Initiation à la combinatoire des mots - GMIN314

Gwenaël Richomme

gwenael.richomme@lirmm.fr

Cours 3

Administration

- Séances jusqu'au 17 décembre (examen final)

A faire pour aujourd'hui

Exercice 4.3

Soient $x, y, z \in A^*$. Montrer que $x^2 = y^2z^2$ si et seulement s'il existe un mot t tel que $x, y, z \in t^*$ et $x = yz$.

A faire pour aujourd'hui

Exercice 4.3

Soient $x, y, z \in A^*$. Montrer que $x^2 = y^2z^2$ si et seulement s'il existe un mot t tel que $x, y, z \in t^*$ et $x = yz$.

1) Partie "si"

A faire pour aujourd'hui

Exercice 4.3

Soient $x, y, z \in A^*$. Montrer que $x^2 = y^2z^2$ si et seulement s'il existe un mot t tel que $x, y, z \in t^*$ et $x = yz$.

1) Partie "si"
2) Partie "seulement si"
Preuve 1 = cas particulier lemme 3.11

Theorem (Lyndon and Schützenberger 1962)

x, y et z mots
$m, n, q \geq 2$ entiers
si $x^m y^n = z^q$ alors x, y et z ont même racine primitive.

La dernière fois

Theorem (Théorème de Fine et Wilf)

Soient x et y deux mots non vides. Soient p, q deux entiers. Si x^p et y^q ont un préfixe commun de longueur $\geq$

$$|x|+|y|\text{-pgcd}(|x|,|y|),$$

alors x et y ont la même racine primitive.

Corollary (Lemme de périodicité - preuve à faire pour aujourd'hui)

Si p et q sont deux périodes d'un mot non vide x telles que

$$p + q - \mathrm{pgcd}(p, q) \leq |x|$$

alors $\mathrm{pgcd}(p, q)$ est aussi une période de x.

Dernière fois : plan pour montrer optimalité

Définitions

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

Lemma (Exercice 5.9 - Vu)

pour tout entier $n \geq 1$, *pgcd*$(|f_n|, |f_{n+1}|) = 1$

Lemma (Propriété 5.13 - Vu)

Pour $n \geq 3$, f_n^2 *et* f_{n-1}^3 *ont un préfixe commun de longueur*

$$|f_{n+1}| - 2 = |f_n| + |f_{n-1}| - 2.$$

Lemma (Propriété 5.7 - A réfléchir)

Pour tout $n \geq 0$, f_n *est un mot primitif.*

Partie 3 optimalité

Lemma (Propriété 5.7)

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Conséquence des deux résultats suivant :
Soit φ le morphisme, appelé *morphisme de Fibonacci*, défini par :

$$\varphi \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

Lemma (Propriété 5.5)

Pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \varphi^n(a)$.

Partie 3 optimalité

Lemma (Propriété 5.7)

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Conséquence des deux résultats suivant :
Soit φ le morphisme, appelé *morphisme de Fibonacci*, défini par :

$$\varphi \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

Lemma (Propriété 5.5)

Pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \varphi^n(a)$.

Lemma

Pour tout mot w, w est primitif si et seulement si $\varphi(w)$ est primitif.

Partie 3 optimalité

Lemma (Propriété 5.7)

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Conséquence des deux résultats suivant :
Soit φ le morphisme, appelé *morphisme de Fibonacci*, défini par :

$$\varphi \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

Lemma (Propriété 5.5)

Pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \varphi^n(a)$.

Lemma

Pour tout mot w, w est primitif si et seulement si $\varphi(w)$ est primitif.

(φ préserve les mots primitifs)

Parenthèse

Toute suite de mots définie par une relation de récurrence peut être définie à l'aide d'un morphisme.

Voir locally catenative sequences

Exercices

Question

Est-ce que tout morphisme préserve les mots primitifs ?

Exercices

Question

Est-ce que tout morphisme préserve les mots primitifs ?

Exercice 5.6

Montrer que le morphisme φ est injectif.

Passons aux mots infinis

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

a

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

ab

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

aba

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1} f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

$abaab$

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

$abaababa$

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

$$abaababaabaab$$

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1} f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

$abaababaabaababaababa$

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

$$abaababaabaababaababaabaababaabaab$$

Mot infini de Fibonacci

Rappels

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1} f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

$$abaababaabaababaababaabaababaabaab\ldots$$

Mot infini de Fibonacci

$\mathbf{F} = \lim_{n \to \infty} f_n$

Aussi : **F** est l'unique point fixe de φ

Plus formellement... éléments de topologie

A^ω = ensemble des mots infinis sur A
distance sur A^ω :

$$d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2^{|p|}}$$

où p est le plus long préfixe commun sur A

Plus formellement... éléments de topologie

A^ω = ensemble des mots infinis sur A
distance sur A^ω :

$$d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2^{|p|}}$$

où p est le plus long préfixe commun sur A

C'est une distance ! Pour tous mots $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$:

- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \geq 0$
- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$ ssi $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$
- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = d(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)$
- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \leq d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3) + d(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2)$

Plus formellement... éléments de topologie

A^ω = ensemble des mots infinis sur A
distance sur A^ω :

$$d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2^{|p|}}$$

où p est le plus long préfixe commun sur A

C'est une distance ! Pour tous mots $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$:

- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \geq 0$
- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$ ssi $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$
- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = d(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)$
- $d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \leq d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3) + d(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2)$

(A^ω, d) espace métrique $\rightarrow$ on peut parler de convergence de suites

Convergence de suites de mots infinis

La suite $(\mathbf{w_n})_{n \geq 0}$ converge vers le mot $\mathbf{w}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $(\mathbf{w_n}, \mathbf{w}) < \varepsilon$

Informellement : la longueur du plus long préfixe commune de $\mathbf{w}_n$ avec $\mathbf{w}$ tend vers l'infini

Convergence de suites de mots infinis

La suite $(\mathbf{w_n})_{n\geq 0}$ converge vers le mot $\mathbf{w}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $(\mathbf{w_n}, \mathbf{w}) < \varepsilon$

Informellement : la longueur du plus long préfixe commune de $\mathbf{w}_n$ avec $\mathbf{w}$ tend vers l'infini

Example

$\lim_{n\to\infty} a^n b^\omega =$

Convergence de suites de mots infinis

La suite $(\mathbf{w_n})_{n\geq 0}$ converge vers le mot $\mathbf{w}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $(\mathbf{w_n}, \mathbf{w}) < \varepsilon$

Informellement : la longueur du plus long préfixe commune de $\mathbf{w}_n$ avec $\mathbf{w}$ tend vers l'infini

Example

$\lim_{n\to\infty} a^n b^\omega = a^\omega$

Convergence de suites mots finis

Definition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de mots finis et $\#$ une lettre qui n'apparaît pas dans les mots u_n.
La suite de mots $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un mot infini $\mathbf{w}$ si la suite $(u_n\#^\omega)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathbf{w}$

Convergence de suites mots finis

Definition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de mots finis et $\#$ une lettre qui n'apparaît pas dans les mots u_n.
La suite de mots $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un mot infini $\mathbf{w}$ si la suite $(u_n\#^\omega)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathbf{w}$

En pratique, on considère souvent des suites de mots telles que u_n est toujours préfixe de u_{n+1}.

Adhérence d'un ensemble de mots finis

Lemme de Konig

Si X est un ensemble infini de mots et si X est clos par préfixes il existe un mot infini qui a tous ses préfixes dans X

Conséquence : 2 questions équivalentes
est-qu'il existe une infinité de mots ayant une propriété P ?
équivalent à
est-ce qu'il existe un mot infini ayant la propriété P ?

Points fixes de morphismes

En pratique, on s'intéresse souvent à des mots engendrés par des "mécanismes"

Points fixes de morphismes

En pratique, on s'intéresse souvent à des mots engendrés par des "mécanismes"

Mots engendrés par morphisme

- f est un morphisme prolongeable, si c'est un morphisme et il existe une lettre a telle que $f(a) = ax$ pour un mot x non vide.
- si $\forall n \geq 0,\ f^n(x) \neq \varepsilon$,
  $f^n(a) = axf(x)f^2(x) \ldots f^{n-1}(x)$ est un mot infini ...
- ... Noté $f^\omega(a)$

Exemples

- Mot de Fibonacci

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par μ : $a \mapsto ab$, $b \mapsto ba$

  Mot sans chevauchement

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par $\mu : a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$

  Mot sans chevauchement
- Mot engendré par $a \mapsto abc,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto b$

  Mot sans carré

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par $\mu : a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$

  Mot sans chevauchement
- Mot engendré par $a \mapsto abc,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto b$

  Mot sans carré
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto a,\ b \mapsto ab$?

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par $\mu : a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$

  Mot sans chevauchement
- Mot engendré par $a \mapsto abc,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto b$

  Mot sans carré
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto a,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto ab$?

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par $\mu : a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$

  Mot sans chevauchement
- Mot engendré par $a \mapsto abc,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto b$

  Mot sans carré
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto a,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto b$?

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par $\mu : a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$

  Mot sans chevauchement
- Mot engendré par $a \mapsto abc,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto b$

  Mot sans carré
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto a,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto b$?
- Est-ce qu'il existe des mots périodiques non engendrés par morphisme ?

Exemples

- Mot de Fibonacci
- Mot de Thue-Morse engendré par $\mu : a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$
  Mot sans chevauchement
- Mot engendré par $a \mapsto abc,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto b$
  Mot sans carré
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto a,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto ab$?
- Quel est le mot engendré par $f : a \mapsto ab,\ b \mapsto b$?
- Est-ce qu'il existe des mots périodiques non engendrés par morphisme ?
- Est-ce que le mot aab^{ω} est engendrable par morphisme ?
  Question à faire pour la semaine prochaine

Exercices A faire pour la semaine prochaine

Exercice

Montrer que le mot de Fibonacci ne contient aucun facteur de la forme

$$u\alpha u\alpha u\alpha u$$

avec u mot et α lettre

Exercices A faire pour la semaine prochaine

Exercice

Montrer que le mot de Fibonacci ne contient aucun facteur de la forme

$$u\alpha u\alpha u\alpha u$$

avec u mot et α lettre

Exercice

Quel est le plus grand entier k tel qu'il existe un facteur de la forme u^k dans le mot infini de Fibonacci ?

Exercices A faire pour la semaine prochaine

Exercice

Montrer que le mot de Fibonacci ne contient aucun facteur de la forme

$$u\alpha u\alpha u\alpha u$$

avec u mot et α lettre

Exercice

Quel est le plus grand entier k tel qu'il existe un facteur de la forme u^k dans le mot infini de Fibonacci ?

Exercice

Quel est le plus grand entier k tel qu'il existe un préfixe de la forme u^k dans le mot infini de Fibonacci ?