# Trouver le plus petit sous-graphe avec degré minimum donné

**Ignasi Sau**

Projet MASCOTTE, CNRS/I3S-INRIA-UNSA, France

**Travail commun avec O. Amini, S. Pérennes et S. Saurabh**

*9èmes Journées Graphes et Algorithmes - Paris*

# Plan de l'exposé

- Définition du problème:
  **Trouver le plus petit sous-graphe avec degré minimum donné**
- Motivations
  - Rapport avec DENSE $k$-SUBGRAPH
  - Rapport avec TRAFFIC GROOMING
- Complexité classique
  - Introduction
  - Résultats d'inapproximabilité (+preuve)
    ***Travail commun avec O. Amini, S. Pérennes et S. Saurabh (en cours)***
- Complexité paramétrique
  - Introduction
  - Résultats
    ***Travail commun avec O. Amini et S. Saurabh (soumis)***
- Conclusions

# Trouver le plus petit sous-graphe avec degré minimum donné

# Définition du problème

- **MINIMUM SUBGRAPH OF MINIMUM DEGREE $\geq d$ (MSMD$_d$)**:

  Soit $d$ un entier positif, et $G = (V, E)$ un graphe.

  Il s'agit de trouver le plus petit sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, tel que $G[S]$ a degré minimum $\geq d$.

- Le problème pour $d = 2$ revient à trouver la maille d'un graphe, qui est polynomial.

- On a prouvé que pour $d \geq 3$, MSMD$_d$ n'est pas dans APX (en particulier, est NP-complet).

# Définition du problème

- **MINIMUM SUBGRAPH OF MINIMUM DEGREE $\geq d$ (MSMD$_d$)**:

  Soit $d$ un entier positif, et $G = (V, E)$ un graphe.

  Il s'agit de trouver le plus petit sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, tel que $G[S]$ a degré minimum $\geq d$.

- Le problème pour $d = 2$ revient à trouver la maille d'un graphe, qui est polynomial.

- On a prouvé que pour $d \geq 3$, MSMD$_d$ n'est pas dans APX (en particulier, est NP-complet).

# Définition du problème

- **MINIMUM SUBGRAPH OF MINIMUM DEGREE** $\geq d$ **(MSMD$_d$)**:

  Soit $d$ un entier positif, et $G = (V, E)$ un graphe.

  Il s'agit de trouver le plus petit sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, tel que $G[S]$ a degré minimum $\geq d$.

- Le problème pour $d = 2$ revient à trouver la maille d'un graphe, qui est polynomial.

- On a prouvé que pour $d \geq 3$, MSMD$_d$ n'est pas dans APX (en particulier, est NP-complet).

# Motivation 1: rapport avec le DENSE-$k$-SUBGRAPH

- *Densité* $\rho(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$:

$$\rho(G) := \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$$

De manière plus générale, pour $S \subset V(G)$:

$$\rho(S) := \rho(G[S])$$

- Problème du DENSE $k$-SUBGRAPH:

DENSE $k$-SUBGRAPH (D$k$S):
**Instance**: un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $k$.
**Sortie**: un sous-ensemble $S \subseteq V$, avec $|S| = k$, tel que $\rho(S)$ est maximisé.

*(U.Feige, D.Peleg et G.Kortsarz, Algorithmica'01)*
*(S.Khot, FOCS'04)*

# Motivation 1: rapport avec le DENSE-$k$-SUBGRAPH (II)

- Supposons qu'on veut trouver un sous-graphe induit $G[S]$ de taille au plus $k$ et densité au moins $\rho$.
  On peut aussi supposer que $S$ est minimal, c.a.d. aucun sous-ensemble de $S$ a densité plus grande que $\rho(S)$.

  1) Tous les sommets de $G[S]$ ont degré au moins $\rho/2$.
     S'il y a un sommet $v$ de degré plus petit que $\rho/2$, alors en l'enlevant on obtient un sous-graphe plus petit avec une densité plus grande.

  2) Si on a un sous-graphe $G[S]$ de degré minimum au moins $\rho$, alors $S$ est un sous-ensemble de densité au moins $\rho/2$.

- Et donc, **modulo un facteur constant**, chercher le sous-graphe le plus dense de $G$ de taille au plus $k$ **c'est aussi difficile** que chercher la plus grande valeur de $\rho$ pour laquelle il existe un sous-graphe de $G$ de taille au plus $k$ et de degré minimum au moins $\rho$.

# Motivation 1: rapport avec le DENSE-$k$-SUBGRAPH (II)

- Supposons qu'on veut trouver un sous-graphe induit $G[S]$ de taille au plus $k$ et densité au moins $\rho$.
  On peut aussi supposer que $S$ est minimal, c.a.d. aucun sous-ensemble de $S$ a densité plus grande que $\rho(S)$.

  1) Tous les sommets de $G[S]$ ont degré au moins $\rho/2$.
     S'il y a un sommet $v$ de degré plus petit que $\rho/2$, alors en l'enlevant on obtient un sous-graphe plus petit avec une densité plus grande.

  2) Si on a un sous-graphe $G[S]$ de degré minimum au moins $\rho$, alors $S$ est un sous-ensemble de densité au moins $\rho/2$.

- Et donc, **modulo un facteur constant**, chercher le sous-graphe le plus dense de $G$ de taille au plus $k$ **c'est aussi difficile** que chercher la plus grande valeur de $\rho$ pour laquelle il existe un sous-graphe de $G$ de taille au plus $k$ et de degré minimum au moins $\rho$.

# Motivation 1: rapport avec le DENSE-$k$-SUBGRAPH (II)

- Supposons qu'on veut trouver un sous-graphe induit $G[S]$ de taille au plus $k$ et densité au moins $\rho$.
  On peut aussi supposer que $S$ est minimal, c.a.d. aucun sous-ensemble de $S$ a densité plus grande que $\rho(S)$.

  1) Tous les sommets de $G[S]$ ont degré au moins $\rho/2$.
     S'il y a un sommet $v$ de degré plus petit que $\rho/2$, alors en l'enlevant on obtient un sous-graphe plus petit avec une densité plus grande.

  2) Si on a un sous-graphe $G[S]$ de degré minimum au moins $\rho$, alors $S$ est un sous-ensemble de densité au moins $\rho/2$.

- Et donc, **modulo un facteur constant**, chercher le sous-graphe le plus dense de $G$ de taille au plus $k$ **c'est aussi difficile** que chercher la plus grande valeur de $\rho$ pour laquelle il existe un sous-graphe de $G$ de taille au plus $k$ et de degré minimum au moins $\rho$.

# Motivation 1: rapport avec le DENSE-$k$-SUBGRAPH (II)

- Supposons qu'on veut trouver un sous-graphe induit $G[S]$ de taille au plus $k$ et densité au moins $\rho$.
  On peut aussi supposer que $S$ est minimal, c.a.d. aucun sous-ensemble de $S$ a densité plus grande que $\rho(S)$.

  1) Tous les sommets de $G[S]$ ont degré au moins $\rho/2$.
     S'il y a un sommet $v$ de degré plus petit que $\rho/2$, alors en l'enlevant on obtient un sous-graphe plus petit avec une densité plus grande.

  2) Si on a un sous-graphe $G[S]$ de degré minimum au moins $\rho$, alors $S$ est un sous-ensemble de densité au moins $\rho/2$.

- Et donc, **modulo un facteur constant**, chercher le sous-graphe le plus dense de $G$ de taille au plus $k$ **c'est aussi difficile** que chercher la plus grande valeur de $\rho$ pour laquelle il existe un sous-graphe de $G$ de taille au plus $k$ et de degré minimum au moins $\rho$.

# Motivation 2: rapport avec le GROUPAGE DE TRAFIC

- En gros, le groupage consiste à trouver des sous-graphes avec un grand rapport $\frac{\text{arêtes}}{\text{sommets}}$ (**densité**), et un nombre ”borné” d'arêtes
- C.a.d., on veut trouver des sous-graphes avec un grand degré moyen (et un nombre ”borné” d'arêtes)
- La densité et le degré minimum sont reliés par un facteur 2
- Et donc, si on sait trouver de petits sous-graphes de degré minimum fixé, on sait aussi trouver de petits sous-graphes ayant une ”bonne” densité

# Motivation 2: rapport avec le GROUPAGE DE TRAFIC

- En gros, le groupage consiste à trouver des sous-graphes avec un grand rapport $\frac{\text{arêtes}}{\text{sommets}}$ (**densité**), et un nombre "borné" d'arêtes
- C.a.d., on veut trouver des sous-graphes avec un grand degré moyen (et un nombre "borné" d'arêtes)
- La densité et le degré minimum sont reliés par un facteur 2
- Et donc, si on sait trouver de petits sous-graphes de degré minimum fixé, on sait aussi trouver de petits sous-graphes ayant une "bonne" densité

# Motivation 2: rapport avec le GROUPAGE DE TRAFIC

- En gros, le groupage consiste à trouver des sous-graphes avec un grand rapport $\frac{\text{arêtes}}{\text{sommets}}$ (**densité**), et un nombre ”borné” d'arêtes
- C.a.d., on veut trouver des sous-graphes avec un grand degré moyen (et un nombre ”borné” d'arêtes)
- La densité et le degré minimum sont reliés par un facteur 2
- Et donc, si on sait trouver de petits sous-graphes de degré minimum fixé, on sait aussi trouver de petits sous-graphes ayant une ”bonne” densité

# Complexité classique

# Deux classes classiques

- **Classe APX (Approximable):**

  un problème d'optimisation est dans APX s'il admet un algorithme d'approximation avec un rapport constant.

  ***Exemple**:* VERTEX COVER

- **Classe PTAS (Polynomial-Time Approximation Scheme):**

  un problème d'optimisation est dans PTAS s'il admet des algorithmes d'approximation avec un rapport $1 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ (le meilleur qu'on peut espérer pour un problème d'optimisation).

  ***Ex.**:* TRAVELING SALESMAN PROBLEM *dans le plan euclidien*

# Deux classes classiques

- **Classe APX (Approximable):**

  un problème d'optimisation est dans APX s'il admet un algorithme d'approximation avec un rapport constant.

  ***Exemple**:* VERTEX COVER

- **Classe PTAS (Polynomial-Time Approximation Scheme):**

  un problème d'optimisation est dans PTAS s'il admet des algorithmes d'approximation avec un rapport $1 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ (le meilleur qu'on peut espérer pour un problème d'optimisation).

  ***Ex.**:* TRAVELING SALESMAN PROBLEM *dans le plan euclidien*

# Deux classes classiques

- **Classe APX (Approximable):**

  un problème d'optimisation est dans APX s'il admet un algorithme d'approximation avec un rapport constant.

  ***Exemple**:* VERTEX COVER

- **Classe PTAS (Polynomial-Time Approximation Scheme):**

  un problème d'optimisation est dans PTAS s'il admet des algorithmes d'approximation avec un rapport $1+\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ (le meilleur qu'on peut espérer pour un problème d'optimisation).

  ***Ex.**:* TRAVELING SALESMAN PROBLEM *dans le plan euclidien*

# Résultats

- **$\text{MSMD}_d$ n'est pas dans APX** en deux étapes:
  d'abord, on prouve que le problème n'accepte pas de PTAS avec une réduction de VERTEX COVER.

  Après, avec la technique de l'*amplification de l'erreur* on prouve que $\text{MSMD}_d$ n'est pas dans APX pour tout $d \geq 3$.

- $\text{MSMD}_d$ est dans P pour graphes de tree-width $\mathcal{O}(\log n)$, avec un algorithme qui utilise la programmation dynamique.

- $\mathcal{O}(\frac{n}{\log n})$-approximation pour les graphes mineur-exclus et graphes à tree-width localement bornée

  (graphes planaires, graphes de genre borné, graphes de degré borné)

# Résultats

- **MSMD$_d$ n'est pas dans APX** en deux étapes:
  d'abord, on prouve que le problème n'accepte pas de PTAS avec une réduction de VERTEX COVER.

  Après, avec la technique de l'*amplification de l'erreur* on prouve que MSMD$_d$ n'est pas dans APX pour tout $d \geq 3$.

- MSMD$_d$ est dans P pour graphes de tree-width $\mathcal{O}(\log n)$, avec un algorithme qui utilise la programmation dynamique.

- $\mathcal{O}(\frac{n}{\log n})$-approximation pour les graphes mineur-exclus et graphes à tree-width localement bornée

  (graphes planaires, graphes de genre borné, graphes de degré borné)

# Idée de la preuve pour $d = 3$

(1) On va voir d'abord que $\text{MSMD}_3 \notin \text{PTAS}$.

(2) Et après on verra que $\text{MSMD}_3 \notin \text{APX}$.

# Idée de la preuve pour $d = 3$

(1) On va voir d'abord que $\text{MSMD}_3 \notin$ PTAS.

(2) Et après on verra que $\text{MSMD}_3 \notin$ APX.

# (1) *MSMD*$_3$ n'est pas dans *PTAS*

- Réduction de VERTEX COVER:

  **Instance $H$ de VERTEX COVER $\rightarrow$ Instance $G$ de MSMD$_3$**

- On va voir que

$$\text{PTAS pour } G \Rightarrow \text{PTAS pour } H$$

- Et donc,

$$\nexists \text{ PTAS pour MSMD}_3$$

- On peut supposer $|E(H)| = 3 \cdot 2^m$

# (1) $MSMD_3$ n'est pas dans *PTAS*

- Réduction de VERTEX COVER:

  **Instance $H$ de VERTEX COVER $\rightarrow$ Instance $G$ de MSMD$_3$**

- On va voir que

$$\text{PTAS pour } G \Rightarrow \text{PTAS pour } H$$

- Et donc,

$$\nexists \text{ PTAS pour MSMD}_3$$

- On peut supposer $|E(H)| = 3 \cdot 2^m$

# (1) *MSMD*$_3$ n'est pas dans *PTAS*

- Réduction de VERTEX COVER:

  **Instance $H$ de VERTEX COVER $\rightarrow$ Instance $G$ de MSMD$_3$**

- On va voir que

$$\text{PTAS pour } G \;\Rightarrow\; \text{PTAS pour } H$$

- Et donc,

$$\nexists\, \text{PTAS pour MSMD}_3$$

- On peut supposer $|E(H)| = 3 \cdot 2^m$

# (1) *MSMD*$_3$ n'est pas dans *PTAS*

- Réduction de VERTEX COVER:

  **Instance $H$ de VERTEX COVER $\rightarrow$ Instance $G$ de MSMD$_3$**

- On va voir que

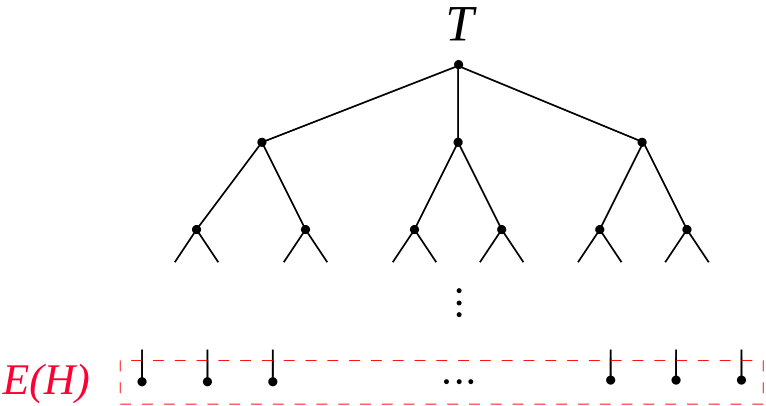
$$\text{PTAS pour } G \;\Rightarrow\; \text{PTAS pour } H$$

- Et donc,

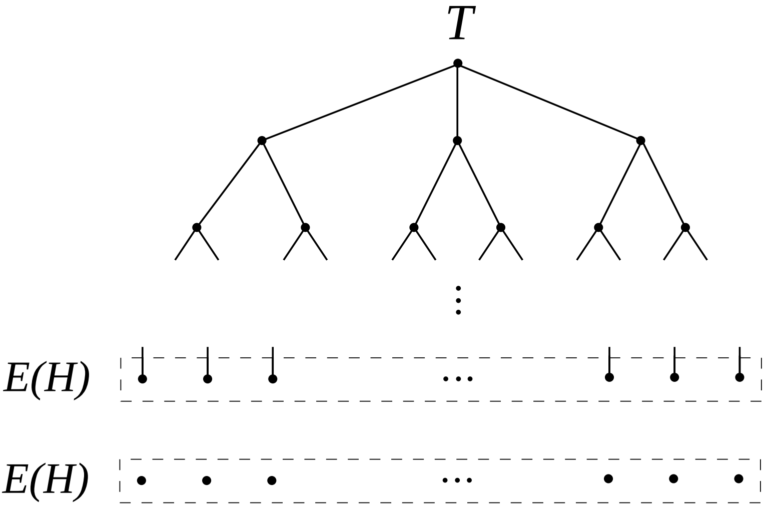
$$\nexists \text{ PTAS pour MSMD}_3$$

- On peut supposer $|E(H)| = 3 \cdot 2^m$

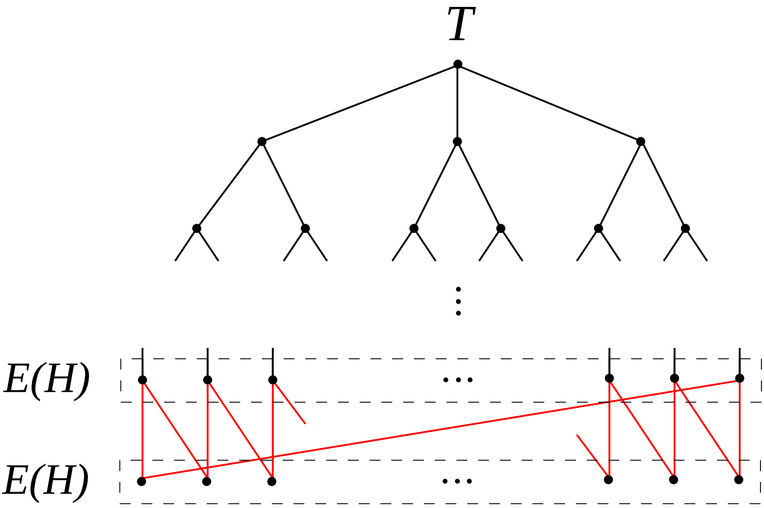
On prend un arbre ternaire complet avec $|E(H)| = 3 \cdot 2^m$ feuilles:



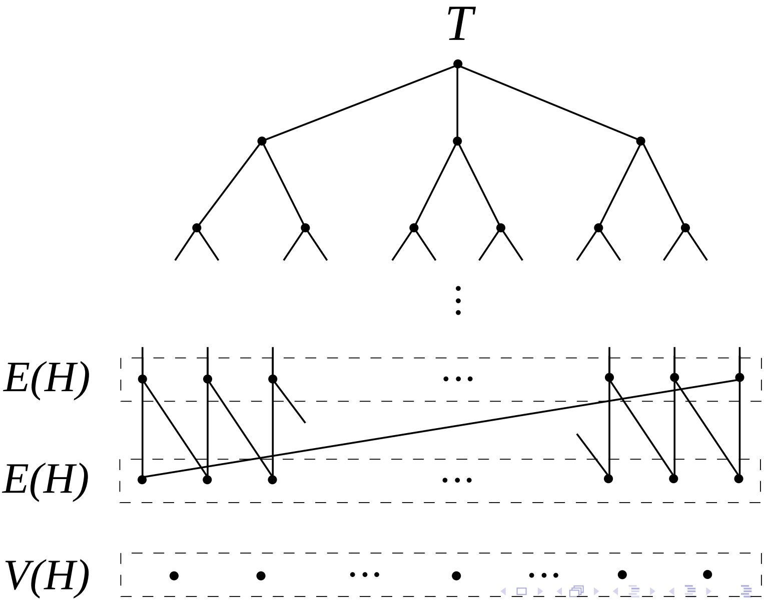
On rajoute une copie de l'ensemble de feuilles $E(H)$:



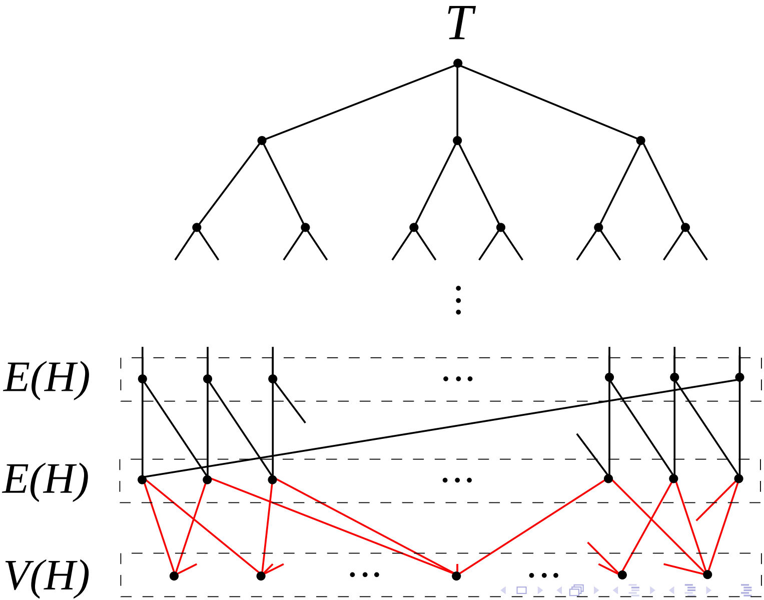
On relie les deux ensembles avec un cycle Hamiltonien:



On rajoute tous les sommets de $H$:



On rajoute les relations d'adjacence entre $E(H)$ et $V(H) \rightarrow G$:



# (1) $\mathrm{MSMD}_3$ n'est pas dans PTAS

- Si on touche un sommet de $G \setminus V(H)$, on doit toucher **tous** les sommets de $G \setminus V(H)$

- Donc, $\mathrm{MSMD}_3$ pour $G$ est équivalent à minimiser le nombre de sommets touchés dans $V(H)$

  $\rightarrow$ c'est **exactement** VERTEX COVER pour $H$ !!

- Donc,

$$OPT_{\mathrm{MSMD}_3}(G) = OPT_{\mathrm{VC}}(H) + |V(G \setminus V(H))| =$$
$$= OPT_{\mathrm{VC}}(H) + 9 \cdot 2^m$$

- Ca prouve que

$$\text{PTAS pour } \mathrm{MSMD}_3 \quad \Rightarrow \quad \text{PTAS pour VERTEX COVER}$$

# (1) $\text{MSMD}_3$ n'est pas dans PTAS

- Si on touche un sommet de $G \setminus V(H)$, on doit toucher **tous** les sommets de $G \setminus V(H)$
- Donc, $\text{MSMD}_3$ pour $G$ est équivalent à minimiser le nombre de sommets touchés dans $V(H)$

  $\rightarrow$ c'est **exactement** VERTEX COVER pour $H$ !!

- Donc,

$$OPT_{\text{MSMD}_3}(G) = OPT_{\text{VC}}(H) + |V(G \setminus V(H))| =$$
$$= OPT_{\text{VC}}(H) + 9 \cdot 2^m$$

- Ca prouve que

$$\text{PTAS pour MSMD}_3 \Rightarrow \text{PTAS pour VERTEX COVER}$$

# (1) MSMD$_3$ n'est pas dans PTAS

- Si on touche un sommet de $G \setminus V(H)$, on doit toucher **tous** les sommets de $G \setminus V(H)$
- Donc, MSMD$_3$ pour $G$ est équivalent à minimiser le nombre de sommets touchés dans $V(H)$

  $\rightarrow$ c'est **exactement** VERTEX COVER pour $H$ !!
- Donc,

$$OPT_{\mathrm{MSMD}_3}(G) = OPT_{\mathrm{VC}}(H) + |V(G \setminus V(H))| =$$
$$= OPT_{\mathrm{VC}}(H) + 9 \cdot 2^m$$

- Ca prouve que

$$\text{PTAS pour MSMD}_3 \;\Rightarrow\; \text{PTAS pour VERTEX COVER}$$

# (1) $\text{MSMD}_3$ n'est pas dans PTAS

- Si on touche un sommet de $G \setminus V(H)$, on doit toucher **tous** les sommets de $G \setminus V(H)$
- Donc, $\text{MSMD}_3$ pour $G$ est équivalent à minimiser le nombre de sommets touchés dans $V(H)$

  $\rightarrow$ c'est **exactement** VERTEX COVER pour $H$ !!
- Donc,

$$OPT_{\text{MSMD}_3}(G) = OPT_{\text{VC}}(H) + |V(G \setminus V(H))| =$$
$$= OPT_{\text{VC}}(H) + 9 \cdot 2^m$$

- Ca prouve que

$$\text{PTAS pour MSMD}_3 \quad \Rightarrow \quad \text{PTAS pour VERTEX COVER}$$

# (2) $\mathrm{MSMD}_3$ n'est pas dans APX

- Soit $\alpha > 1$ le facteur d'inapproximabilité du $\mathrm{MSMD}_3$
- On utilise la technique d'**amplification de l'erreur**:
  - On construit une famille de graphes $G_k$, tels que $\mathrm{MSMD}_3$ est difficile à approximer dans $G_k$ avec un rapport $\alpha^k$
  - Ca prouve que le problème n'est pas dans APX

    (pour toute constante $C$, $\exists\ k > 0$ tel que $\alpha^k > C$)
- Soit $G_1 = G$.

  On donne la construction $G_2$: d'abord on prend le graphe $G$ et...

# (2) $\text{MSMD}_3$ n'est pas dans APX

- Soit $\alpha > 1$ le facteur d'inapproximabilité du $\text{MSMD}_3$
- On utilise la technique d'**amplification de l'erreur**:
  - On construit une famille de graphes $G_k$, tels que $\text{MSMD}_3$ est difficile à approximer dans $G_k$ avec un rapport $\alpha^k$
  - Ca prouve que le problème n'est pas dans APX
    (pour toute constante $C$, $\exists\ k > 0$ tel que $\alpha^k > C$)
- Soit $G_1 = G$.
  On donne la construction $G_2$: d'abord on prend le graphe $G$ et...

# (2) $\text{MSMD}_3$ n'est pas dans APX

- Soit $\alpha > 1$ le facteur d'inapproximabilité du $\text{MSMD}_3$
- On utilise la technique d'**amplification de l'erreur**:
  - On construit une famille de graphes $G_k$, tels que $\text{MSMD}_3$ est difficile à approximer dans $G_k$ avec un rapport $\alpha^k$
  - Ca prouve que le problème n'est pas dans APX

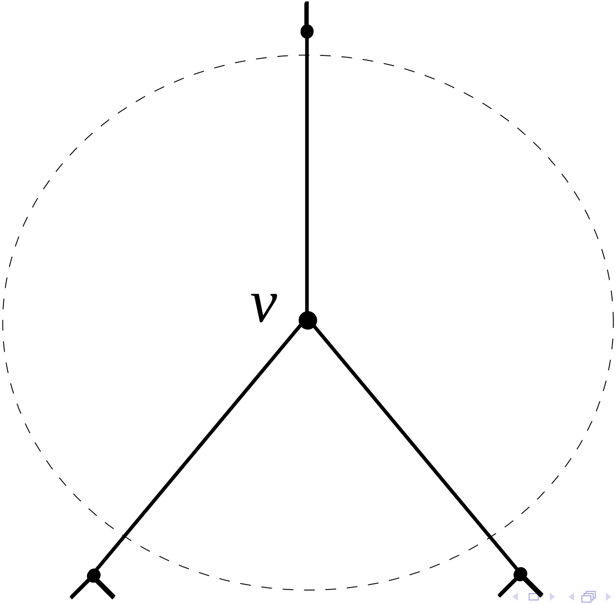
    (pour toute constante $C$, $\exists\ k > 0$ tel que $\alpha^k > C$)
- Soit $G_1 = G$.
  On donne la construction $G_2$: d'abord on prend le graphe $G$ et...

# (2) $\text{MSMD}_3$ n'est pas dans APX

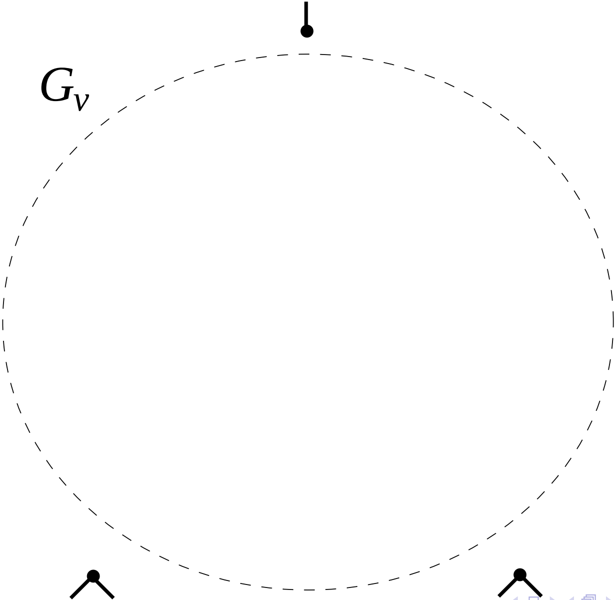
- Soit $\alpha > 1$ le facteur d'inapproximabilité du $\text{MSMD}_3$
- On utilise la technique d'**amplification de l'erreur**:
  - On construit une famille de graphes $G_k$, tels que $\text{MSMD}_3$ est difficile à approximer dans $G_k$ avec un rapport $\alpha^k$
  - Ca prouve que le problème n'est pas dans APX

    (pour toute constante $C$, $\exists\ k > 0$ tel que $\alpha^k > C$)
- Soit $G_1 = G$.
  On donne la construction $G_2$: d'abord on prend le graphe $G$ et...

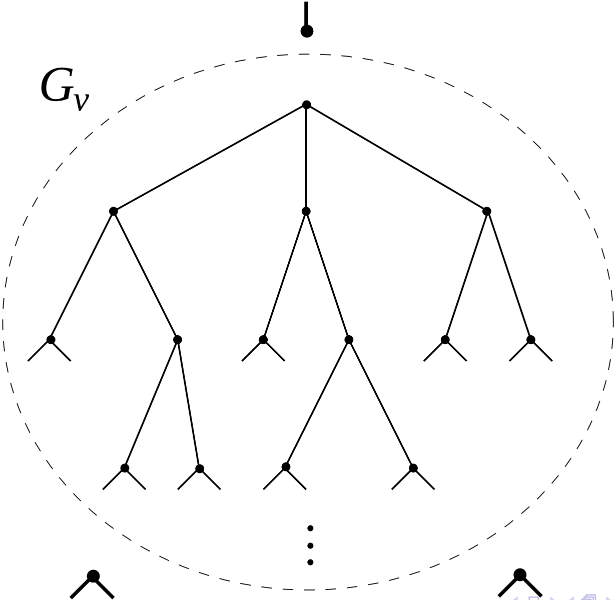
Pour chaque sommet $v$ (soit $d_v$ son degré):



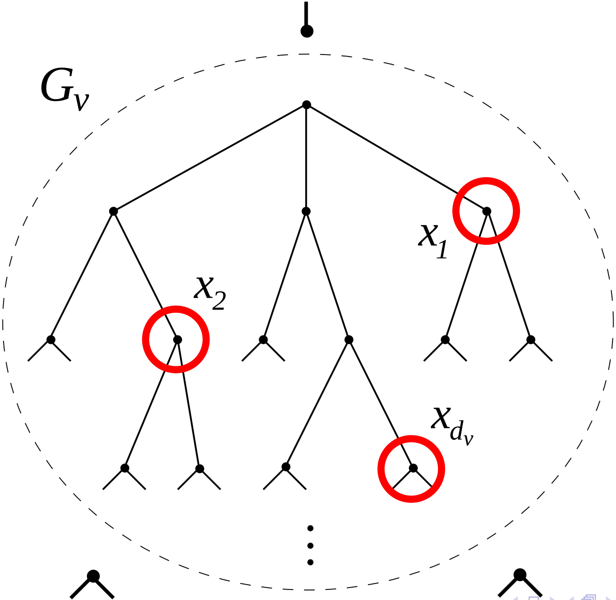
On remplace le sommet $v$ par un graphe $G_v$, construit comme ca:



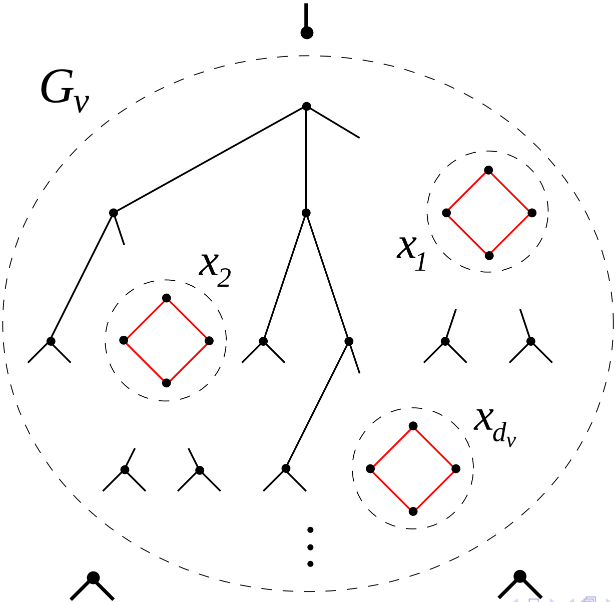
On met une copie de $G$ (le graphe qu'on avait construit):



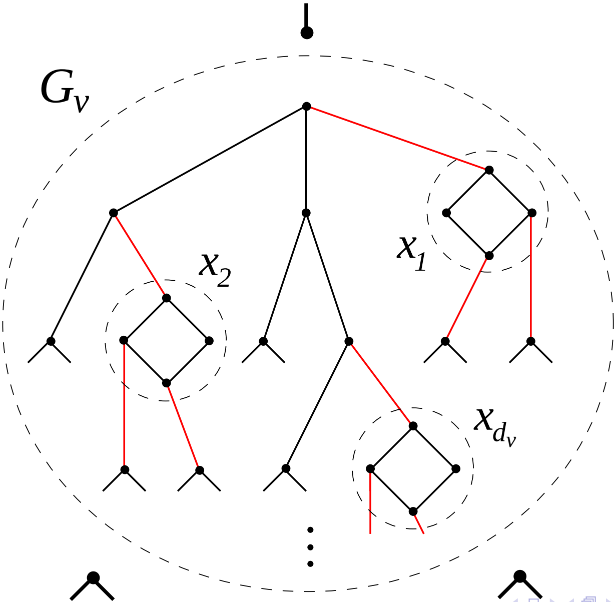
On choisit $d_v$ sommets $x_i$ de degré 3 dans $T \subset G$:



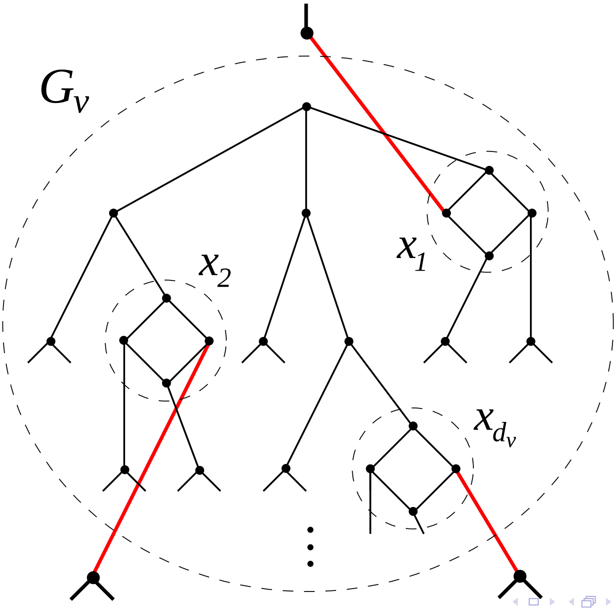
On remplace chaqu'un de ces sommets $x_i$ par un $C_4$:



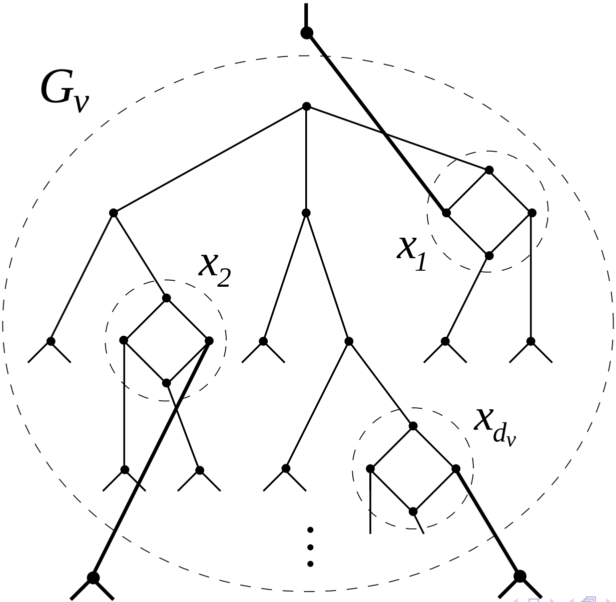
Dans chaque $C_4$, on relie 3 des sommets aux voisins de $x_i$:



On relie les $d_v$ sommets de degré 2 aux $d_v$ voisins de $v$:



Cette construction pour tout $v \in G$ définit $G_2$:



# (2) $\text{MSMD}_3$ n'est pas dans APX

- Une fois qu'on a choisi un sommet dans $G_v$ $\rightarrow$ $\text{MSMD}_3$ dans $G_v$

  (qui était difficile avec un rapport $\alpha$)

- Mais minimiser le nombre de sommets $v$'s pour lesquels on touche $G_v$ $\rightarrow$ $\text{MSMD}_3$ dans $G$

  (qui est difficile aussi avec un rapport $\alpha$)

- Donc, dans $G_2$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

- Par induction on prouve que dans $G_k$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha^k$

# (2) $MSMD_3$ n'est pas dans APX

- Une fois qu'on a choisi un sommet dans $G_v \rightarrow$ $MSMD_3$ dans $G_v$

  (qui était difficile avec un rapport $\alpha$)

- Mais minimiser le nombre de sommets $v$'s pour lesquels on touche $G_v \rightarrow$ $MSMD_3$ dans $G$

  (qui est difficile aussi avec un rapport $\alpha$)

- Donc, dans $G_2$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

- Par induction on prouve que dans $G_k$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha^k$

# (2) $MSMD_3$ n'est pas dans APX

- Une fois qu'on a choisi un sommet dans $G_v$ $\rightarrow$ $MSMD_3$ dans $G_v$

  (qui était difficile avec un rapport $\alpha$)

- Mais minimiser le nombre de sommets $v$'s pour lesquels on touche $G_v$ $\rightarrow$ $MSMD_3$ dans $G$

  (qui est difficile aussi avec un rapport $\alpha$)

- Donc, dans $G_2$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

- Par induction on prouve que dans $G_k$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha^k$

# (2) $MSMD_3$ n'est pas dans APX

- Une fois qu'on a choisi un sommet dans $G_v \rightarrow$ $MSMD_3$ dans $G_v$

  (qui était difficile avec un rapport $\alpha$)

- Mais minimiser le nombre de sommets $v$'s pour lesquels on touche $G_v \rightarrow$ $MSMD_3$ dans $G$

  (qui est difficile aussi avec un rapport $\alpha$)

- Donc, dans $G_2$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

- Par induction on prouve que dans $G_k$ le problème est difficile à approximer avec un rapport $\alpha^k$

# Complexité paramétrique

# Introduction à la complexité paramétrique

- **But**: fixer un des paramètres d'un problème NP-complet, pour voir s'il devient plus facile.
- Classes plus importantes en complexité paramétrique:

$$FPT \subseteq M[1] \subseteq W[1] \subseteq M[2] \subseteq W[2] \subseteq \cdots \subseteq W[P] \subseteq XP$$

- Analogues avec la complexité classique:

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & \leftrightarrow & \text{FPT} \\ \text{NP} & \leftrightarrow & \text{W[1]} \end{array}$$

- Donc, les problèmes **difficiles** en complexité paramétrique sont les problèmes **W[1]-durs**.

# Introduction à la complexité paramétrique

- **But**: fixer un des paramètres d'un problème NP-complet, pour voir s'il devient plus facile.
- Classes plus importantes en complexité paramétrique:

$$FPT \subseteq M[1] \subseteq W[1] \subseteq M[2] \subseteq W[2] \subseteq \cdots \subseteq W[P] \subseteq XP$$

- Analogues avec la complexité classique:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P} & \leftrightarrow & \mathrm{FPT} \\ \mathrm{NP} & \leftrightarrow & \mathrm{W[1]} \end{array}$$

- Donc, les problèmes **difficiles** en complexité paramétrique sont les problèmes **W[1]-durs**.

# Introduction à la complexité paramétrique

- **But**: fixer un des paramètres d'un problème NP-complet, pour voir s'il devient plus facile.
- Classes plus importantes en complexité paramétrique:

$$FPT \subseteq M[1] \subseteq W[1] \subseteq M[2] \subseteq W[2] \subseteq \cdots \subseteq W[P] \subseteq XP$$

- Analogues avec la complexité classique:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P} & \leftrightarrow & \mathrm{FPT} \\ \mathrm{NP} & \leftrightarrow & \mathrm{W[1]} \end{array}$$

- Donc, les problèmes **difficiles** en complexité paramétrique sont les problèmes **W[1]-durs**.

# Formulation du problème

- On fixe la taille du sous-graphe que l'on cherche:

MINIMUM SUBGRAPH OF MINIMUM DEGREE $_{\geq d}$ (MSMD$_d$):

**Instance**: un graphe $G = (V, E)$ et deux entiers positifs $d$ et $k$. Le problème est paramétré par $k$.

**Question**: Il existe un sous-ensemble $S \subseteq V$, avec $|S| \leq k$, tel que $G[S]$ a degré minimum au moins $d$?

# Résultats

- $\mathrm{MSMS}_d$ est ***fixed-parameter intractable*** pour $d \geq 3$ dans un **graphe quelconque**, en montrant qu'il est W[1]-dur avec une réduction de MULTI-COLOR CLIQUE.

- Algorithme (en utilisant la programmation dynamique) qui montre que $\mathrm{MSMS}_d$ est ***fixed-parameter tractable*** dans les graphes à **tree-width localement bornée** et dans les graphes **mineur-exclus**.

# Résultats

- MSMS$_d$ est ***fixed-parameter intractable*** pour $d \geq 3$ dans un **graphe quelconque**, en montrant qu'il est W[1]-dur avec une réduction de MULTI-COLOR CLIQUE.

- Algorithme (en utilisant la programmation dynamique) qui montre que MSMS$_d$ est ***fixed-parameter tractable*** dans les graphes à **tree-width localement bornée** et dans les graphes **mineur-exclus**.

# Conclusions

- On a prouvé que $\mathrm{MSMD}_d$, $d \geq 3$, n'est pas dans APX
- On sait que $\mathrm{MSMD}_d$, $d \geq 3$, est W[1]-dur, et donc on ne peut pas espérer trouver des algorithmes FPT pour un graphe quelconque
- On a des algorithmes FPT pour la classe des graphes mineur-exclus

  (par exemple: graphes planaires, graphes à tree-width localement bornée, graphes de genre borné...)
- **Problème ouvert**: trouver un algorithme d'approximation pour un graphe quelconque

# Conclusions

- On a prouvé que $\mathrm{MSMD}_d$, $d \geq 3$, n'est pas dans APX
- On sait que $\mathrm{MSMD}_d$, $d \geq 3$, est W[1]-dur, et donc on ne peut pas espérer trouver des algorithmes FPT pour un graphe quelconque
- On a des algorithmes FPT pour la classe des graphes mineur-exclus

  (par exemple: graphes planaires, graphes à tree-width localement bornée, graphes de genre borné...)
- **Problème ouvert:** trouver un algorithme d'approximation pour un graphe quelconque

# Conclusions

- On a prouvé que MSMD$_d$, $d \geq 3$, n'est pas dans APX
- On sait que MSMD$_d$, $d \geq 3$, est W[1]-dur, et donc on ne peut pas espérer trouver des algorithmes FPT pour un graphe quelconque
- On a des algorithmes FPT pour la classe des graphes mineur-exclus

  (par exemple: graphes planaires, graphes à tree-width localement bornée, graphes de genre borné...)
- **Problème ouvert**: trouver un algorithme d'approximation pour un graphe quelconque

# Conclusions

- On a prouvé que $\text{MSMD}_d$, $d \geq 3$, n'est pas dans APX
- On sait que $\text{MSMD}_d$, $d \geq 3$, est W[1]-dur, et donc on ne peut pas espérer trouver des algorithmes FPT pour un graphe quelconque
- On a des algorithmes FPT pour la classe des graphes mineur-exclus

  (par exemple: graphes planaires, graphes à tree-width localement bornée, graphes de genre borné...)
- **Problème ouvert**: trouver un algorithme d'approximation pour un graphe quelconque

# Merci!