Initiation à la combinatoire des mots - GMIN314

Gwenaël Richomme

gwenael.richomme@lirmm.fr

Cours 4

Dernière fois

Vu : mots engendrés par morphisme

Dernière fois

Vu : mots engendrés par morphisme

Question à faire pour aujourd'hui

Est-ce que le mot aab^{ω} est engendrable par morphisme ?

Exercice

Montrer que le mot de Fibonacci ne contient aucun facteur de la forme

$$u\alpha u\alpha u\alpha u$$

avec u mot et α lettre

Exercices A faire pour aujourd'hui

Exercice

Montrer que le mot de Fibonacci ne contient aucun facteur de la forme

$$u\alpha u\alpha u\alpha u$$

avec u mot et α lettre

Exercice

Quel est le plus grand entier k tel qu'il existe un facteur de la forme u^k dans le mot infini de Fibonacci ?

Exercices A faire pour aujourd'hui

Exercice

Montrer que le mot de Fibonacci ne contient aucun facteur de la forme

$$u\alpha u\alpha u\alpha u$$

avec u mot et α lettre

Exercice

Quel est le plus grand entier k tel qu'il existe un facteur de la forme u^k dans le mot infini de Fibonacci ?

Exercice

Quel est le plus grand entier k tel qu'il existe un préfixe de la forme u^k dans le mot infini de Fibonacci ?

Point fixe de morphisme

Propriété

Tout mot engendré par un morphisme f est point fixe de f.

Est-ce que la réciproque est vraie ?

Mots morphiques

Un mot $\mathbf{w}$ est appelé *morphique* s'il existe un morphisme f prolongeable en une lettre a et un morphisme g tel que :

$$\mathbf{w} = g(f^{\omega}(a))$$

Mots morphiques

Un mot $\mathbf{w}$ est appelé *morphique* s'il existe un morphisme f prolongeable en une lettre a et un morphisme g tel que :

$$\mathbf{w} = g(f^{\omega}(a))$$

Montrer que tout mot ultimement périodique est morphique.

Autres moyens de générer des mots

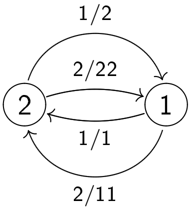
- L-systèmes

Autres moyens de générer des mots

- L-systèmes
- Mots automatiques, lien avec les systèmes de numération

Autres moyens de générer des mots

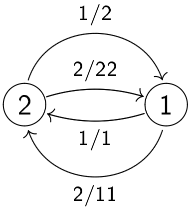
- L-systèmes
- Mots automatiques, lien avec les systèmes de numération
- Automates avec sorties



Kolakoski 221121221 . . .

Autres moyens de générer des mots

- L-systèmes
- Mots automatiques, lien avec les systèmes de numération
- Automates avec sorties



Kolakoski 221121221 . . .

Questions ouvertes :

- fréquence des 2 = fréquence des 1 ?
- est-ce que le mot est récurrent ?
- est-ce que le mot est fermé par image miroir ? par échange ?

- etc

Mots équilibrés

Mots équilibrés

Définition

Un mot (fini ou infini) est dit *équilibré* si :
pour tous facteurs u et v de même longueur et
pour toute lettre a

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1$$

Mots équilibrés

Définition

Un mot (fini ou infini) est dit *équilibré* si :
pour tous facteurs u et v de même longueur et
pour toute lettre a

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1$$

Exemples :

- *abababbabaab*

Mots équilibrés

Définition

Un mot (fini ou infini) est dit *équilibré* si :
pour tous facteurs u et v de même longueur et
pour toute lettre a

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1$$

Exemples :

- $ababab\,babaab$ non équilibré
- $aabaababaabaababaababaabab$

Mots équilibrés

Définition

Un mot (fini ou infini) est dit *équilibré* si :
pour tous facteurs u et v de même longueur et
pour toute lettre a

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1$$

Exemples :

- $ababbbabaab$ non équilibré
- $aabaababaabaababaababaabab$ non équilibré
- $abaababaabaababaababa$

Mots équilibrés

Définition

Un mot (fini ou infini) est dit *équilibré* si :
pour tous facteurs u et v de même longueur et
pour toute lettre a

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1$$

Exemples :

- *abababbabaab* non équilibré
- *aabaababaabaababaababaabab* non équilibré
- *abaababaabaababaababa* équilibré

Définition

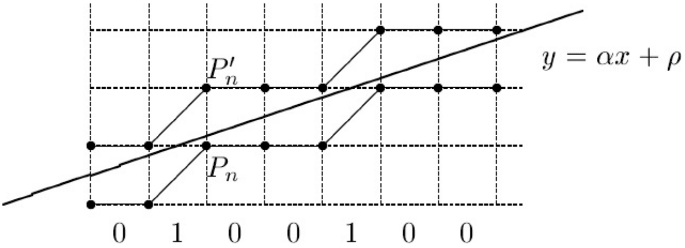
Mot sturmien = mot infini équilibré non ultimement périodique

Mots mécaniques

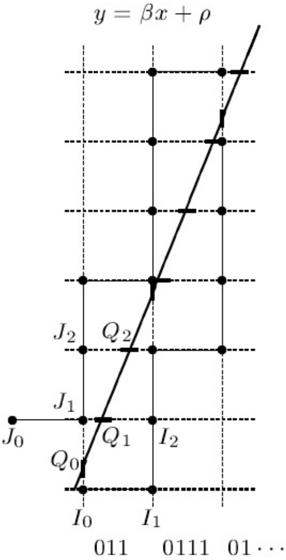
Un mot **w** est dit *mécanique* si $\exists\alpha \in [0,1]$, $\exists\rho$ réel t.q.

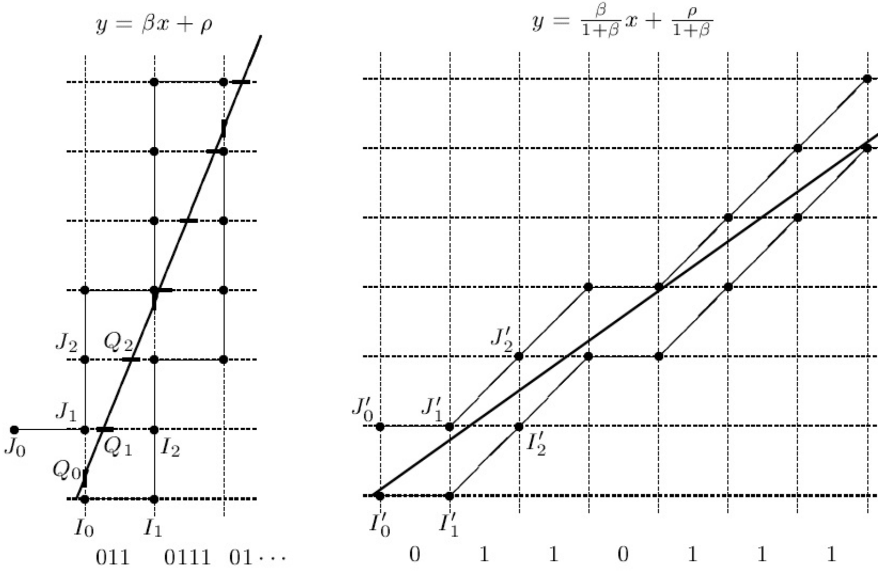
- (mot inférieur) $\forall n \geq 0$, $\mathbf{w}[n] = \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$;
- (mot supérieur) $\forall n \geq 0$, $\mathbf{w}[n] = \lceil \alpha(n+1)+\rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil$.

Un tel mot est dit mécaniquement irrationnel si α est irrationnel. Le réel α est appelé la pente du mot.



Mots équilibrés binaires et droite




$y = \beta x + \rho$
J_2
Q_2
J_1
J_0
Q_1
I_2
Q_0
I_0
I_1
011 0111 01 · · ·
$y = \frac{\beta}{1+\beta}x + \frac{\rho}{1+\beta}$
J'_2
J'_0
J'_1
I'_2
I'_0
I'_1
0 1 1 0 1 1 1

Mots équilibrés binaires et droite (suite)

Théorème

Sont équivalents pour un mot infini **w** sur $\{a, b\}$:

1. **w** est sturmien ;
2. **w** est mécaniquement irrationnel.

Résultat

Un mot fini est équilibré
si et seulement si
il est facteur d'un mot sturmien

Mots équilibrés binaires : combinatoire

Propriété

Pour u et v mots sur $\{a, b\}$ avec $|u| = |v|$,
sont équivalent :

- $||u|_a - |v|_a| \leq 1$
- $||u|_b - |v|_b| \leq 1$

Mots équilibrés binaires : combinatoire

Propriété

Pour u et v mots sur $\{a, b\}$ avec $|u| = |v|$,
sont équivalent :

- $||u|_a - |v|_a| \leq 1$
- $||u|_b - |v|_b| \leq 1$

Lemme 8.4

Un mot (fini ou infini) $\mathbf{w}$ sur $\{a, b\}$ n'est pas équilibré,

si et seulement si

$\exists u$ tel que aua et bub sont deux facteurs de $\mathbf{w}$.

Exercice 8.5

Un mot (fini ou infini) $\mathbf{w}$ sur $\{a, b\}$ n'est pas équilibré,

si et seulement si

$\exists u$ palindrome tel que aua et bub sont deux facteurs de $\mathbf{w}$.

Balanced words and morphisms

- Let w be an infinite binary balanced word :
  for factors u, v of same length, and for any letter a,
  $$||u|_a - |v|_a| \leq 1.$$

Balanced words and morphisms

- Let w be an infinite binary balanced word :
  for factors u, v of same length, and for any letter a,
  $$||u|_a - |v|_a| \leq 1.$$
- A letter a exists such that,
  for x, y letters, xy factor of w implies $x = a$ or $y = a$

Balanced words and morphisms

- Let w be an infinite binary balanced word :

- A letter a exists such that,
  for x, y letters, xy factor of w implies $x = a$ or $y = a$
- Let b be the other letter :
  w can be decomposed over $\{ab, a\}$ or over $\{ba, a\}$
  (depending of its first letter)

Balanced words and morphisms

- Let w be an infinite binary balanced word :

- Let b be the other letter :
  w can be decomposed over $\{ab, a\}$ or over $\{ba, a\}$

- Let L_a, R_a be the morphisms defined by :
$$L_a \left\{ \begin{array}{l} a \mapsto a \\ b \mapsto ab, \end{array} \right. \qquad R_a \left\{ \begin{array}{l} a \mapsto a \\ b \mapsto ba. \end{array} \right.$$
(morphism f : $f(uv) = f(u)f(v)$ for all words u, v)

Balanced words and morphisms

- Let w be an infinite binary balanced word :

- Let b be the other letter :

  w can be decomposed over $\{ab, a\}$ or over $\{ba, a\}$

- Let L_a, R_a be the morphisms defined by :

$$L_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab, \end{cases} \qquad R_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba. \end{cases}$$

- Thus $w = L_a(w')$ or $w = R_a(bw')$ for an infinite word w'.

Balanced words and morphisms (continued)

- Moreover, if
$$w = L_a(w') \text{ or } w = R_a(bw')$$
with $L_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab, \end{cases}$ $\qquad R_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba. \end{cases}$

  then
$$w \text{ is balanced if and only if } w' \text{ or } bw' \text{ is.}$$

Balanced words and morphisms (continued)

- Moreover, if

$$w = L_a(w') \text{ or } w = R_a(bw')$$

with $L_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab, \end{cases}$ $\qquad R_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba. \end{cases}$

then

w is balanced if and only if w' or bw' is.

- Also true if $w = L_b(w')$ or $w = R_b(w')$ where

$L_b \begin{cases} a \mapsto ba \\ b \mapsto b, \end{cases}$ $\qquad R_b \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto b. \end{cases}$

Balanced words and morphisms (continued)

- Moreover, if
$$w = L_a(w') \text{ or } w = R_a(bw')$$
with $L_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab, \end{cases}$ $\qquad R_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba. \end{cases}$
then
$$w \text{ is balanced if and only if } w' \text{ or } bw' \text{ is.}$$
- Also true if $w = L_b(w')$ or $w = R_b(w')$ where
$L_b \begin{cases} a \mapsto ba \\ b \mapsto b, \end{cases}$ $\qquad R_b \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto b. \end{cases}$
- Conclusion :
w can be recursively decomposed over $\{L_a, R_a, L_b, R_b\}$.

Balanced words and morphisms (continued)

- Moreover, if
$$w = L_a(w') \text{ or } w = R_a(bw')$$
with $L_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab, \end{cases}$ $\qquad R_a \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba. \end{cases}$
then
$$w \text{ is balanced if and only if } w' \text{ or } bw' \text{ is.}$$
- Also true if $w = L_b(w')$ or $w = R_b(w')$ where
$L_b \begin{cases} a \mapsto ba \\ b \mapsto b, \end{cases}$ $\qquad R_b \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto b. \end{cases}$
- Conclusion :
w can be recursively decomposed over $\{L_a, R_a, L_b, R_b\}$.

Property (see [Lothaire's second book])

An infinite binary word is balanced if and only if it is $\{L_a, R_a, L_b, R_b\}$-adic.

Exercices/questions

Vrai ou faux ?

Si $\mathbf{w} = f(\mathbf{w}')$ avec $f \in \{L_a, R_a, L_b, R_b\}$
Alors $\mathbf{w}$ équilibré $\Rightarrow$ $\mathbf{w}'$ équilibré.

Exercices/questions

Vrai ou faux ?

Si $\mathbf{w} = f(\mathbf{w}')$ avec $f \in \{L_a, R_a, L_b, R_b\}$
Alors $\mathbf{w}$ équilibré $\Rightarrow$ $\mathbf{w}'$ équilibré.

Faux = Considérer le mot $\mathbf{w}$ tel $(ab)^{-1}\mathbf{F} = R_a(\mathbf{w})$

Exercices/questions

Vrai ou faux ?

Si $\mathbf{w} = f(\mathbf{w}')$ avec $f \in \{L_a, R_a, L_b, R_b\}$
Alors $\mathbf{w}$ équilibré $\Rightarrow$ $\mathbf{w}'$ équilibré.

Faux = Considérer le mot $\mathbf{w}$ tel $(ab)^{-1}\mathbf{F} = R_a(\mathbf{w})$

Montrer

Si $w = L_a(w')$ avec w infini alors
w équilibré $\Leftrightarrow$ w' équilibré

Exercices/questions

Vrai ou faux ?

Si $\mathbf{w} = f(\mathbf{w}')$ avec $f \in \{L_a, R_a, L_b, R_b\}$
Alors $\mathbf{w}$ équilibré $\Rightarrow$ $\mathbf{w}'$ équilibré.

Faux = Considérer le mot $\mathbf{w}$ tel $(ab)^{-1}\mathbf{F} = R_a(\mathbf{w})$

Montrer

Si $w = L_a(w')$ avec w infini alors
w équilibré $\Leftrightarrow$ w' équilibré

Montrer

Si $w = R_a(bw')$ avec w infini alors
w équilibré $\Leftrightarrow$ bw' équilibré

Périodicité

Vrai ou faux ?

pour α lettre que :
mot **w** est périodique,
si et seulement si, $L_\alpha(\mathbf{w})$ est périodique
si et seulement si, $R_\alpha(\mathbf{w})$ est périodique.

Périodicité

Vrai ou faux ?

pour α lettre que :
mot **w** est périodique,
si et seulement si, $L_\alpha(\mathbf{w})$ est périodique
si et seulement si, $R_\alpha(\mathbf{w})$ est périodique.

Montrer (lemme 8.2) corrigé

Pour **w** un mot infini sur $\{a, b\}$:

- Si w est périodique alors $f(\mathbf{w})$ est périodique pour tout morphisme f non effaçant ;
- Si $L_a(\mathbf{w})$ ou $L_b(\mathbf{w})$ est périodique alors **w** est périodique ;
- Si $R_a(b\mathbf{w})$ (resp. $L_b(a\mathbf{w})$) est périodique alors $b\mathbf{w}$ (resp. $a\mathbf{w}$) est périodique.

Exercices

Montrer que si $\mathbf{w}$ est équilibré et périodique, alors $\mathbf{w} = f(a^\omega)$ ou $\mathbf{w} = f(b^\omega)$ avec $f \in \{L_a, L_b, R_a, R_b\}^*$.

Montrer que si $\mathbf{w}$ est équilibré et ultimement périodique mais non périodique, alors $\mathbf{w} = f(ab^\omega)$ ou $\mathbf{w} = f(ba^\omega)$ avec $f \in \{L_a, L_b, R_a, R_b\}^*$.

Montrer que si $\mathbf{w}$ est équilibré et apériodique (non ultimement périodique), alors dans toute décomposition infinie de $\mathbf{w}$ sur $\{L_a, L_b, R_a, R_b\}$, les morphismes L_a ou R_a apparaissent infiniment souvent, et, les morphismes L_b ou R_b apparaissent infiniment souvent.