

Traffic grooming en xarxes òptiques: El cas de l'anell bidireccional

Ignasi Sau i Xavier Muñoz

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

- ▶ Xarxes WDM (Wavelength Division Multiplexing)
 - ▶ 1 longitud d'ona (o freqüència) = fins a 40 Gb/s
 - ▶ 1 fibra = centenars de longituds d'ona = Tb/s

- ▶ Idea

El **Traffic grooming** en xarxes es refereix a agrupar tràfic de "baixa" velocitat en un flux de tràfic més ràpid

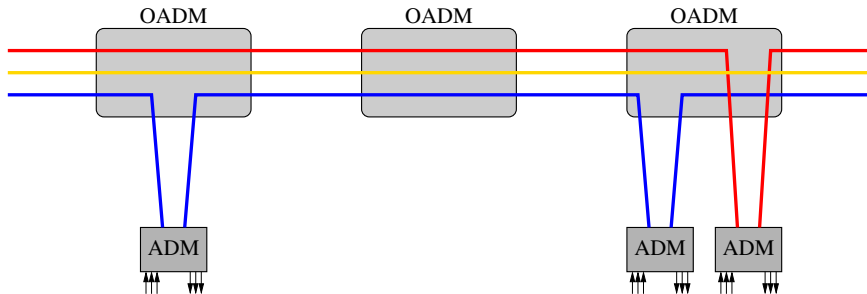
→ posem diversos senyals de "baixa" velocitat en la mateixa longitud d'ona (TDM, Time Division Multiplexing)

- ▶ Objectius

- ▶ Ús eficient de l'ample de banda
- ▶ Minimitzar el cost de la xarxa (en particular el material)

ADM i OADM

- ▶ **OADM** (Optical Add/Drop Multiplexer)= afegeix i treu una longitud d'ona d'una fibra
- ▶ **ADM** (Add/Drop Multiplexer)= afegeix i treu OC/STM (senyal elèctric de "baixa" velocitat) d'una longitud d'ona



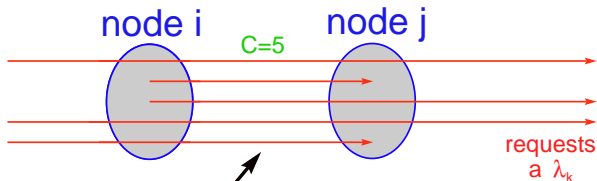
→ voldrem minimitzar el número d'ADMs

Definicions

- ▶ **Request** (i, j) : un parell de nodes (i, j) que volen intercanviar tràfic (de "baixa" velocitat)

Definicions

- ▶ **Request** (i,j) : un parell de nodes (i,j) que volen intercanviar tràfic (de "baixa" velocitat)
- ▶ **Grooming factor C**:



Per a cada longitud d'ona, a cada arc entre 2 nodes només poden haver-hi C requests que el travessin

Exemple:

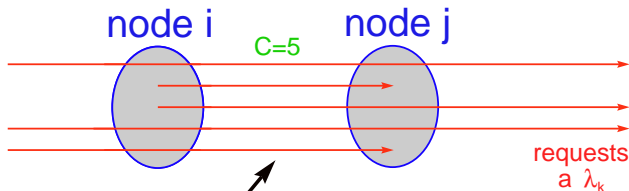
Capacitat d'una long. d'ona = 2400 Mb/s

Velocitat d'un request = 600 Mb/s

$\Rightarrow C = 4$

Definicions

- ▶ **Request** (i,j) : un parell de nodes (i,j) que volen intercanviar tràfic (de "baixa" velocitat)
- ▶ **Grooming factor C**:

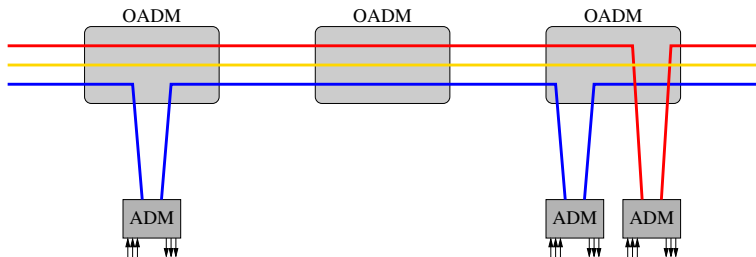


Per a cada longitud d'ona, a cada arc entre 2 nodes només poden haver-hi C requests que el travessin

- ▶ **Càrrega (load)** d'un arc en cada long. d'ona: és el número de requests que travessen aquest arc (ha de ser $\leq C$)

ADM i OADM

- ▶ **OADM** (Optical Add/Drop Multiplexer)= afegeix i treu una longitud d'ona d'una fibra
- ▶ **ADM** (Add/Drop Multiplexer)= afegeix i treu OC/STM (senyal elèctric de baixa velocitat) d'una longitud d'ona



- ▶ **Idea:** Fer servir **ADM** només als nodes inicial i final d'un request (lightpaths) per estalviar tants ADMs com sigui possible

Traducció de les Telecomunicacions a les Matemàtiques

Paràmetres de la xarxa òptica	Modelització en termes de grafs
Topologia de la xarxa òptica	Graf orientat G
Matriu de tràfic, amb instàncies de requests (i,j)	Graf orientat I , amb arcs (i,j)
Enrutar un request r	Assignar un camí orientat $P(r)$ en G i una longitud d'ona ω
Requests a la freqüència ω	Subgraf I_ω de I
Grooming Factor C (un request fa servir $\frac{1}{C}$ de l'ample de banda disponible a ω)	\forall arc $e \in G$ i $\forall \omega, \exists$ com a molt C camins a la longitud d'ona ω contenint l'arc e : $load(I_\omega, e) \leq C$
ADM a la freqüència ω	Vèrtex al subgraf I_ω
Objectiu: minimitzar el número total d'ADMs	Objectiu: minimitzar $\sum_{\omega=1}^W V(I_\omega) $

Formalització

Per tant, podem definir el problema de la següent manera:

El problema de Traffic Grooming (per a ADMs)

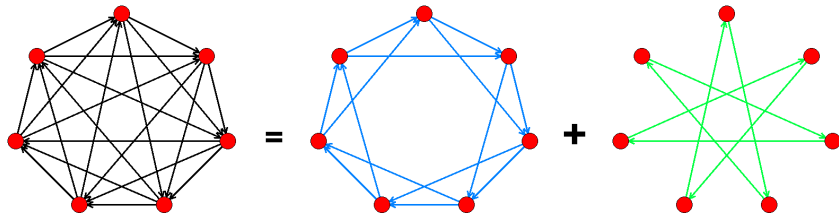
- Entrades** Un graf orientat G (xarxa)
Un graf orientat I (conjunt de requests)
Un grooming factor C
- Sortides** Trobar per a cada arc $r \in I$ un camí $P(r)$ en G , i una partició dels arcs de I en subgrafs I_ω , $1 \leq \omega \leq W$, tals que $\forall e \in E(G)$ $load(I_\omega, e) \leq C$
- Objectiu** Minimitzar $\sum_{\omega=1}^W |V(I_\omega)|$, i aquest mínim es denota per $A(G, I, C)$

El cas que hem estudiat

- ▶ En el nostre treball ens hem concentrat en:
 - ▶ Topologia: **anell bidireccional** $\longrightarrow G = C_N^*$
 - ▶ Cas "**tots-amb-tots**" i **requestes unitaris** $\longrightarrow I = T_N$
 - ▶ Enrutem els requestes pel **camí més curt**
 - ▶ Enrutem requestes oposats $((i, j)$ i $(j, i))$ per camins oposats (routing **simètric**)
- ▶ Com tenim simetria, només comptem la meitat dels ADMs i després multipliquem per 2
- ▶ Donats N i C , la solució òptima es denota per **$A(C, N)$**
- ▶ El problema és **NP-complet** (reducció del problema de *Bin-Packing*)

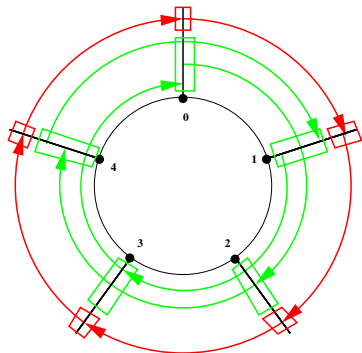
Exemple 1: $N = 7$ i $C = 3$

Fem servir 2 longituds d'ona i 14 ADMs:

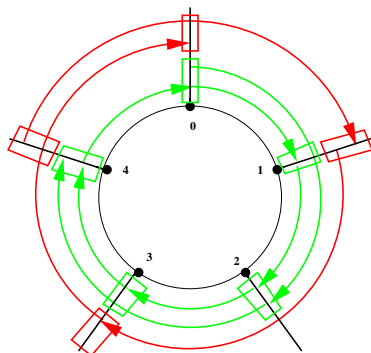
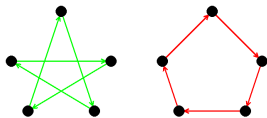


Exemple 2: $N = 5$ i $C = 2$

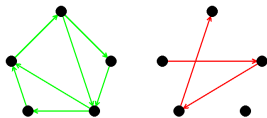
Aquí descomposem K_5 de dues maneres, fent servir dues long. d'ona (colors) en ambdues:



10 ADMS



9 ADMS



Què s'havia fet fins ara

- ▶ El problema a l'anell unidireccional ha estat resolt per valors del *grooming factor* ≤ 6
(*Bermond, Coudert, Muñoz et al*, 2003-2005)
- ▶ En el cas bidireccional, s'han desenvolupat mètodes heurístics i algorismes aproximatius. El millor algorisme a dia d'avui té ràtio $2 \log(C) + o(\log(C))$
(*Flammini, Moscardelli, Shalom i Zaks*, 2006)
- ▶ *Colbourn i Wan* (2001) van aplicar mètodes més teòrics de teoria de dissenys al cas de l'anell bidireccional, però les construccions no són òptimes
- ▶ *Chow i Lin* (2004) demostren una nova fita inferior per l'anell bidireccional, sense restriccions en el routing

Equacions del problema

Considerem una solució vàlida del problema, i sigui a_p el número de subgrafs de la partició amb exactament p nodes, A el número d'ADMs, i W el número de subgrafs de la partició.

S'han de complir les següents igualtats:

$$A = \sum_{p=2}^N p a_p \quad (1)$$

$$\sum_{p=2}^N a_p = W \quad (2)$$

$$\sum_{w=1}^W |E_w| = |E| \quad (3)$$

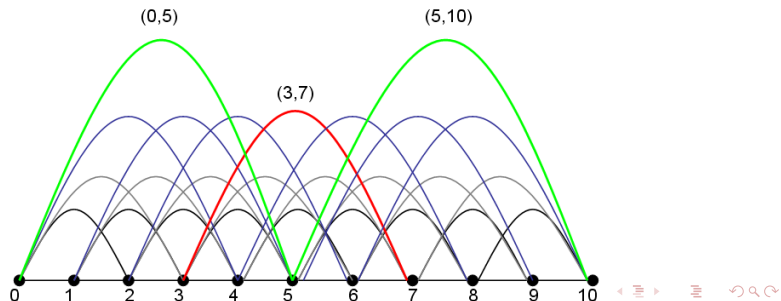
Quan $I = T_N$, tenim $|E| = \frac{N(N-1)}{2}$, i se sap que,

$$W \geq \left\lceil \frac{N^2 - \varepsilon}{8C} \right\rceil, \text{ on } \varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{si } N \text{ parell} \\ 1, & \text{si } N \text{ senar} \end{cases}$$

Sobre la longitud òptima dels requests

Per obtenir fites inferiors ajustades hem de fitar el valor de $|E_w|$ per un graf amb $|V_w| = p$ vèrtexos, satisfent la restricció de càrrega (*load constraint*).

- ▶ Sigui $\gamma(C, p)$ el número màxim d'arestes de qualsevol graf $H = (V, E)$ amb $|V| = p$, tal que $load(H, e) \leq C, \forall e \in E(H)$.
- ▶ Transformem $\sum_{w=1}^W |E_w| = \frac{N(N-1)}{2}$ en $\sum_{p=2}^N a_p \gamma(C, p) \geq \frac{N(N-1)}{2}$
- ▶ $\gamma(C, p)$ s'assoleix fent servir els requests de longitud mínima? \rightarrow
En general, NO. Per exemple, al camí ($N=11, C=10$):



Sobre la longitud òptima dels requests (2)

- ▶ En canvi, si la topologia és un **anell**, hem demostrat que sí que és cert:

Proposició (Requests de longitud mínima)

$\gamma(C, p)$ s'assoleix fent servir els requests de longitud mínima, fins a saturar la càrrega dels arcs. A més, si escrivim C en la forma $C = \frac{k(k+1)}{2} + r$, amb $0 \leq r \leq k$, llavors

$$\gamma(C, p) = \begin{cases} \frac{p(p-1)}{2} & , \text{ si } p \leq 2k + 1 + \varepsilon, \text{ amb } \varepsilon = 1 \text{ si } r \geq \frac{k+2}{2} \\ kp + \left\lfloor \frac{rp}{k+1} \right\rfloor & , \text{ altrament} \end{cases}$$

Fita inferior

A partir del resultat anterior, hem pogut trobar una fita inferior:

Proposició (Fita inferior general)

Per $G = C_N^*$ i $C = \frac{k(k+1)}{2} + r$, amb $0 \leq r < k + 1$,

$$A(C, N) \geq \left[\frac{N(N-1)}{2} \frac{k+1}{k(k+1)+r} \right]$$

- ▶ El mètode general consisteix en trobar construccions explícites que assoleixin la fita inferior

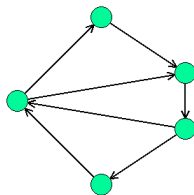
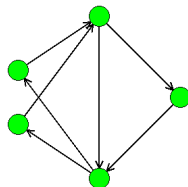
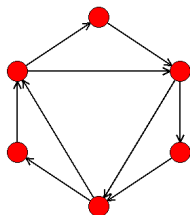
Cas $C = 2$

Proposició (Fita inferior més ajustada per $C = 2$)

Per $G = C_N^*$ i $C = 2$,

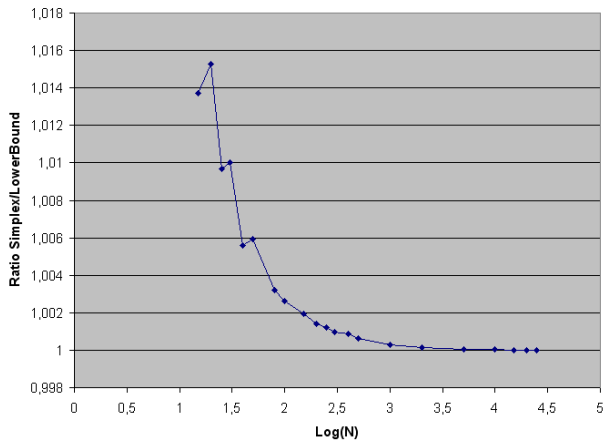
$$A(2, N) \geq \left\lceil \frac{11N(N-1)}{32} \right\rceil$$

- Hauríem de fer servir, sempre que es pugui, subgrafs G_i tals que el ràtio $\frac{|E_i|}{|V_i|}$ sigui màxim. Alguns bons grafs per $C = 2$ (ràtios $\frac{9}{6}$, $\frac{7}{5}$ i $\frac{7}{5}$):



Formulació MILP

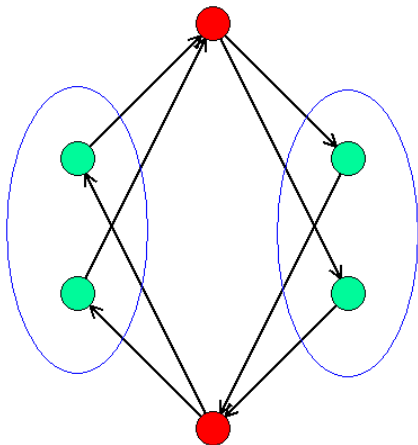
- ▶ formulació en MILP \longrightarrow sembla que és la bona fita inferior



Cas $C = 2$. Construccions explícites

Hem trobat α -aproximacions, amb α proper a 1. Per exemple:

Fent servir aquest graf,
unim 2 nous nodes
(els vermells)
amb tots els anteriors
(dintre dels cercles)
obtenint una
 $\frac{12}{11}$ -aproximació



Cas $C = 3$. Descomposicions òptimes

- ▶ El principal resultat és una **descomposició òptima** per $N \equiv 1, 5 \pmod{12}$, fent servir els resultats del cas unidireccional. Els grafs que fem servir en aquesta descomposició són K_5 i $K_{2,2,2}$.

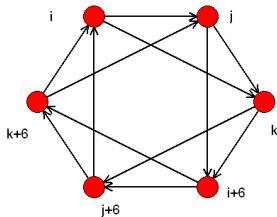
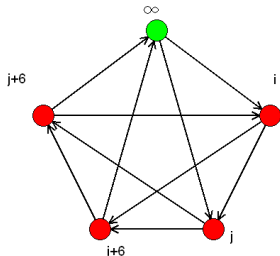
Proposició (Construcció òptima per $C = 3$)

Per $G = C_N^*$, $C = 3$ i $N \equiv 1, 5 \pmod{12}$,

$$A(3, N) = \frac{N(N-1)}{4}$$

Exemple. $N = 13$ i $C = 3$

- ▶ Notem el conjunt de vèrtexos de K_{13} per $\{\infty, i, i + 6\}$, $i = 0, \dots, 5$
- ▶ K_{13} es pot descomposar en K_5 i $K_{2,2,2}$:



- ▶ Fem servir

$$\begin{cases} 3 K_5 : \{\infty, i, i + 3, i + 6, i + 9\}, \text{ amb } i = 0, 1, 2 \\ 4 K_{2,2,2} : \{i, j, k, i + 6, j + 6, k + 6\}, \text{ amb} \\ \quad (i, j, k) = (0, 1, 5), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (3, 4, 5) \end{cases}$$

$$\frac{N(N-1)}{4} = 39 \text{ ADMs}$$

$$\frac{\text{Aquesta construcció}}{3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 39 \text{ ADMs}}$$

→ **construcció òptima!**

Cas $C = 3$. Fites inferiors més ajustades

- ▶ També hem trobat una fita inferior més ajustada per alguns valors de N , tenint en compte consideracions sobre el grau dels vèrtexos dels subgrafs:

Proposició (Fita inferior més ajustada per $C=3$ i $N=4t+3$)

Per $G = C_N^*$, $C = 3$ i $N \equiv 3 \pmod{4}$,

$$A(3, N = 4t + 3) \geq \frac{N(3N - 1)}{12}$$

Cas $C = 3$. Descomposicions òptimes i aproximacions

N	Fita inferior	ADMs de la construcció	Ràtio $\frac{\text{construcció}}{\text{fita inferior}}$
1	$\frac{N(N-1)}{4}$	$\frac{N(N-1)}{4}$	1
3	$\frac{N(3N-1)}{12}$	$\frac{N(3N-1)}{12} + \frac{N}{3} - 3$	$1 + \frac{\frac{N}{3}-3}{\frac{N(3N-1)}{12}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$
5	$\frac{N(N-1)}{4}$	$\frac{N(N-1)}{4}$	1
7	$\frac{N(3N-1)}{12}$	$\frac{N(3N-1)}{12} + \frac{N}{3} - 3$	$1 + \frac{\frac{N}{3}-3}{\frac{N(3N-1)}{12}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$
9	$\frac{N(N-1)}{4}$	$\frac{N(N-1)}{4} + 4$	$1 + \frac{4}{\frac{N(N-1)}{4}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$
11	$\frac{N(3N-1)}{12}$	$\frac{N(3N-1)}{12} + \frac{N}{3} - 11$	$1 + \frac{\frac{N}{3}-11}{\frac{N(3N-1)}{12}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$

Table: Resultats de construccions explícites per $C=3$ i N senar (mod 12)

Altres construccions òptimes

- ▶ L'existència d'un $BIBD(v, k, 1)$ (*Balanced Incomplete Block Design*) és equivalent a la descomposició de K_v en K_k 's
- ▶ Fent servir l'existència de $BIBD(v, k, 1)$, per $k = 1, 2, \dots$, hem trobat construccions òptimes per aquests valors de C i N :

C	N
3	$N \equiv 1, 5 \pmod{12}$
6	$N \equiv 1, 7 \pmod{24}$
10	$N \equiv 1, 9 \pmod{40}$
15	$N \equiv 1, 9 \pmod{30}$
21	$N \equiv 1, 13 \pmod{84}$
28	$N \equiv 1, 15 \pmod{112}$
37	$N \equiv 1, 17 \pmod{144}$

- ▶ Per $C = 15, 21, 28, 37$ hi ha un conjunt finit de valors de N pels quals encara no se sap si existeix el BIBD o no

Relació amb el "loading problem"

- ▶ En comptes de minimitzar el número d'ADMs, una altra possibilitat és **minimitzar el número de longituds d'ona** utilitzades en la descomposició
→ **LOADING PROBLEM**
- ▶ Pregunta natural:
són els problemes de **grooming** i de **loading equivalents**?
→ **NO**
- ▶ *Chiu i Modiano* (2000) van demostrar que fins i tot a la xarxa més simple (anell unidireccional) el número d'ADMs i el número de longituds d'ona no poden ser simultàniament minimitzats

Resum i conclusions

- ▶ Primer de tot, és important trobar la bona fita inferior per cada valor de C
- ▶ Fent servir l'existència de $BIBD(v, k, 1)$, per $k = 1, 2, \dots$, hem trobat construccions òptimes per diversos valors de C i famílies infinites de valors de N
- ▶ És molt difícil trobar construccions òptimes pel cas general
- ▶ Fins ara, ens hem centrat en els casos $C = 2$ i $C = 3$, trobant α -aproximacions, amb $\alpha = 1$ o força proper a 1
- ▶ Queda encara molta feina per fer en aquest problema...

Variants del problema que hem considerat

- ▶ Considerar grafs de requests amb grau constant
- ▶ Considerar grafs de requests circulants
- ▶ Problema de grooming de dos períodes (2 grooming factors diferents C i C' en 2 períodes diferents de temps)
- ▶ Topologia d'arbre en comptes d'anell

Referències (1/2)

- BCM03** J.-C. Bermond, D. Coudert and X. Muñoz, Traffic grooming in Unidirectional WDM Ring Networks: the all-to-all unitary case. [ONDM 03, 7th IFIP Working Conference on Optical Network Design and Modelling 2003](#), pp 1135 – 1153, 3-5 February.
- CoMu03** D. Coudert and X. Muñoz, Graph theory and traffic grooming in WDM rings. [Recent Res. Devel. Optics](#) 3(2003) 759 – 778
- BBC05** J-C. Bermond, L. Braud and D. Coudert. Traffic Grooming on the Path. [SIROCCO](#) Vol. 3499 of LNCS, (2005), pp. 34 – 38.
- BCY03** J-C. Bermond, D. Coudert and M-L. Yu, On DRC-Covering of K_n by cycles. [Journal of Combinatorial Designs](#) Vol. 11 (2003), pp. 110 – 112.
- BCC+05** J-C. Bermond, C.J. Colbourn, D. Coudert, G. Ge, A. Ling, and X. Munoz. Traffic grooming in unidirectional WDM rings with grooming ratio $C = 6$. [SIAM Journal on Discrete Mathematics](#), 19 (2005), pp. 523 – 542.

Referències (2/2)

- CoWa01** Charles J. Colbourn and Peng-Jun Wan, Minimizing Drop Cost for SONET/WDM Networks with $\frac{1}{8}$ Wavelength Requirements. [Networks](#) Vol. 37(2), 107-116 2001.
- BeCe03** J.-C. Bermond and S. Ceroi. Minimizing SONET ADMs in unidirectional WDM rings with grooming ratio 3. [Networks](#) 41 (2003), pp. 83-86.
- BeCo03** J.-C. Bermond and D. Coudert. Traffic Grooming in unidirectional WDM ring networks using design theory. [IEEE ICC 2003](#), ON07-3.
- Hu02b** J. Hu, Traffic Grooming in WDM Ring Networks: A Linear Programming Solution, [OSA Journal of Optical Networks](#) 1(11) 2002, pp. 397 – 408.