_3)\begin{cases} \max z(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient :

2. Voici le dual :

$$(PL_3bis)\begin{cases} \min z(w_1,w_2,w_3) = 6w_1 + 4w_2 + 3w_3 \\ 3w_1 + 4w_2 + w_3 \geq 2 \\ 6w_1 + 2w_2 - w_3 \geq -3 \\ w_1 + w_2 + w_3 \geq 1 \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les difficultés de sa résolution viennent du fait qu'il n'existe pas de base intiale de départ des itérations évidentes. En effet le signe des contraintes est $(\geq)$ les variables d'écart qu'il va falloir associer pour obtenir le forme standard seront négatives. Elles ne peuvent don cformer

	c		2	-3	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_4$	$7/3$	0	5	0	1	$-2/3$	$-1/3$
2	$x_2^J = x_1$	$1/3$	1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$
1	$x_3^J = x_3$	$8/3$	0	-2	1	0	$-1/3$	$4/3$
	$z(x)$	$10/3$	0	3	0	0	$1/3$	$2/3$

TAB. 10 – Dernier tableau du simplexe pour PL_3

	c		6	4	3	0	0	0
c^J	variables de base		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
4	$x_1^J = w_2$	$1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$
3	$x_2^J = w_3$	$2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	0	$-4/3$
0	$x_3^J = w_5$	3	-5	0	0	-1	1	2
	$z(x)$	$10/3$	$7/3$	0	0	$1/3$	0	$8/3$

TAB. 11 – Dernier tableau du simplexe pour PL_3

	c		2	-3	$1+\lambda$	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_4$	$7/3$	0	5	0	1	$-2/3$	$-1/3$
2	$x_2^J = x_1$	$1/3$	1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$
$1+\lambda$	$x_3^J = x_3$	$8/3$	0	-2	1	0	$-1/3$	$4/3$
	$z(x)$	$10/3 - 8\lambda/3$	0	$3 - 2\lambda$	0	0	$-1/3(\lambda - 1)$	$2/3(1+2\lambda)$

TAB. 12 – Dernier tableau du simplexe pour PL_3 avec le paramètre λ

une base admissible ou réalisable. Il faut introduire des variables artificielles et résoudre ce problème dit augmenté soit par la méthode en deux phases soit par la méthode des pénalités.

3. Voici le tableau du dual à l'optimum :

Correspondances entre les variables primales et duales

V. primales	V. duales	V.B primale	V.B. primale	V.B. duales	V.B. duales
x_1	w_4	x_1	$1/3$		
x_2	w_5			w_5	3
x_3	w_6	x_3	$8/3$		
x_4	w_1	x_4	$7/3$		
x_5	w_2			w_2	$1/3$
x_6	w_3			w_3	$2/3$

Correspondance entre les éléments du tableau : $x_4x_2 = -w_5w_1$, $x_4x_5 = -w_2w_1$, $x_4x_6 = -w_6w_1$, $x_1x_2 = -w_5w_4$, $x_1x_5 = -w_2w_4$, $x_1x_6 = -w_3w_4$, $x_3x_2 = -w_5w_6$, $x_3x_5 = -w_2w_6$, $x_3x_6 = -w_3w_6$. Le tableau final du dual

4. Sensibilité du paramètre. Reprenons le dernier tableau dus implexe et adaptons-le avec le nouveau paramètre λ.

Regardons selon le signe de λ les modifications possibles :

	$1/2$	1	$3/2$	
$3 - 2\lambda$	+	+	+	$-$
$-1/3(\lambda-1)$	+	+	$-$	$-$
$2/3(1+2\lambda)$	$-$	+	+	+
Sensibilité	$x_6 \leftarrow$ $x_3 \rightarrow$	Solution inchangée	$x_5 \rightarrow$ $x_1 \leftarrow$	$x_2 \rightarrow$ $x_1 \leftarrow$

On effectue une nouvelle itération du simplexe et on obtient

Nouvelle discussion en fonction du paramètre λ :

		c	2	-3	$1+\lambda$	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_4$	3	2	7	0	1	0	-1
0	$x_2^J = x_5$	1	3	3	0	0	1	-1
$1+\lambda$	$x_3^J = x_3$	3	1	-1	1	0	0	1
	$z(x)$	$3-3\lambda$	$\lambda-1$	$2-\lambda$	0	0	0	$1+\lambda$

TAB. 13 – Nouveau tableau du simplexe pour PL_3 avec le paramètre λ

	-1	1	2	
$\lambda-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2-\lambda$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\lambda+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Sensibilité			Solution inchangée	

La solution trouvée est la même.

Fin correction exercice 2

Exercice 3 – Sensibilité bis

Un industriel veut fabriquer trois mélanges, M_1 M_2 et M_3 constitué de trois produits de base P_1 P_2 et P_3. La compposition des mélanges donée en unités appropriées est la suivante :

	M_1	M_2	M_3
P_1	5	10	2.5
P_2	10	10	5
P_3	1	10	1

Les rendements sont tels que la quantité de mélange M_3 utilisé est double de celle de M_1. A chaque fabrication la quantité maximale utilisable des produits P_1, P_2 et P_3 est respectivement de : 240 unités pour P_1, 400 unités pour P_2 et 180 unités pour P_3. La quantité de mélange M_1 produite doit être au minimu de 6 unités et celle de M_2 de 2 unités. Le profit unitaire pour M_1 est de 20 unités monétaires celui pour M_2 est 18 unités et celui M_3 de 5 unités. On demande

1. Après avoir défini avec précision les variables utilisées, formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire qui maximise le profit industiel. On donnera dábord le programme linéaire sous la forme canonique puis sous la forme standard. Il est possible de simplifier le problème de la recherche de la base intiale en utilisant un changement de variable approprié. Préciser ce changement de variables et donner alors le programme linéaire ainsi simplifié sous forme standard.
2. Utiliser la méthode des tableaux pour dérouler l'algorithme du simplexe afin de résoudre ce problème. On donnera
   (a) la solution initiale de base en la justifiant
   (b) les valeurs des variables de base et la valeur optimale de la fonction économique z. Toutes les étapes du déroulement de lálgoirthme seront données.

3. Donner une représentation graphique du polyèdre des contraintes en y situant la solution optimale.
4. Donner le programme linéaire dual.
   (a) Quelles sont les difficultés pour sa résolution ?
   (b) Donner à partir de la solution optimale du primal, le tableau optimal du dual.
5. Le profit untaire du produit M_1 est sujet à des variations. Celles-ci peuvent être approximées par une loi de la forme $20(1+\lambda)$. Que devient la solution optimale, du primal, si le coefficient λ varie $[-1 - -\infty[$
   (a) Donner le nouveau tableau du simplexe en fonction de λ.
   (b) Discuter des évolutions de la solution optimale en fonction de λ. Déterminer les cas où de nouvelles itération d'optimisations sont nécessaires (on ne demande pas de les effectuer).

Correction exercice 3

1. Nous formulons le problème sous forme d'un programme linéaire :
   – x_1 est la masse du mélange de type M_1
   – x_2 est la masse du mélange de type M_2
   – x_3 est la masse du mélange de type M_3
   Le problème mis sous sa forme canonique :

$$(PL_4)\begin{cases} \max z(x_1,x_2,x_3) = 20x_1 + 18x_2 + 5x_3 \\ 5x_1 + 10x_2 + 2.5x_3 \leq 240 \\ 10x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 400 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 \leq 180 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Sachant que $2x_1 - x_3 = 0$ on obtient

$$(PL_{4'})\begin{cases} \max z(x_1,x_2) = 30x_1 + 18x_2 \\ 10x_1 + 10x_2 \leq 240 \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 400 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On peut simplifier l'expression de ce programme linéaire en posant $X_1 = x_1 - 6$ et $X_2 = x_1 - 2$ et en reportant dans les contraintes on obtient

(b)

		c	30	18	0	0	0
c^J	variables de base		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	$x_1^J = X_4$	160	10	10	1	0	0
0	$x_2^J = X_5$	260	20	10	0	1	0
0	$x_3^J = X_6$	142	3	10	0	0	1
	$z(x)$	216	-30	-18	0	0	0

TAB. 14 – Premier tableau du simplexe pour $PL_{4''}$

		c	30	18	0	0	0
c^J	variables de base		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	$x_1^J = X_4$	30	0	5	1	-0.5	0
30	$x_2^J = X_1$	13	1	5	0	0.05	0
0	$x_3^J = X_6$	103	0	8.5	0	-0.15	1
	$z(x)$	606	0	-3	0	-1.5	0

TAB. 15 – Second tableau du simplexe pour $PL_{4''}$

$$(PL_{4''})\begin{cases} \max z(X_1,X_2) = 30X_1 + 18X_2 + 216 \\ 10X_1 + 10X_2 \leq 240 \\ 20X_1 + 10X_2 \leq 400 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 142 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Voici maintenant la forme standard :

$$(PL_{4''})\begin{cases} \max z(X_1,X_2) = 30X_1 + 18X_2 + 216 \\ 10X_1 + 10X_2 + X_3 = 240 \\ 20X_1 + 10X_2 + X_4 = 400 \\ 3X_1 + 10X_2 + X_5 = 142 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) La solution basique initiale est ici évidente est formée par les variables d'écart.

Tous les coefficients de la fonction économiques sont négatifs ou nuls nous sommes à l'optimum. $Z = 624, X_1 = 10, X_2 = 6, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 52$ et donc en revenant aux premières variables : $Z = 624, x_1 = 16, x_2 = 8, x_3 = 32, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6, = 52$

		c	30	18	0	0	0
c^J	variables de base		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
18	$x_1^J = X_2$	6	0	1	0.2	-0.1	0
30	$x_2^J = X_1$	10	1	0	-0.1	0.1	0
0	$x_3^J = X_6$	52	0	0	-1.7	0.7	1
	$z(x)$	606	0	-3	0	-1.5	0

TAB. 16 – Dernier tableau du simplexe pour $PL_{4''}$

		c	160	260	142	0	0
c^J	variables de base		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
160	$x_1^J = w_1$	0.6	1	0	1.7	0.1	-0.2
1.2	$x_2^J = w_2$	1.2	0	1	-0.7	-0.1	0.1
	$w(x)$	624	0	0	52	10	6

TAB. 17 – Solution optimale du dual $PL_{4''}bis$

(a)

		c	$30(1+(2/3)\lambda)$	18	0	0	0
c^J	variables de base		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
18	$x_1^J = X_2$	6	0	1	0.2	-0.1	0
$30(1+(2/3)\lambda)$	$x_2^J = X_1$	10	1	0	-0.1	0.1	0
0	$x_3^J = X_6$	52	0	0	-1.7	0.7	1
	$z(x)$	$216 + 120\lambda$	0	-3	$0.6 - 2\lambda$	$2\lambda + 1.2$	0

TAB. 18 – Dernier tableau du simplexe pour $PL_{4''}$

3. A faire
4. (a) A partir du primal réduit nous obtenons :

$$(PL_{4''}bis)\begin{cases} \min z(w_1, w_2, , w_3, w_4, w_5) = 160w_1 + 260w_2 + 142w_3 \\ 10w_1 + 20w_2 + 3w_3 \geq 30 \\ 10w_1 + 10w_2 + 10w_3 \geq 18 \\ w_i \geq 0 \end{cases}$$

La difficulté de résolution est la nécessité de trouver une base intiale de départ. En effet celle-ci n'est pas évidente car les variables d'écart introduites sont négatives et la base correspondante n'est pas admissible. IL faut introduire des variables artificielels positives.

(b) Nous avons la correspondance
   - Variable principale primale = variable secondaire duales
   - Variable secondaires primale = varaibles principales duales

   Solution du primal réduit $Z = 624, X_1 = 10, X_2 = 6, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 52$ et donc la solution optimale du dual est $w = 624, w_1 = 0.6, w_2 = 1.2, w_3 = 0, w_4 = 0, w_5 = 0$.

5. on obtient pour la fonction objective : $\max = 30(1 + (2/3)\lambda)X_1 + 18X_2 + 216 + 120\lambda$.

(b) Discussion

	-1	-0.6	0.3
$0.6 - 2\lambda$	$+$	$+$	$-$
$2\lambda + 1.2$	$-$	$+$	$+$
Sensibilité	$X_5 \leftarrow$ $X_4 \rightarrow$	Solution inchangée	$X_2 \rightarrow$ $X_3 \leftarrow$

i. Cas $-1 < \lambda < -0.6$
$X_1 = 2.571,\ X_2 = 13.428, X_3 = 0,\ X_4 = 74.285, X_5 = 0$ et $Z = 534.857 + 171.429\lambda$.
Et donc $x_1 = 8.571,\ x_2 = 15.428, x_3 = 17.142$ et $Z = 534.857 + 171.429\lambda$

ii. Cas $-0.6 < \lambda < 0.3$

$X_1 = 10,\ X_2 = 6, X_3 = 0,\ X_4 = 0, X_5 = 52$ et $Z = 624 + 320\lambda$. Et donc $x_1 = 16,\ x_2 = 8, x_3 = 32$ et $Z = 624 + 320\lambda$.

iii. Cas $-0.6 < \lambda < 0.3$

$X_1 = 13,\ X_2 = 0, X_3 = 30,\ X_4 = 0, X_5 = 103$ et $Z = 606 + 380\lambda$. Et donc $x_1 = 19,\ x_2 = 2, x_3 = 38$ et $Z = 606 + 380\lambda$.

Fin correction exercice 3

Université de Montpellier II
UMIN 207I

2006/2007
Durée: 4.5h

Méthode de Résolution de problèmes $\mathcal{NP}$-complet
TD – Séance n° 2

Exercice 1 – Détermination de l'arbre d'évaluation et de séparation pour un problème donné

Nous considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq & 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Nous associons le programme linéaire (en valeurs réelles) PL_1, et la solution est la suivante $x_1^* = 5.5,\ x_2^* = 0$ avec $z^* = 55$. Le problème se sépare en deux sous-problèmes :

$$PL_2 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_3 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & \geq & 6 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

- $x_1^* = 5,\ x_2^* = 0,2$ avec $z^* = 50,2$ pour PL_2.
- Aucune solution.

Ainsi, le problème PL_2 associé au programme PL_2 se décompose en sous-problèmes

$$PL_4 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & \leq & 5 \\ x_2 & \leq & 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & \leq & 5 \\ x_2 & \geq & 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

- $x_1^* = 5,\ x_2^* = 0$ avec $z^* = 50$ pour PL_4.
- $x_1^* = 3,\ x_2^* = 1$ avec $z^* = 31$ pour PL_5.

Donner l'arbre d'évaluation et de séparation associé à la résolution du problème PL_1.

Correction exercice 1

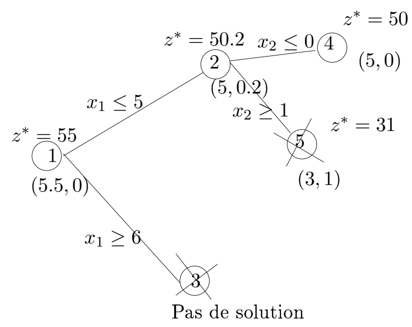

Fig. 1 – Arbre d'évaluation et de séparation pour un problème donné

La solution est donnée par la figure 1

Le programme originel est désigné par le cercle 1, les programmes suivants PL_2 associé au cercle 2 et ainsi de suite. Les nouvelles contraintes sont rajoutées sur les liens entre deux cercles successifs. Les cercles barrées indiquent soit une solution non réalisable (c'est le cas du sommet 3) soit une solution plus petite que la solution courante (c'est le cas du sommet 5).

Fin correction exercice 1

Exercice 2 – Résolution en utilisant la méthode de séparation et évaluation

On considère le problème linéaire en nombre entiers ci-dessous :

$$PLO = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_2.
2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_1.
3. Donner la signification géométrique du premier branchement sur la variable x_2. Quels sont les principes vus en cours que l'on retrouve lors de l'interprétation géométrique.

Correction exercice 2

1. La solution graphique de la méthode d'évaluation et de séparation est donnée par la figure 2. En négligeant le coté des variables on obtient comme solution du programme PLO $x_1^* = 2.25$, $x_2^* = 1.5$ avec $z^* = 12.75$. Le premier branchement $x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$ conduit aux deux programmes linéaires en nombres entiers suivants :

$$PLO_1 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

et

$$PLO_2 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

La première approximation du programme PLO_1 nous donne les valeurs $x_1^* = 2.5$, $x_2^* = 1$ avec $z^* = 11.5$ et la première approximation du programme PLO_2 nous donne les valeurs $x_1^* = 1.5$, $x_2^* = 2$ avec $z^* = 12.5$. Le prochain branchement se fait sur la variable x_1 sur le programme PLO_2.
Nous obtenons les deux nouveaux programmes linéaires en nombres entiers

$$PLO_3 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

et

$$PLO_4 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

IL n'y a pas de solution au programme PLO_4 (cas violation des contraaintes), tandis que la solution du programme PLO_3 donne $x_1^* = 1$, $x_2^* = 7/3$ avec $z^* = 12.33$. Nous continuons le branchement sur la programme PLO_3 et non pasa sur PLO_1 car la valuer de la fonction objective est la plus grande, et nous obtenons les deux nouveaux programmes suivants :

$$PLO_5 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

et

$$PLO_6 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

La solution du programme PLO_5 est $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$ avec $z^* = 11$. Sachant que z^* est une solution entière alors la valeur $z^* = 11$ devient la borne inférieure, ainsi toute programme ayant une valeur de la fonction objective inférieure à 11 sera éliminée. La première approximation pour le programme PLO_6 donne $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$ avec $z^* = 12$ devient la nouvelle borne et la valeur donnée par la solution du programme PLO_5 est éliminée. Il n'y a plus de branchement possible et donc la recherche d'une solution s'arrête là.

2. La solution est donnée par la figure 3
3. La signification graphique du premier branchement sur la variable x_2 est donné par la figure 4. La région d'une solution réalisable avec des variables entières est ignorée, et est donnée par la région grisée. La solution, pour l'ensemble des variables entières, sur la region grisée est donnée par les croix. La première approximation est donnée par le point cerclé sur la figure 4 (a). Le résultat du premier branchement avec les variables entières est donné par 4 (b). Il est important de noter que les deux régions contiennent toutes les solutions entières et seulement ces solutions **(en clair on ne rajoute pas ni de nouvelles solutions, ni enlèvent des**

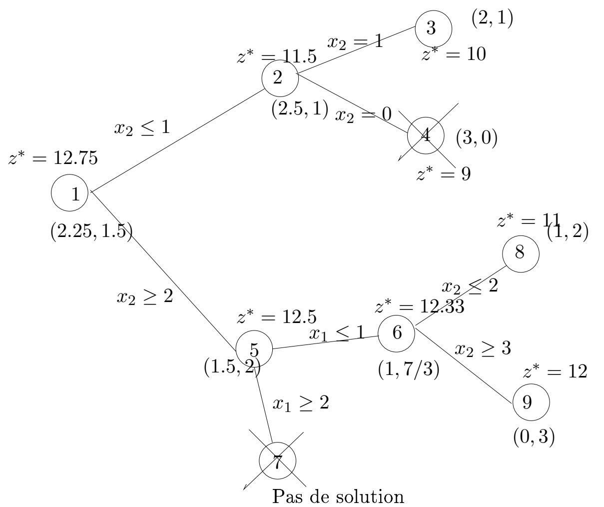

FIG. 2 – Solution graphique avec pour premier branchement x_2

solutions possibles). Alors le programme linéaire en nombres entiers PLO admet une solution optimale (c'est la cas ici), cette solution optimale est une solution optimale pour l'un des deux programmmes linéaires en nombres entiers PLO_1 ou PLO_2. Réciproquement, si les deux programmes linéaires en nombres entiers PLO_1 et PLO_2 admettent une solution optimale, une de ces solutions (celle ayant la plus grande valeur pour la fonction objective, dans le cas de la maximisation) sera une solution optimale pour le programme linéaire en nombre entiers PLO. La validité de la technique d'arrondis vient de la remarque ci-dessus.

Fin correction exercice 2

Exercice 3 – Contraintes avec une seule variable

On considère un problème de programmation linéaire standard, à une seule contrainte, défini par

$$\max \sum_{j=1}^{n} u_j.x_j \text{ avec } \sum_{j=1}^{n} v_j.x_j \leq V \text{ et } x_j \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

Tous les coefficents u_j et v_j sont supposés strictement positifs et l'on suppose les variables classées par rapports utilité/volume décroissants ou, pour rester dans un formalisme plus mathématique, suivant les valeurs décroissantes des rapports u_j/v_j. Montrer que la variable x_1 est entrante et que,

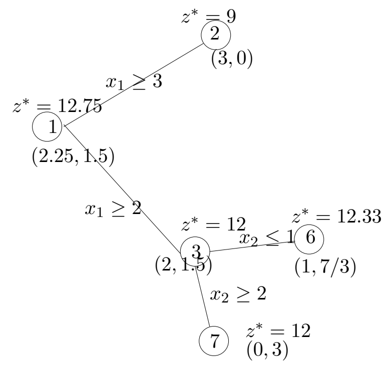

FIG. 3 – Solution graphique avec pour premier branchement x_1

en la faisant entrer en base, on atteint l'optimum de l'objectif en une seule étape. Exprimer la valeur de l'objectif en fonction des différents coefficients.

Correction exercice 3

Le coefficient de la variable x_1 étant, par hypothèse, positif, la variable x_1 est entrante et on échange donc avec l'unique variable en base, qui correspond à l'unique contrainte. On avait

$$x_{n+1} = V - \sum_{j=1}^{n} v_j.x_j$$

et après échange, on obtient :

$$x_1 = \frac{1}{v_1}(V - \sum_{j=2}^{n} v_j.x_j - x_{n+1})$$

En reportant cette valeur dans la fonction objectif, il vient

$$z = \sum_{j=1}^{n} u_j.x_j = \frac{u_1}{v_1}(V - \sum_{j=2}^{n} v_j.x_j - x_{n+1}) + \sum_{j=2}^{n} u_j.x_j$$

ou encore

$$z = \frac{u_1 V}{v_1} + \sum_{j=2}^{n}(u_j - \frac{u_1.v_j}{v_1}).x_j - \frac{u_1}{v_1}x_{n+1}$$

Compte tenu de la numératnio adoptée, les coefficients de toutes les variables qui interviennent dans l'écriture de z sont négatifs ou nuls. On a donc trouvé la valeur maximum de z en une itération, et celle est égale à $u_1.V/v_1$.

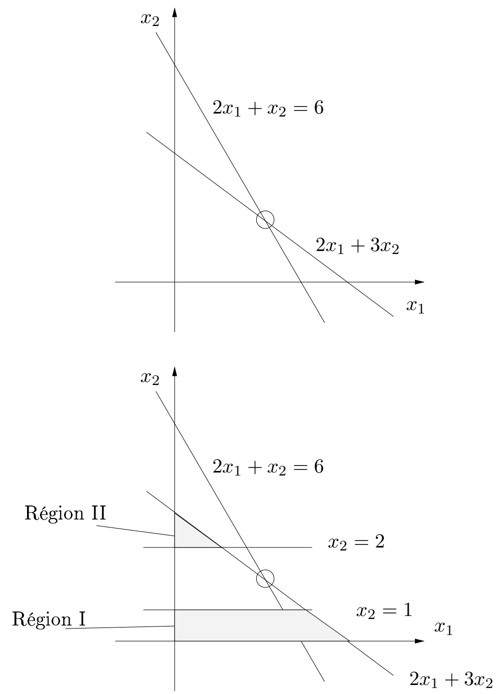

FIG. 4 – Signification géométrique du premier branchement avec la variable x_2

Fin correction exercice 3

Exercice 4 – Le problème du voyageur du commerce

1. Appliquer la méthode par séparation et évaluation décrite en cours pour résoudre la problème du voyageur de commerce dans le graphe K_6 dont la matrice des poids est la suivante :

	x	y	z	t	u	v
x	∞	4	7	2	5	4
y	4	∞	3	2	1	2
z	7	3	∞	2	6	3
t	2	2	7	∞	5	3
u	5	1	7	2	∞	2
v	4	2	3	3	2	∞

2. Que faudrait-il faire si on voulait connaître tous les cycles de poids minimum ?

Correction exercice 4

1. Solution de la première question :

   Détermination d'une borne B

   On applique une heuristique de prolongement d'une chaîne en choisissant à chaque étape l'arête la moins lourde permettant ce prolongement (bien sûr en ne créant un cycle qu'à la fin). En partant de x, on peut par exemple choisir successivement $\{x, t\}$, $\{t, y\}, \{y, u\}$, $\{u, v\}$, choix que l'on complète nécessairement par l'adjonction des arêtes $\{x, z\}$ et $\{z, v\}$, ce qui donne le cycle hamiltonien $x\ t\ y\ u\ v\ z\ x$ de poids 17. Nous commençons la recherche avec cette borne 17.

   Stratégie de Développement

   Bien qu'elle soit plus consommatrice de place mémoire et qu'elle pose parfois des problèmes pour gérer l'arborescence et déterminer le sommet auquel appliquer le principe de séparation, nous adopterons ici une stratégie de type "meilleur d'abord", asez facile à mettre en oeuvre à la main. Par conséquent, quand on effectuera une séparation, tous les sommets obtenus seront évalués, et on repartira du sommet non encore séparé de moindre évaluation.

   Evaluation de la racine de l'arborescence

   Prenons x pour jouer le rôle du x_0 du texte ; les deux arêtes de poids minimum incidentes à x sont les arêtes $\{x, t\}$ et par exemple $\{x, y\}$. Un arbre de poids minimum de $K_6 - x$ nous sera fourni par l'algorithme de Kruskal ou par celui de Prim. Avec les deux arêtes incidentes à x, on obtient par exemple le graphe H en gras, de poids 13, poids qui donne l'évalaution de la racine. Voir la figure 5.

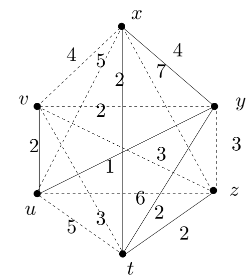

FIG. 5 –

Ce graphe 5 n'est pas un cycle hamiltonien parce que certains sommets ont un degré strictement supérieur à 2. C'est le cas par exemple du sommet y. Nous allons utiliser le fait que dans H ce sommet est de degré 3 pour effectuer les trois branchements décrits par la figure 6.

1^{er} **Branchement**

L'arête $\{x, y\}$ est interdite, c'est-à-dire que son poids devient infini, ce qui ne modifie pas l'arbre couvrant de $K_6 - x$. Les deux arêtes de poids minimum incidentes à x sont maintenant $\{x, t\}$ et $\{x, v\}$. L'évaluation de ce sommet est toujours, mais elle n'est pas exacte, le graphe correspondant 6 n'étant pas un cycle hamiltonien.

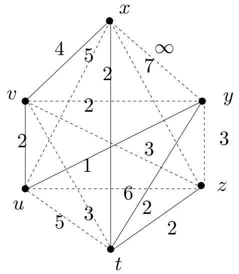

FIG. 6 – 1^e Branchement

2^e **Branchement**

L'arête $\{y, t\}$ est interdite (son poids devient infini), ce qui modifie l'arbre couvrant de $K_6 - x$. Parmi les nouveaux arbres de poids minimum, considérons celui qui, ainsi que les deux arêtes de poids minimum incidentes à x sont en gras dans le graphe 7. On obtient un cycle hamiltonien de poids 14. On peut donc metter à jour la borne B qui passe de 17 à 14, et d'autre part ne pas développer ultérieurement le sommet auquel on vient d'aboutir dans l'arborescence, son évaluation étant égale à nouvelle valeur B.

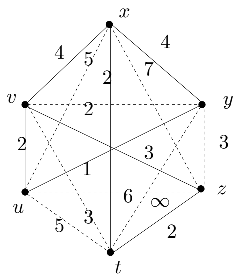

FIG. 7 – 2^e Branchement

3^e **Branchement**

L'arête $\{y, u\}$ est interdite (son poids devient infini), ce qui modifie l'arbre couvrant de $K_6 - x$. Les nouveaux arbres de poids minimum ont un poids égal à 8 (voir le graphe donné par la figure 8. Avec les deux arêtes de poids minimum incidentes à x, on obtient ainsi une évalaution de 14, donc égale à B. Par conséquent, il est inutile de développper l'arborescence à partir de ce sommet : il ne conduira pas à un cycle hamiltonien plus intéressant que celui qu'on connaît déjà.

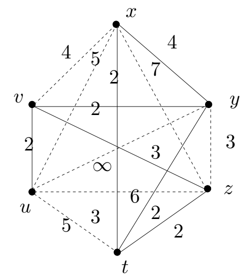

FIG. 8 – 3^e Branchement

Les opérations que l'on vient d'effectuer peuvent être résumées par le dessin suivant (voir figure 9 qui donne l'état actuel de l'arborescence). Les arêtes $\{\alpha, \beta\}$ interdites y sont représentées par $\bar{\alpha\beta}$

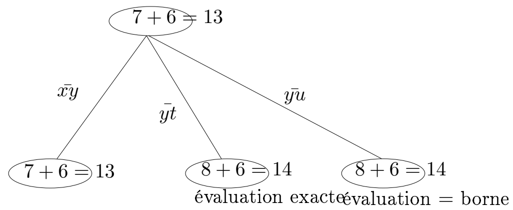

FIG. 9 –

Il ne reste plus à développer que le sommet situé à gauche dans dans la figure 9, le sommet t est de degré 3. On effectue donc trois nouveaux branchements à partir de ce sommet de l'arborescence, en interdisant successivement, en plus de l'arête $\{x, y\}$, les arêtes $\{t, x\}$, $\{t, y\}$, puis $\{t, z\}$.

4^e **Branchement**

L'arête $\{t, x\}$ est interdite (son poids devient infini). Les deux arêtes de poids minimum incidentes à x sont maintenant $\{x, v\}$ et $\{x, u\}$. Le poids du graphe en gras, dans le graphe 10, égal à $16 (= 7 + 9)$, donne l'évalaution du sommet de l'arborescence auquel on aboutit. Cette évaluation étant supérieure à B, on ne développera pas ce sommet.

5^e **Branchement**

L'arête $\{t, y\}$ est interdite (son poids devient infini). Un arbre de poids minimum de $K_6 - x$ avec l'infini pour poids de $\{t, y\}$ a déjà été calculé pour le second branchement, de poids 8. Comme de plus les deux arêtes de poids minimum incidentes à x sont $\{x, t\}$ et $\{x, v\}$, on obtient $8 + 6 = 14$ comme évalaution de ce nouveau sommet de l'arborescence. Cette évalaution

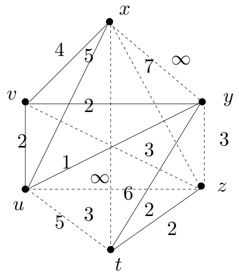

FIG. 10 – 4^e Branchement

étant égale à B, on ne développera pas ce sommet. On pouvait d'ailleurs prévoir qu'il ne serait pas intéressant de développer cette branche, puisque, par rapport au second branchement, on a interdit une arêtes supplémentaire ; on ne pouvait donc pas obtenir mieux que par le second branchement.

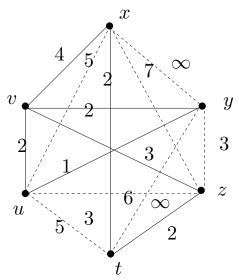

FIG. 11 – 5^e Branchement

6^e **Branchement**

L'arête $\{t, z\}$ est interdite (son poids devient infini). L'évalaution de ce nouveau sommet (voir la figure 12) de l'arborescence est donnée par le poids du graphe en gras, et vaut donc 14, ce qui n'est pas mieux que la borne : on ne développera pas ce sommet.

Il ne reste pluis de sommet à développer : on a terminé. L'arborescence totale est donc réduite aux sommets de la figure 9.

Le poids minimum d'un cycle hamiltonien vaut 14 et le cycle hamiltonien obtenu au second branchement est une solution optimale du problème.

2. Si on voulait déterminer tous les cycles hamiltoiens de poids minimum, il faudrait encore développer tous les sommets dont l'évalaution vaut 14, puisqu'ils sont susceptibles de contenir de telles solutions. Plus généralement, il conviendrait de modifier la description des méthodes par séparation et évaluation de façon à n'éliminer que des sommets de l'arborescence qui ne

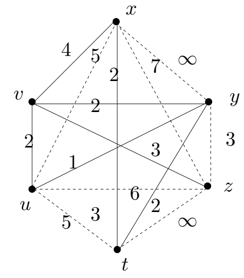

FIG. 12 – 6^e Branchement

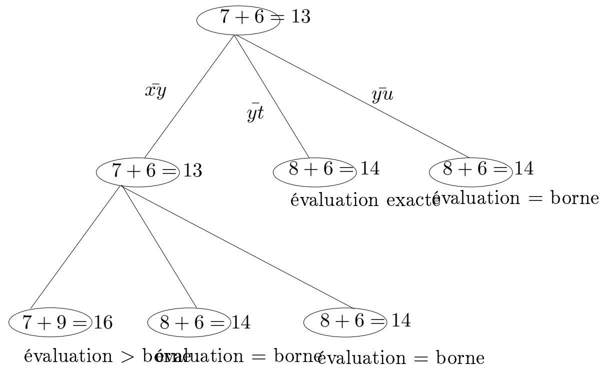

FIG. 13 – Arbre final

contiennent aucune solution réalisable (les contraintes du problème ne sont pas toutes respectées) ou dont l'évalaution est strictement moins bonne que la borne (c'est à dire strictement supérieure dans le cas d'une minimisation et strictement inférieure dans le cas d'une maximisation) ; les sommets d'évalaution égale à la borne serait donc développés, y compris lorsque l'évaluation est exacte.

Fin correction exercice 4

Exercice 5 – Sur les coupes de Gomory

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 & \leq & 17 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

		c	8	2	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	17	2	5	1	0
0	$x_2^J = x_4$	10	3	2	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0

TAB. 1 – Premier tableau du simplexe $k = 1$ et $r = 2$

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	31/3	0	11/3	1	$-2/3$
2	$x_2^J = x_1$	10/3	1	2/3	0	1/3
	$z(x)$	20/3	0	1/3	0	2/3

TAB. 2 – Second tableau du simplexe

Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode des coupes de Gomory.

Correction exercice 5

– Dans un premier temps, nous allons résoudre notre problème avec des variable réelles. Pour cela, nous utilisons tou naturellement le simplexe.
  Tous les coûts réduits sont tous positifs ou nuls alors nous sommes arrivés à la solution optimale en réels. Nous allons introduire la première coupe. Nous prenons $i = 2$.
  Nous avons alors

$$\begin{aligned} x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_4 &= 10/3 \\ 2/3x_2 + 1/3x_4 &\leq 1/3 \end{aligned}$$

  Maintenant, nous devons résoudre le problème donné par le dernier tableau et dans lequel nous rajoutons la dernière équation. Nous introduisons dans la dernière équation une variable de surplus x_5 et y une variable artificielle. Nous obtenons ainsi l'équation $-y = -1/3 + 2/3x_2 + 1/3x_4 + x_5$ et en utilsant la méthode à deux phases nous avons le tableau suivant :
  Nous avons supprimer la dernière colonne car nous trouvons $z = 0$ et tous les coûts réduits sont positifs ou nuls.

		c	0	2/3	0	1/3	1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
0	$x_1^J = x_3$	31/3	0	11/3	1	$-2/3$	0	0
2/3	$x_2^J = x_1$	10/3	1	2/3	0	1/3	0	0
$-1/3$	$x_3^J = y$	1/3	0	2/3	0	1/3	1	1
$-1/3$	$z(x)$	$-1/3$	0	$-2/3$	0	$-1/3$	1	0

TAB. 3 – Premier tableau du simplexe de la méthode à deux phases $k = 2$ et $r = 3$

		c	0	2/3	0	1/3	1
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_3$	17/2	0	0	1	$-1/2$	$-11/6$
2/3	$x_2^J = x_1$	3	1	0	0	0	1/3
$-1/3$	$x_3^J = x_2$	1/2	0	1	0	1/2	$-1/2$
$-1/3$	$z(x)$	1/3	0	0	1/2	1/6	?

TAB. 4 – Second et dernier tableau du simplexe de la méthode à deux phases

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_3$	17/2	0	0	1	$-1/2$	$-11/6$
2/3	$x_2^J = x_1$	3	1	0	0	0	1/3
$-1/3$	$x_3^J = x_2$	1/2	0	1	0	1/2	$-1/2$
	$z(x)$	13/2	0	0	1/2	1/6	?

TAB. 5 – Nouveau avec les coefficients originaux

La solution n'est pas entière et donc nous rajoutons une nouvelle coupe. Nous prenons $i = 3$ (car x_2 et on entière), on aurait pu prendre $i = 1$).
Nous avons alors

$$\begin{aligned} x_2 + 1/2x_4 - 1/2x_5 &= 1/2 \\ x_4 + x_5 &\leq 1 \end{aligned}$$

Nous introduisons une variable de surplus x_6 et une variable artificielle y et nous introduisons l'équation$1 = y + x_4 + x_5 - x_6$ et les nouveau coefficients pour obtenir le tableau :
Nous obtenons le tableau suivant :
Maintenant que la deuxième est fini revenons aux coeeficents originaux, nous obtenons le tableau suivant :

Fin correction exercice 5

Exercice 6 – Algorithme de coupe de Gomory

Donner la solution du problème suivant :

		c	0	0	0	1	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
0	$x_1^J = x_3$	17/2	0	0	1	$-1/2$	$-11/6$	0	0
2/3	$x_2^J = x_1$	3	1	0	0	0	1/3	0	0
$-1/3$	$x_3^J = x_2$	1/2	0	1	0	1/2	$-1/2$	0	0
0	$x_4^J = y$	1	0	0	0	1	1	-1	1
-1	$z(x)$	?	0	1/2	0	0	$-5/4$	1	0

TAB. 6 – Second tableau du simplexe avec de la méthode à deux phase et $k = 4$ et $r = 3$

		c	0	0	0	1	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
0	$x_1^J = x_3$	69/8	0	8/5	1	0	0	$-8/5$	?
?	$x_2^J = x_1$	3	1	9/15	0	0	0	4/5	?
$-1/3$	$x_3^J = x_4$	1	0	1/2	0	1	0	4/5	?
0	$x_4^J = x_5$	0	0	$-8/5$	0	0	1	$-4/5$	4/5
-1	$z(x)$	?	0	3/2	0	0	0	0	1

TAB. 7 – Dernier tableau du simplexe avec de la méthode à deux phases

		c	0	0	0	1	1	-1
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$x_1^J = x_3$	69/8	0	8/5	1	0	0	$-8/5$
2	$x_2^J = x_1$	3	1	9/15	0	0	0	4/5
0	$x_3^J = x_4$	1	0	1/2	0	1	0	4/5
0	$x_4^J = x_5$	0	0	$-8/5$	0	0	1	$-4/5$
-1	$z(x)$	6	0	3/2	0	0	0	0

TAB. 8 – Tableau du simplexe avec les coeeficients oroginaux

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} & & \\ \max(Z) & = & 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Correction exercice 6

- Dans un premier temps nous cherchons la solution à valeurs réelles
- Maintenant, nous rajoutons les coupes : nous prenons $i = 2$

$$\begin{aligned} x_2 - 1/2x_3 + 1/2x_4 &= 3/2 \\ x_3 + x_4 &\geq 1 \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant une variable de surplus x_5 et une variable artificielle y et nous

		c	3	4	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	6	2	1	1	0
0	$x_2^J = x_4$	9	2	3	0	1
	$z(x)$	0	-3	-4	0	0

TAB. 9 – Premier tableau du simplexe $k = 2$ et $r = 2$

		c	3	4	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^J = x_3$	3	4/3	0	1	$-1/3$
4	$x_2^J = x_2$	3	2/3	1	0	1/3
	$z(x)$	12	$-1/3$	0	0	4/3

TAB. 10 – Second tableau du simplexe $k = 1$ et $r = 1$

		c	3	4	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
3	$x_1^J = x_1$	9/4	1	0	3/4	$-1/4$
4	$x_2^J = x_2$	3/2	0	1	$-1/2$	1/2
	$z(x)$	51/4	0	0	1/4	5/4

TAB. 11 – Dernier tableau du simplexe

procédons à la méthode des deux phases avec l'ajout $-y = -1 + x_3 + x_4 - x_5$. Nous obtenons ainsi le tableau suivant :
En revenant aux coefficients originaux :

- Maintenant, nous rajoutons les coupes : nous prenons $i = 1$

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 + 3/4x_5 &= 3/2 \\ -4x_4 + 3x_5 &\geq 2 \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant une variable de surplus x_6 et une variable artificielle y et nous procédons à la méthode des deux phases avec l'ajout $-y = -1 - 4x_3 + 3x_5 - x_6$. Nous obtenons ainsi le tableau suivant :
Revenons aux coefficients originaux :

- Maintenant, nous rajoutons les coupes : nous prenons $i = 1$

$$\begin{aligned} x_1 + x_6/4 &= 15/12 \\ x_6/4 &\geq 1 \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant une variable de surplus x_7 et une variable artificielle y et nous procédons à la méthode des deux phases avec l'ajout $-y = -4 - +x_6 - x_7$. Nous obtenons ainsi le tableau suivant :

		c	0	0	1	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
0	$x_1^J = x_1$	9/4	1	0	3/4	$-1/4$	0	0
2/3	$x_2^J = x_2$	3/2	0	1	$-1/2$	1/2	0	0
0	$x_3^J = y$	1	0	0	1	1	-1	1
-1	$z(x)$	-1	0	0	-1	-1	1	0

TAB. 12 – Premier tableau du simplexe de la méthode à deux phases $k = 3$ et $r = 3$

		c	0	0	1	1	-1
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_1$	$3/2$	1	0	0	-1	0.75
0	$x_2^J = x_2$	2	0	1	0	$1/$	$-1/2$
3	$x_3^J = x_3$	1	0	0	1	1	-1
-1	$z(x)$	-1	0	0	-1	-1	1

TAB. 13 – Dernier tableau du simplexe de la méthode à deux phases

		c	3	4	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^J = x_1$	$3/2$	1	0	0	-1	0.75
0	$x_2^J = x_2$	2	0	1	0	$1/$	$-1/2$
3	$x_3^J = x_3$	1	0	0	1	1	-1
-1	$z(x)$	$12,75$	0	0	-1	-1	1

TAB. 14 – Tableau du simplexe de la méthode à deux phases

		c	0	0	0	1	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
0	$x_1^J = x_1$	$3/2$	1	0	0	-1	$3/4$	0	0
0	$x_2^J = x_2$	2	0	1	0	1	$-1/2$	0	0
-4	$x_3^J = x_3$	1	0	0	1	1	-1	0	0
0	$x_4^J = y$	2	0	0	0	-4	3	-1	1
-4	$z(x)$	-4	0	0	0	4	-3	1	0

TAB. 15 – Premier tableau du simplexe avec de la méthode à deux phases avec $k = 5$ et $r = 4$

		c	0	0	0	1	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
0	$x_1^J = x_1$	1	1	0	0	0	0	$1/4$	$-1/4$
0	$x_2^J = x_2$	$7/3$	0	1	0	$1/3$	0	$-1/6$	$1/6$
-4	$x_3^J = x_3$	$4/3$	0	0	1	$-7/3$	0	$-1/3$	$1/3$
0	$x_4^J = x_5$	$2/3$	0	0	0	$-4/3$	1	$-1/3$	$1/3$
-4	$z(x)$	0	0	0	0	0	0	0	$1/3$

TAB. 16 – Second tableau du simplexe avec de la méthode à deux phases avec $k = 5$ et $r = 4$

		c	3	4	0	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	$x_1^J = x_1$	1	1	0	0	0	0	$1/4$
4	$x_2^J = x_2$	$7/3$	0	1	0	$1/3$	0	$-1/6$
-4	$x_3^J = x_3$	$4/3$	0	0	1	$-7/3$	0	$-1/3$
0	$x_4^J = x_5$	$2/3$	0	0	0	$-4/3$	1	$-1/3$
	$z(x)$	12	0	0	0	1	0	$1/2$

TAB. 17 – Second tableau du simplexe avec de la méthode à deux phases avec $k = 5$ et $r = 4$

		c	0	0	0	0	0	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y
3	$x_1^J = x_1$	1	1	0	0	0	0	$1/4$	0	0
4	$x_2^J = x_2$	$7/3$	0	1	0	$1/3$	0	$-1/6$	0	0
-4	$x_3^J = x_3$	$4/3$	0	0	1	$-7/3$	0	$-1/3$	0	0
0	$x_4^J = x_5$	$2/3$	0	0	0	$-4/3$	1	$-1/3$	0	0
0	$x_4^J = y$	4	0	0	0	0	0	1	-1	1
	$z(x)$	$37/3$	0	0	0	1	0	$1/2$	?	?

TAB. 18 – Premier tableau du simplexe avec de la méthode à deux phases avec $k = 6$ et $r = 5$

		c	0	0	0	0	0	1	-1	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y
3	$x_1^J = x_1$	0	1	0	0	0	0	0	0	?
4	$x_2^J = x_2$	3	0	1	0	$1/3$	0	0	$-1/6$	?
-4	$x_3^J = x_3$	$5/3$	0	0	1	$-7/3$	0	0	$-1/3$	?
0	$x_4^J = x_5$	$2/3$	0	0	0	$-4/3$	1	0	$-1/3$	?
0	$x_4^J = x_6$	1	0	0	0	0	0	1	-1	1
	$z(x)$	$37/3$	0	0	0	1	0	$1/2$	?	?

TAB. 19 – Second tableau du simplexe avec de la méthode à deux phases

		c	3	4	0	0	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	$x_1^J = x_1$	0	1	0	0	0	0	0	0
4	$x_2^J = x_2$	3	0	1	0	$1/3$	0	0	$-1/6$
-4	$x_3^J = x_3$	$5/3$	0	0	1	$-7/3$	0	0	$-1/3$
0	$x_4^J = x_5$	$2/3$	0	0	0	$-4/3$	1	0	$-1/3$
0	$x_4^J = x_6$	1	0	0	0	0	0	1	-1
	$z(x)$	$37/3$	0	0	0	1	0	$1/2$	?

TAB. 20 – Tableau final

Revenons aux coefficients

Fin correction exercice 6

Exercice 7 – Les matrices totalement unimodulaire & programmmes linéaires en nombres entiers

Dans un premier temps, nous considérons le problème de programmation linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccc} Ax & = & b \\ x \geq 0 & & \\ \max(Z) & = & cx \end{array}\right.$$

avec A une matrice $(m \times n)$ de rang m à coefficients entiers et b un vecteur entier.

1. Avec l'hypothèse sur le rang, quel conséquence concernant les points extrêmes ?
2. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) le déterminant de toute base B de A vaut $+1$ ou -1.
   (b) les points extrêmes de $P = \{x|Ax = b,\ x \geq 0\}$ ont des coordonnées entières pour tout b entier.
   (c) pour tout base B, B^{-1} est entière (tous ses termes sont entiers).
3. Si A est une matrice totalement unimodulaire, est-ce que le problème ci-dessus admet une solution optimale entière ?
4. Nous allons montrer que la propiété est encore vraie si le problème est donné sous forme canonique avec des contraintes d'inégalité. Soit le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} Ax & \leq & b \\ 0 & \leq x & d \\ \max(Z) & = & cx \end{array}\right.$$

   avec A une matrice totalement unimodulaire. Montrer que pour tout vecteurs b, entiers, tels que le problème précédent admet une solution admissible, il existe une solution admissible x entière. De plus, montrer que s'il existe une solution optimale, il existe une solution optimale entière.
5. **Exemples :**
   (a) Le problème du plus court chemin : Soit le réseau représenté par le graphe donné par la figure 14. Les valuations des arcs sont les coûts de déplacement du sommet de départ vers le sommet d'arrivée de l'arc. Le chemin le plus court de A vers D est défini comme le chemin dont la somme des valuations des arcs parcourus est minimale. On peut le trouver à l'aide d'un programme linéaire.
      i. Donner-le.
      ii. Expliquer les contraintes et donner le programme linéaire sous forme standard.

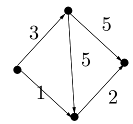

FIG. 14 – Exemple de réseau

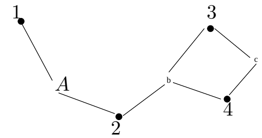

FIG. 15 – Exemple

   (b) Couverture d'une région par des émetteurs :
   Nous considérons le réseau représenté par le graphe donné par la figure 15. Notons 1, 2, '3, 4 les localités à desservir, et A, , B, C le sites où un émetteur sera eventuellment installé. Les arcs marquent les localités qu ún émetteur peut atteindre. Le but est de trouver un nombre minimal de sites où on installera un émetteur pour desservir l'ensemble des localités.
      i. Donner le programme linéaire.

Correction exercice 7

1. Remarquons que l'hypothèse sur le rang de A nous assure que si $P \neq \emptyset$, il y a au moins un point extrême.
2. Démonstration :
   - $(a) \Rightarrow (b)$ Si x est un point extrême, il correspond à une solution de base $x = (x_B, x_N)$ et x_B est la solution de $Bx_B = b$ tandis que $x_N = 0$. X_B sera un entier (d'après la règle de Cramer puisque x_i sera de la forme $det(B_i)/det(B)$ où B_i est une sous-matrice de (A, b)).
   - $(b) \Rightarrow (c)$ Soit B une base de A et y un vecteur entier quelconque tel que $y + B^{-1}e_i \geq 0$, ($B^{-1}e_i$ est la i-ème colonne de B^{-1}). Soit $z = y + B^{-1}e_i \geq 0$; alors $Bz = By + e_i$ est entier (car B et y le sont) ; puisque b peut être un entier quelconque, on pose $b = Bz$; $(z, 0)$ est ainsi un point extrême d'un polytope P (car $z \geq 0$). Par hypothèse z est entier, donc $z - y = B^{-1}e_i$ est entier et en répétant ce raisonnement pour les autres colonnes de B^{-1}, on voit que B^{-1} est entière.
   - $(c) \Rightarrow (a)$ Soit B une base telle que B^{-1} soit entière ; sachant que $B.B^{-1} = I$ où I désigne la matrice identité alors $det(B).det(B^{-1}) = 1$ puisque $det(B)$ et $det(B^{-1})$ sont des entiers alors on a $det(B) = det(B^{-1}) = +1$ ou $det(B) = det(B^{-1}) = -1$.

3. Soit le programme linéaire, où A est une matrice totalement unimodulaire, pour tout vecteur b entier, le problème admet une solution admissible entière dès qu'il a une solution admissible. De plus, il a une solution optimale entière dès qu'il a une solution optimale.
4. La même propriété est encore vraie si le problème est donné sous forme canonique avec des contraintes d'inégalité, car si A de dimension $(m \times n)$ est totalement unimodulaire, la matrice (A, I) formée par la juxtaposition de A et d'une matrice unité $(m \times m)$ est encore unimodulaire. En mettant le problème sous forme standard, la matrice des contraintes devient :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix}.$$

Il est facile de voir que cette matrice est totalement unimodulaire dès que A l'est.
5. **Exemples :**
   (a) Le problème du plus court chemin :
      i. Soit

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le chemin le plus court emprunte l'arc } (i,j),\ ij,\ j \in \{A,B,C,D\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le programme linéaire pour le chemin le plus court de A vers D est alors le suivant :

$$PL_1 = \begin{cases} x_{AB} + x_{AC} & = & 1 \\ -x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} & = & 1 \\ -x_{AC} - x_{BC} + x_{CD} & = & 1 \\ -x_{BD} - x_{CD} & = & 1 \\ x_{ij} \in \mathbb{N} & & \\ \min Z(x_{ij}; i,j \in \{A,B,C,D\} & = & 3x_{AB} + x_{AC} + 5x_{BD} + 2x_{CD} \end{cases}$$

      ii. Il s'agit d'un programme linéaire en forme standard avec $c = (3,1,5,5,2)$, $b = {}^t(1,0,0,-1)$, et

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_{AB} & x_{AC} & x_{BC} & x_{BD} & x_{CD} \end{array} \end{array}$$

A est totalement unimodulaire et coincide avec la matrice d'incidence du graphe. Pour résoudre le programme linéaire à l'aide du simplexxe, il faut rajouter la mtrice I_4. La matrice A est alors remplacée par la matrice (A, I_4) et (A, I_4) est totalement unimodulaire.

   (b) Couverture d'une région par des émetteurs :
      i. Soit

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ si le site est choisi } j \in \{A,B,C\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le site } j \text{ dessert la localité } i\ i \in \{1,2,3,4\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le programme linéaire qui résout le problème est le suivant :

$$PL_2 = \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} y_j & \geq & 1 (i \in \{1,\ldots,4\}) \\ y_j \in \mathbb{N} & & \\ \min Z(y_A, y_B, y_C) & = & y_A + y_B + y_C \end{cases}$$

En ajoutant des variables d'écart $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ on arrive à la forme standard du progamme linéaire avec $c = (1,1,1), b = (1,1,1,1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A est totalement unimodulaire.

Fin correction exercice 7

Université de Montpellier II — 2004/2005

UMIN 207I — Durée: 3h

Méthode de Résolution de problèmes $\mathcal{NP}$-complet

TD – Séance n° 1

Exercice 1 – Le problème du stable dans un graphe

Définition 0.1 *Un* stable *dans un graphe est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents.*

La matrice d'incidence (arêtes-sommets) $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$ définie de la manière suivante. $a_{ij} = 1$ si l'arête i a pour extrêmité le sommet j, sinon $a_{ij} = 0$.

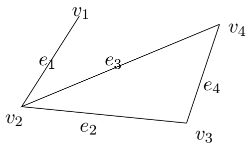

FIG. 1 – Stable

1. Donner la matrice díncidence (arêtes-sommets) du graphe donné par la figure 1
2. Le problème de trouver un stable maximum dans le graphe ci-dessus peut se formuler comme un programme linéaire. Donnez-le.

Correction exercice 1

1. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Le problème de trouver un stable maximum dans le graphe ci-dessus peut se formuler comme un programme linéaire :

$$\begin{array}{l} \max x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_2 + x_4 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

$1 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$
vecteur colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice d'adjacence A on obtient la formulation compacte suivante :

$$\begin{array}{l} \max 1^t X \\ AX \leq 1 \end{array}$$

Fin correction exercice 1

Exercice 2 – Le problème du transversal dans un graphe

Définition 0.2 *Un* transversal *(couverture) est un ensemble de sommets tel que pour chaque arête du graphe, au moins une de ses deux extremités appartient au transversal.*

1. On considère que le graphe donné par la figure 1. Donner le programme linéaire en nombre entiers

Correction exercice 2

1. A la matrice d'incidence arêtes-sommets

$$\begin{array}{l} \min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_4 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min 1X \\ AX \geq 1 \end{array}$$

Fin correction exercice 2

Exercice 3 – Modéliser les problèmes suivant par un programme linéaire

1. L'arbre couvrant de poids minimum. Quel est le problème sur le nombre de contraintes ?
2. Le problème du plus court chemin entre un somet s et un somet t. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté valué $c_j \geq 0$ pour tout arc $e_j \in E$. Soit $F = \{P = (e_{j_1}, \dots, e_{j_k})\}$ une séquence d'arcs d'un plus court chemin entre s et t dans le graphe G.
   (a) Nous considérons le graphe donné par la figure 2. Donner sa matrice d'incidence A.

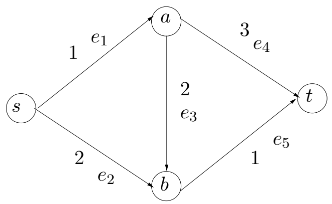

FIG. 2 – Un graphe orienté valué

   (b) Considérons un vecteur $f = (f_1, \dots, f_n)$ avec f_j associé à l'arc e_j, tel que $f_j = 1$ (resp. $f_j = 0$) si l'arête e_j appartient (resp. n'appartient pas) à un plus court chemin entre s et t.
      i. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 1$?
      ii. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = -1$?
      iii. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 0$?

Correction exercice 3

1. Pour l'arbre couvrant de poids minimum :
   Soit $A(S)$ l'ensemble des arêtes contenu dans le sous-groupe $G = (N, A)$ induit par les sommets de s c'est à dire que $A(S)$ est l'ensemble des arêtes ayant ces deux extrémités dans S. Considérons le programme linéaire en nombre entiers pour l'arbre couvrant. Nous considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$(ACPM) \begin{cases} \min z = \sum_{i,j}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = n - 1, \\ \sum_{(i,j) \in A(S)} x_{ij} \leq |S| - 1, \text{ pour n'importe quel ensemble } S \text{ de sommets} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

   Dans cette formulation, la variable bivalent x_{ij} indique si nous sélectionnons l'arête $[i, j]$ pour l'arbre couvrant de poids minimum (remarquons que l'ensemble des contraintes donné par la deuxième inégalité avec $|S| = 2$ implique que $x_{ij} \leq 1$).

   La première série de contraintes implique que nous avons exactement $n-1$ arêtes sélectionnées, et la seconde série de contrainte implique l'ensemble des arêtes choisies ne forment pas de cycle (si nous choisissons une solution contenant un cycle, et S est l'ensemble des sommets contenus dans ce cycle, la solution violerai cette contrainte).
   Remarquons que le nombre de contraintes est exponentielle. Cependant, il est possible de proposé une formulation polynomiale du problem si nous introduisons des nouvelles variables.
2. Pour le problème du plus court chemin :
   (a) LA matrice d'incidence est la suivante : Rappel :

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} +1 \text{ si l'arc } e_j \text{ part du sommet } i \\ -1 \text{ si l'arc } e_j \text{ arrive en } i \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right)$$

   Ainsi, la matrice d'incidence est la suivante :

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ s & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ a & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ b & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \end{array} \right)$$

      i. $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 1$ signifie que le flot qui sort de s se répartie entre les arcs sortant de s (ceci est vrai pour tous arcs sortant de s).
      ii. $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = -1$ signifie que le flot qui rentre en t vient des arcs ayant pour extrémités le sommet t.
      iii. $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 0$, signifie que nous avons conservation du flot entre les arcs entrant dans un sommet i et les arcs sortant de ce sommet.
   (b) Donc le programme lin'éaire est le suivant :

$$Af = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   avec $f \geq 0$ et la fonction objectif est $\min cf$ où $c = \sum_{i=1}^{k}) e_{j_i}$.

Fin correction exercice 3

Exercice 4 – Sur le problème de l'affectation quadratique

Considérons le problème de localisation d'usines suivants. On dispose de n sites sur lesquels on doit construire m usines ($m < n$). Il y a une quantité d_{kl} à transporter de l'usine k à l'usine l et le coût unitaire de transport du site i au site j est c_{ij}.

Donner le programme linéaire associé.

Correction exercice 4

On pose $x_{ik} = 1$ (resp. 0) si l'usine k est construite sur le site i (resp. sinon) et le problème se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min z = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} \sum_{k,l=1,k\neq l}^{m} c_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1, k = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \leq 1, i = 1,\ldots,n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Les contraintes du premier groupe expriment que chaque usine doit êter construite et les contraintes du second groupe qu'on ne peut construire plus d'une usine sur un site donné. Le problème est appelé problème d'affectation quadratique.

Fin correction exercice 4

Exercice 5 – Sur le problème du voyageur de commerce

Le problème du voyageur de commerce consiste à effectuer un circuit hamiltonien de coût minimum dans un graphe complet non orienté. Pour cela,nous considérons $n+1$ villes tel que le coût entre deux villes est donnée par c_{ij}.

1. Pourquoi le problème du voyageur de commerce est étudié dans le cadre d'un graphe complet valué et non dans un graphe quelconque ?
2. Rappeler la définition d'un circuit hamiltonien. Quelles conséquences sur les dégrés des sommets du circuit hamiltonien. Modéliser ce problème par un programme linéaire en nombres entiers, en justifiant les contraintes.
3. Donner un exemple lequel il satisfait les contraintes du programmes linéaires du nombres entiers mais qui n'est pas une solution réalisable du voyageur de commerce. Quel est l'incovénient des nouvelles contraintes ? (Pense aux problème des sous-tours).
4. Nous ajoutons au programme linéaire en nombres entiers les contraintes suivantes $u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, 1 \leq i \neq j \leq n$. Montrer que les contraintes que vous venez de rajouter définissent bien le problème du voyageur de commerce.
5. Comment appelle-t'on ce type de programme lin'éaire ?

Correction exercice 5

1. Pour cela il suffit simplement de compléter le graphe G afin de le rendre complet et de valuer les arêtes rajoutées avec une valuation ∞.

2. Nous devons passer une et seule fois par tous les sommets. Nous considérons le problème avec $n+1$ villes numéroter de 0 à $n+1$

$$(TSP) \begin{cases} \min z = \sum_{i,j}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, j = 0\ldots,n \\ \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, i = 0,\ldots n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Nous voulons minimiser le tour (circuit hamiltonien), sous les contraintes qu'il existe un seul arêtes de sortie et d'entrée pour chaque sommet du graphe.

3. Le soucis c'est que nous pouvons deux sous-tours (deux composantes connexes). Pour éviter cela, considérons $(S,\bar{S})$ une partition non-triviale de l'enseble $\{0,\ldots,n\}$, et pour chaque partition nous introduisons l'inégation suivante :

$$\sum_{i\in S, j\in\bar{S}} x_{ij} \geq 1$$

4. Nous rajoutons les contraintes qui remplace les contraintes des sous-tours

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, 1 \leq i \neq j \leq n$$

où les variables $u_i, i = 1,\ldots,n$ sont des réels admettent des signes quelconques.

5. Nous allons montrer que ces inégalités ne se restreigne pas simplement aux solutions de type, mais également n'exclut aucune solution de type tour.
nous montrons dasn un premier temps que chaque solution réalisable est un tour. Pour montrer cela, il suffit de montrer que chaque tour traverse la ville numérotée 0. Supposons le contraire, c'est à dire que la séquence des ville $i_1,\ldots,i_k$ est un circuit qui exclut la ville 0. Nous pouvons écrire les inégalités concernant ce tour :

$$\begin{aligned} u_{i_j} - u_{i_{(j+1)}} + n &\leq n-1, j = 1,\ldots,k-1 \\ u_{i_k} - u_{i_1} &\leq n-1 \end{aligned}$$

En additionnant ces contraintes, nous arrivons à une contradiction.
Pour finir la preuve, nous devons montrer que pour chaque tour réalisable, il existe des valeurs de u_i que satisfasse les dernières inégalités. En effet, soit $u_0 = 0$ et $u_i = t$ si la ville est la $t$ième villes visitées dans le tour avec $t = 1,\ldots,n$.
– Si $x_{ij} = 0$, nous avons

$$u_i - u_j \leq n-1, 1 \leq i \neq j \leq n$$

ce qui est toujours vrai sachant que les cas $u_i = n$ et $u_j = 0$ sont éliminés parce que l'arête $(i,0)$ est dans le tour et alors $x_{i0} = 1$.
– Si $x_{ij} = 1$ nous avons

$$u_i - u_j + n \leq n-1,$$

qui est toujours vrai car $u_i - u_j = -1$ si i et j sont des villes successives dans le tour (remarquons que le cas où $u_i = n$ et $u_j = 0$ est exclut de la dernière inéquation).

6. Cette formulation impliquant des variables x_{ij} ayant pour contrainte d'être entières, et des variables u_i qu'ils ne le sont pas. De tels problèmes sont appelés des problèmes de programmations linéaires entiers mixtes.

Fin correction exercice 5

Exercice 6 – Le problème du flot maximum

1. Donner le programme linéaire qui modélise le problème du flot maximum.
2. Donner le programme linéaire qui modélise le problème du flot compatible.
3. Donner le programme linéaire qui modélise le problème de flot maximum de coût minimum.
4. Donner les dual des problèmes décrient précédemment.

Correction exercice 6

1. Nous supponsons que la source est s et le puits t. Ainsi le problème de flot maximum se décrit par la formulation suivante : (il n'y a pas d'arc retour)

$$flow \begin{cases} \max z = v \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = v, i = s \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = 0, i \neq \{s,t\} \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = -v, i = t \\ 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

2. Le flot avec une borne inférieure

$$flow \begin{cases} \max z = v \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = v, i = s \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = 0, i \neq \{s,t\} \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = -v, i = t \\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

3.

$$flow \begin{cases} \min z = \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = v, i = s \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = 0, i \neq \{s,t\} \\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} = -v, i = t \\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

4.

Fin correction exercice 6

Exercice 7 – Le problème de flot maximum à coût minimum

Exercice 8 – Le problème du couplage

Exercice 9 – Le problème de la couverture sommet