INSPIRING INNOVATION | INNOVANTE PAR TRADITION

Ecole Nationale Supérieure des Mines SAINT-ETIENNE

www.emse.fr

LIRMM, le 02 avril 2009

Génération de colonnes / Branch and Price pour les problèmes de tournées de véhicules

D. FEILLET- ECOLE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE DES FINANCES ET DE L'INDUSTRIE

Plan

- Introduction
- Principe de la génération de colonnes / Branch and Price
- Sous-problème

INSPIRING INNOVATION | INNOVANTE PAR TRADITION

Ecole Nationale
Supérieure des Mines
SAINT-ETIENNE

www.emse.fr

Introduction

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE
DES FINANCES ET DE L'INDUSTRIE

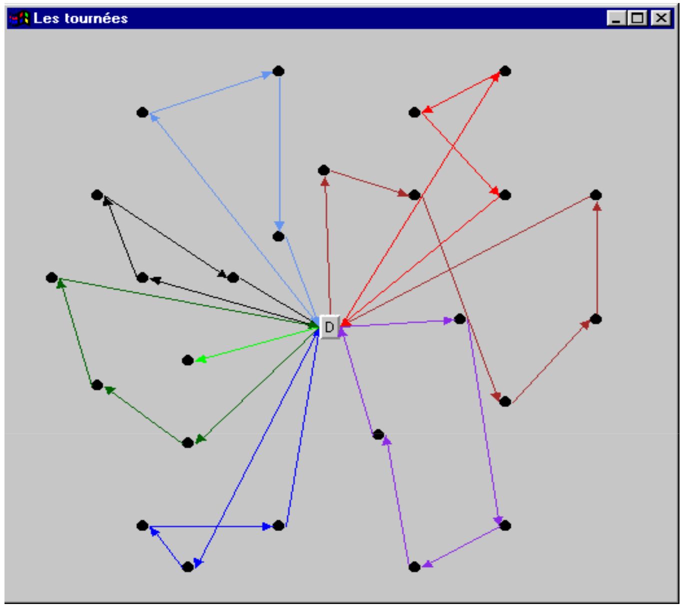
Problèmes de tournées de véhicules avec fenêtres de temps

- Etant donné
  - Un graphe G=(V,A)
  - $V = \{v_0,\ldots,v_n\}$ (v_0 : dépôt ; $v_1,\ldots,v_n$: clients)
  - Coût c_{ij} et durée t_{ij} pour tout arc $(v_i,v_j) \in A$
  - Demande d_i, fenêtre de temps $[a_i,b_i]$, temps de service st_i pour tout client $v_i \in \{v_1,\ldots,v_n\}$
  - Flotte de U véhicules de capacité Q

- Trouver un ensemble de U routes de coût minimum telles que
  - Chaque client est servi par exactement un véhicule
  - Les contraintes de capacité et les fenêtres de temps sont respectées

Problèmes de tournées de véhicules avec fenêtres de temps

- Illustration



- Hypothèses, notations supplémentaires
  - $t_{ij} = c_{ij}$ pour tout arc $(v_i,v_j) \in A$
  - les coûts respectent l'inégalité triangulaire

Modèle classique

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij} x_{ij}^u \qquad (1.1)$$

subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \qquad (1.2)$$

$$\sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j \in V | (v_j,v_i)\in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \qquad (1.3)$$

$$\sum_{\{v_i \in V | (v_0,v_i)\in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1 \le u \le U), \qquad (1.4)$$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1 \le u \le U), \qquad (1.5)$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M \qquad ((v_i,v_j) \in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), \qquad (1.6)$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M \qquad ((v_i,v_0) \in A, 1 \le u \le U), \qquad (1.7)$$

$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \qquad (1.8)$$

$$x_{ij}^u \in \{0,1\} \qquad ((v_i,v_j) \in A, 1 \le u \le U), \qquad (1.9)$$

Modèle de type couverture

- $\Omega = \{r_1,\ldots,r_{|\Omega|}\}$: ensemble de toutes les routes réalisables
  - c_k : coût de la route r_k
  - a_{ik} = 1 si la route r_k visite v_i, 0 sinon
- Variables : θ_k = 1 si la route r_k est sélectionnée, 0 sinon

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

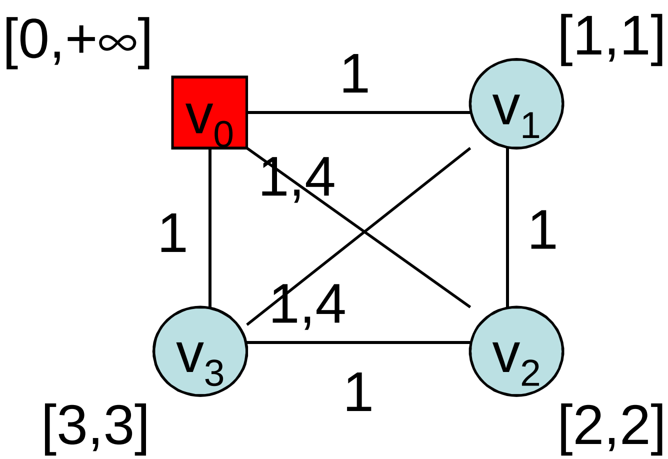
$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik}\theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \leq U,$$

$$\theta_k \in \mathbb{N} \qquad (r_k \in \Omega).$$

Modèle de type couverture

- Exemple



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega = \{r_1,\ldots,r_7\}$ avec :

$r_1 = (v_0,v_1,v_0)$
$r_2 = (v_0,v_2,v_0)$
$r_3 = (v_0,v_3,v_0)$
$r_4 = (v_0,v_1,v_2,v_0)$
$r_5 = (v_0,v_1,v_3,v_0)$
$r_6 = (v_0,v_2,v_3)$
$r_7 = (v_0,v_1,v_2,v_3,v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + 3{,}4\theta_4 + 3{,}4\theta_5 + 3{,}4\theta_6 + 4\theta_7$

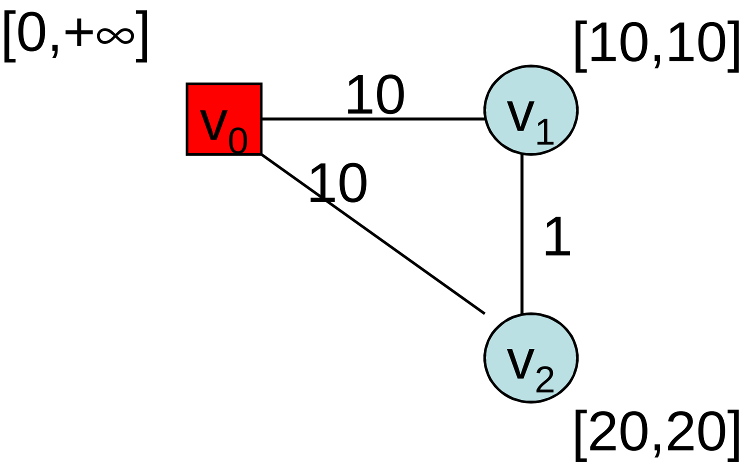
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_7 \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 + \theta_7 \geq 1 \\ \theta_3 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 \geq 1 \\ \theta_1,\ldots,\theta_7 \text{ entiers} \end{cases}$$

Solution optimale de coût 4 ($\theta_7 = 1$)

Motivation pour utiliser le modèle de couverture

- Exemple

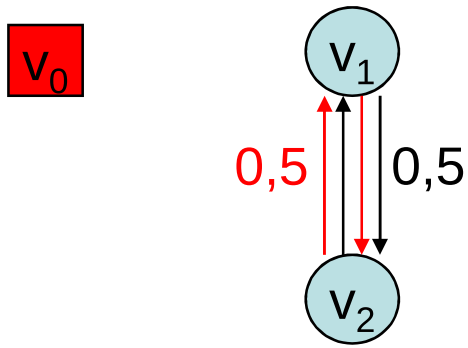


$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

Exemple de solution relaxée (modèle 1) de coût 2

$x^1_{12}=x^1_{21}=0{,}5$
$x^2_{12}=x^2_{21}=0{,}5$

$s^1_1=10$, $s^1_2=20$,
$s^2_1=10$, $s^2_2=20$



Min $20\theta_1 + 20\theta_2 + 21\theta_3$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_3 \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_3 \geq 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_3 \geq 0 \end{cases}$$

Relaxation linéaire du modèle de couverture

Solution optimale de coût 21 ($\theta_3 = 1$)

Motivation pour utiliser le modèle de couverture

$$\text{minimize} \sum_{1\le u\le U} \sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij}x_{ij}^u$$

subject to

$$\sum_{1\le u\le U} \sum_{\{v_j\in V|(v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus$$

$$\sum_{\{v_j\in V|(v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j\in V|(v_j,v_i)\in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i \in V, 1\le u\le U), \qquad (1.3)$$

$$\sum_{\{v_i\in V|(v_0,v_i)\in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1\le u\le U), \qquad (1.4)$$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1\le u\le U), \qquad (1.5)$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + Mx_{ij}^u \le M \qquad ((v_i,v_j)\in A, v_j\ne v_0, 1\le u\le U), \qquad (1.6)$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + Mx_{i0}^u \le M \qquad ((v_i,v_0)\in A, 1\le u\le U), \qquad (1.7)$$

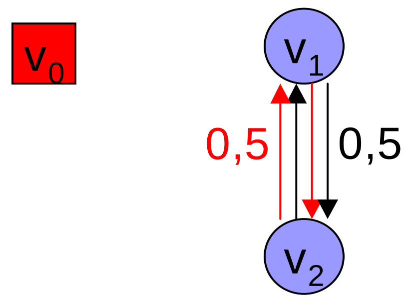
$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i\in V, 1\le u\le U), \qquad (1.8)$$

$$x_{ij}^u \in \{0,1\} \qquad ((v_i,v_j)\in A, 1\le u\le U), \qquad (1.9)$$

Exemple de solution relaxée (modèle 1) de coût 2

$x^1_{12}=x^1_{21}=0{,}5$
$x^2_{12}=x^2_{21}=0{,}5$

$s^1_1=10$, $s^1_2=20$,
$s^2_1=10$, $s^2_2=20$



Décomposition de Dantzig-Wolfe

- Le modèle 2 est obtenu du modèle 1 par décomposition de Dantzig-Wolfe

$$\text{minimize} \sum_{1\le u\le U} \sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij} x_{ij}^u \tag{1.1}$$

subject to

$$\sum_{1\le u\le U} \sum_{\{v_j\in V \mid (v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V\setminus\{v_0\}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{\{v_j\in V\mid(v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j\in V\mid(v_j,v_i)\in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i\in V, 1\le u\le U), \tag{1.3}$$

$$\sum_{\{v_i\in V\mid(v_0,v_i)\in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1\le u\le U), \tag{1.4}$$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1\le u\le U), \tag{1.5}$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M \qquad ((v_i,v_j)\in A, v_j\ne v_0, 1\le u\le U), \tag{1.6}$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M \qquad ((v_i,v_0)\in A, 1\le u\le U), \tag{1.7}$$

$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i\in V, 1\le u\le U), \tag{1.8}$$

$$x_{ij}^u \in \{0,1\} \qquad ((v_i,v_j)\in A, 1\le u\le U), \tag{1.9}$$

Minimiser les coûts de transport

Tous les clients doivent être servis

Ensemble de combinaisons d'au plus U routes réalisables

$$\text{minimize} \sum_{r_k\in\Omega} c_k\theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k\in\Omega} a_{ik}\theta_k \ge 1 \qquad (v_i\in V\setminus\{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k\in\Omega} \theta_k \le U,$$

$$\theta_k\in\mathbb{N} \qquad (r_k\in\Omega).$$

INSPIRING INNOVATION | INNOVANTE PAR TRADITION

Ecole Nationale
Supérieure des Mines
SAINT-ETIENNE

www.emse.fr

Principe de la génération de colonnes / Branch and Price

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE
DES FINANCES ET DE L'INDUSTRIE

Principe

- Considérons la relaxation linéaire du modèle 2
  - Appelé PROBLEME MAITRE
- Considérons la restriction du problème maître à un sous-ensemble Ω_1 de variables
  - Appelé PROBLEME MAITRE RESTREINT

$$(MP(\Omega_1)) \qquad \text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega_1} c_k \theta_k$$

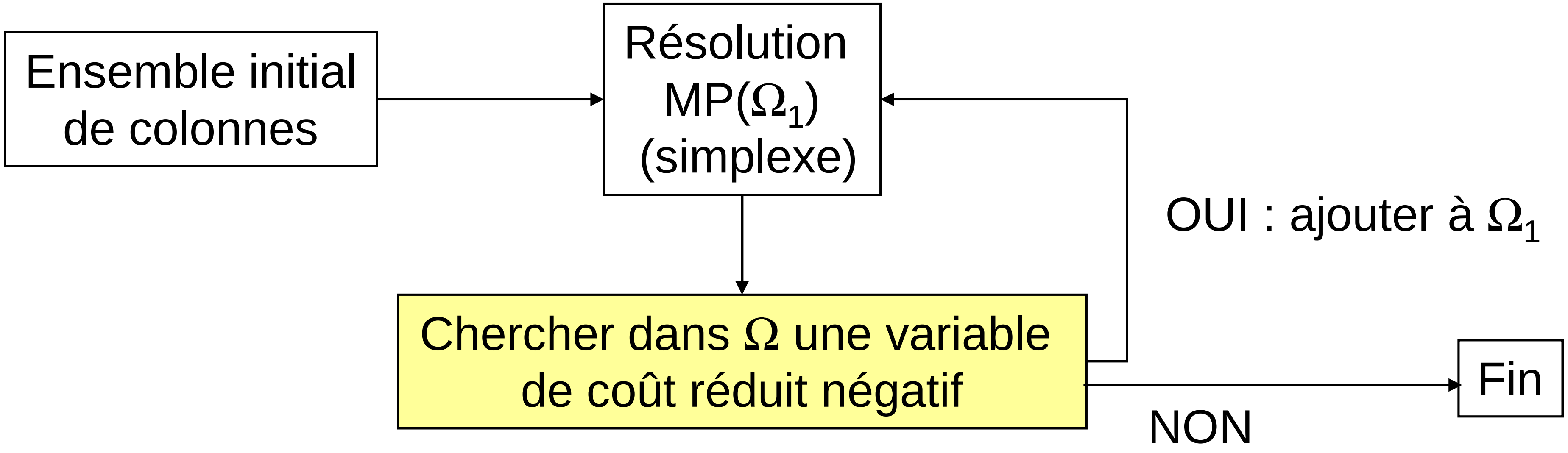
subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega_1} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega_1} \theta_k \leq U,$$

$$\theta_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega_1).$$

Principe


Ensemble initial de colonnes
Résolution MP(Ω_1) (simplexe)
Chercher dans Ω une variable de coût réduit négatif
OUI : ajouter à Ω_1
NON
Fin

Principe

- Considérons le dual du problème maître restreint

$$(D(\Omega_1)) \qquad \text{maximize} \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} \lambda_i + U \times \lambda_0$$

$$\text{subject to}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i + \lambda_0 &\leq c_k && (r_k \in \Omega_1), \\ \lambda_i &\geq 0 && (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \\ \lambda_0 &\leq 0. \end{aligned}$$

- Remarque : l'ajout d'une variable dans MP(Ω_1) induit l'ajout d'une contrainte dans D(Ω_1)

Principe

- Coût réduit d'une variable du problème maître :

$$c_k - \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i - \lambda_0$$

  - pour une variable, avoir un coût réduit négatif revient à ce que la contrainte duale correspondante soit non-réalisable

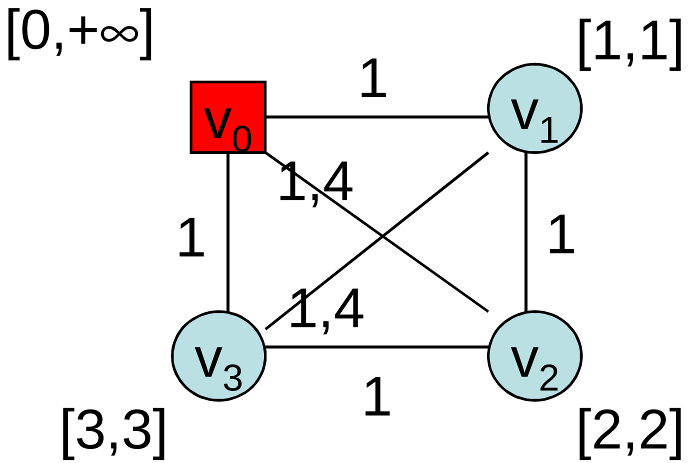
Principe

- L'algorithme a un nombre fini d'itérations
  - Une colonne présente dans Ω_1 a un coût réduit positif ou nul
    - une colonne n'est jamais rajoutée deux fois
  - Le nombre de colonnes de Ω est fini

- Remarque
  - On parle de manière équivalente de colonne, variable et route

Illustration

- Retour à l'exemple précédent (initialisation et itération1)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec $r_1 = (v_0, v_1, v_0)$, $r_2 = (v_0, v_2, v_0)$, $r_3 = (v_0, v_3, v_0)$

$$\begin{aligned}&\text{Min } 2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 \\ &\text{sujet à} \\ &\begin{cases} \theta_1 \geq 1 \\ \theta_2 \geq 1 \\ \theta_3 \geq 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_3 \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

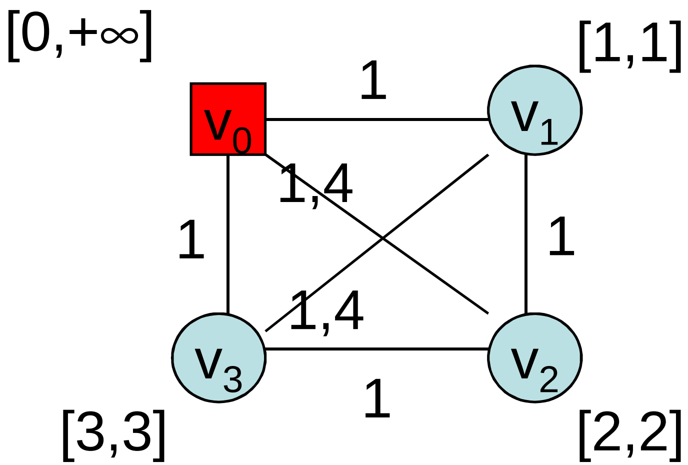
$$\begin{aligned}&\text{Max } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ &\text{sujet à} \\ &\begin{cases} \lambda_1 \leq 2 \\ \lambda_2 \leq 2{,}8 \\ \lambda_3 \leq 2 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Solution optimale (coût = 6,8)
$\theta = (1; 1; 1)$
$\lambda = (2; 2{,}8; 2)$

Par exemple, (v_0, v_1, v_2, v_0) de coût réduit négatif
(coût réduit = 3,4 - 2 - 2,8 = -1,4)

Illustration

- Retour à l'exemple précédent (itération 2)



$d_i = 1$, $st_i = 0$

$Q = +\infty$

$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec $r_4 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + \mathbf{3{,}4\theta_4}$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_4 \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_4 \geq 1 \\ \theta_3 \geq 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_3, \theta_4 \geq 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

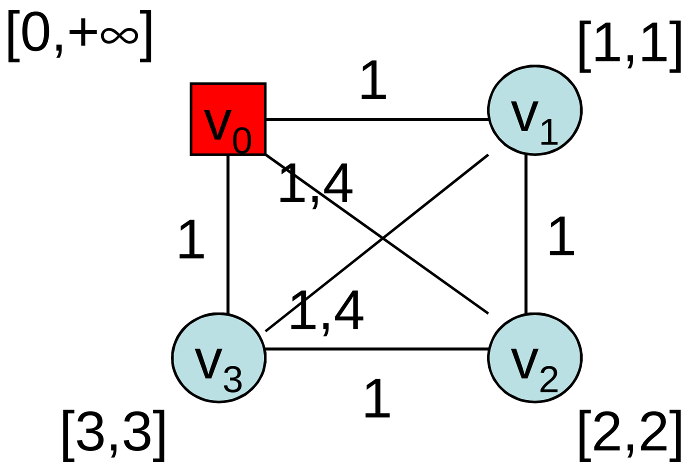
$$\begin{cases} \lambda_1 \leq 2 \\ \lambda_2 \leq 2{,}8 \\ \lambda_3 \leq 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 3{,}4 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 5,4)
$\theta = (0; 0; 1; 1)$
$\lambda = (2; 1{,}4; 2)$ par exemple

Par exemple, $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ de coût réduit négatif
(coût réduit = 4 - 2 - 1,4 - 2 = -1,4)

Illustration

- Retour à l'exemple précédent (itération 3)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1,r_2,r_3,r_4,r_5\}$ avec $r_5 = (v_0,v_1,v_2,v_3,v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + 3{,}4\theta_4 \mathbf{+4\theta_5}$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_4 + \theta_5 \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 \geq 1 \\ \theta_3 + \theta_5 \geq 1 \\ \theta_1,\ldots,\theta_3,\theta_4,\theta_5 \geq 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

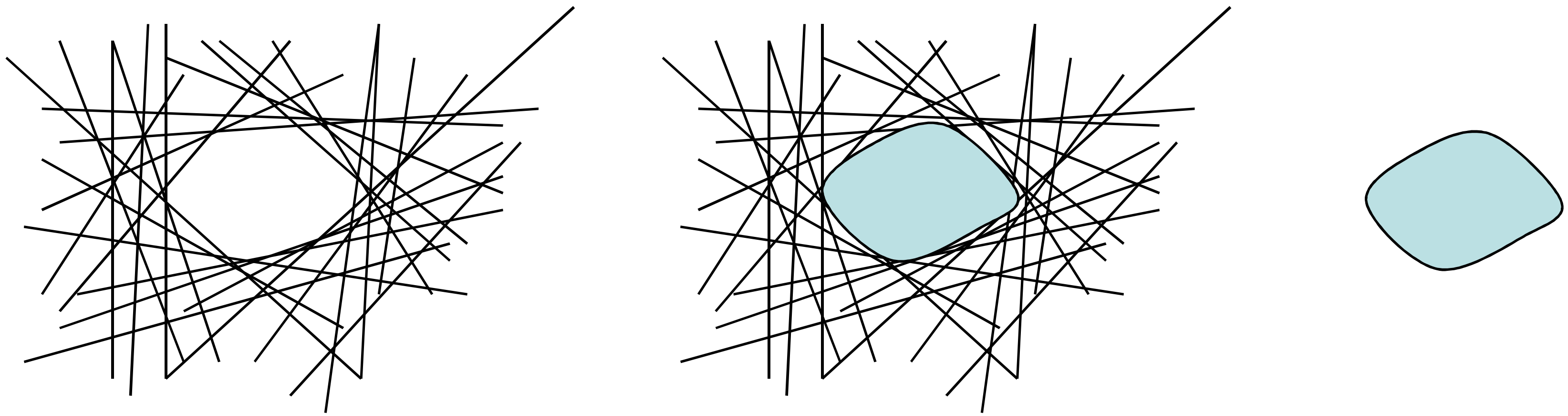
$$\begin{cases} \lambda_1 \leq 2 \\ \lambda_2 \leq 2{,}8 \\ \lambda_3 \leq 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 3{,}4 \\ \boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 4} \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 4)
$\theta=(0; 0; 0; 0; 1)$
$\lambda=(1; 2; 1)$ par exemple

Aucune route réalisable n'est de coût réduit négatif
-> la solution est optimale pour le problème maître

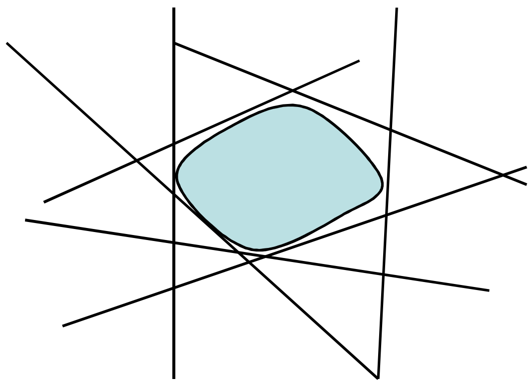
Principe

- Autre point de vue :
  - La résolution du programme dual, avec son très grand nombre de contraintes, peut s'aborder par la méthode de Kelley, comme si l'on résolvait un programme non linéaire

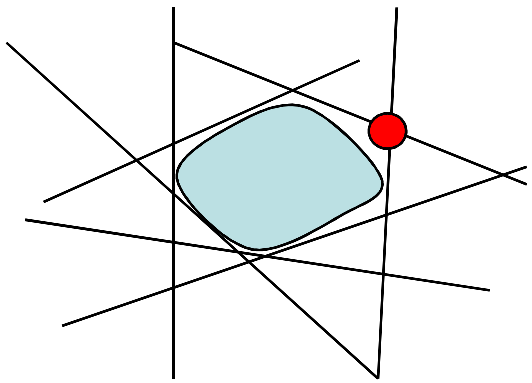


Principe

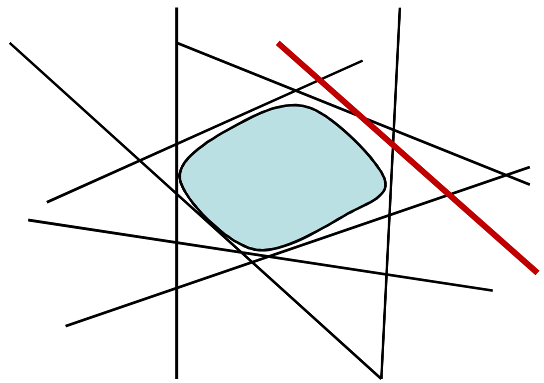
- Autre point de vue :
  - Méthode de Kelley
    - Initier la résolution avec un polyèdre contenant le domaine réalisable du programme non-linéaire
    - Trouver un point extrême optimal (simplexe) ; s'il n'est pas réalisable pour le programme non-linéaire, le supprimer du domaine par l'ajout d'une coupe et répéter



Polyèdre courant

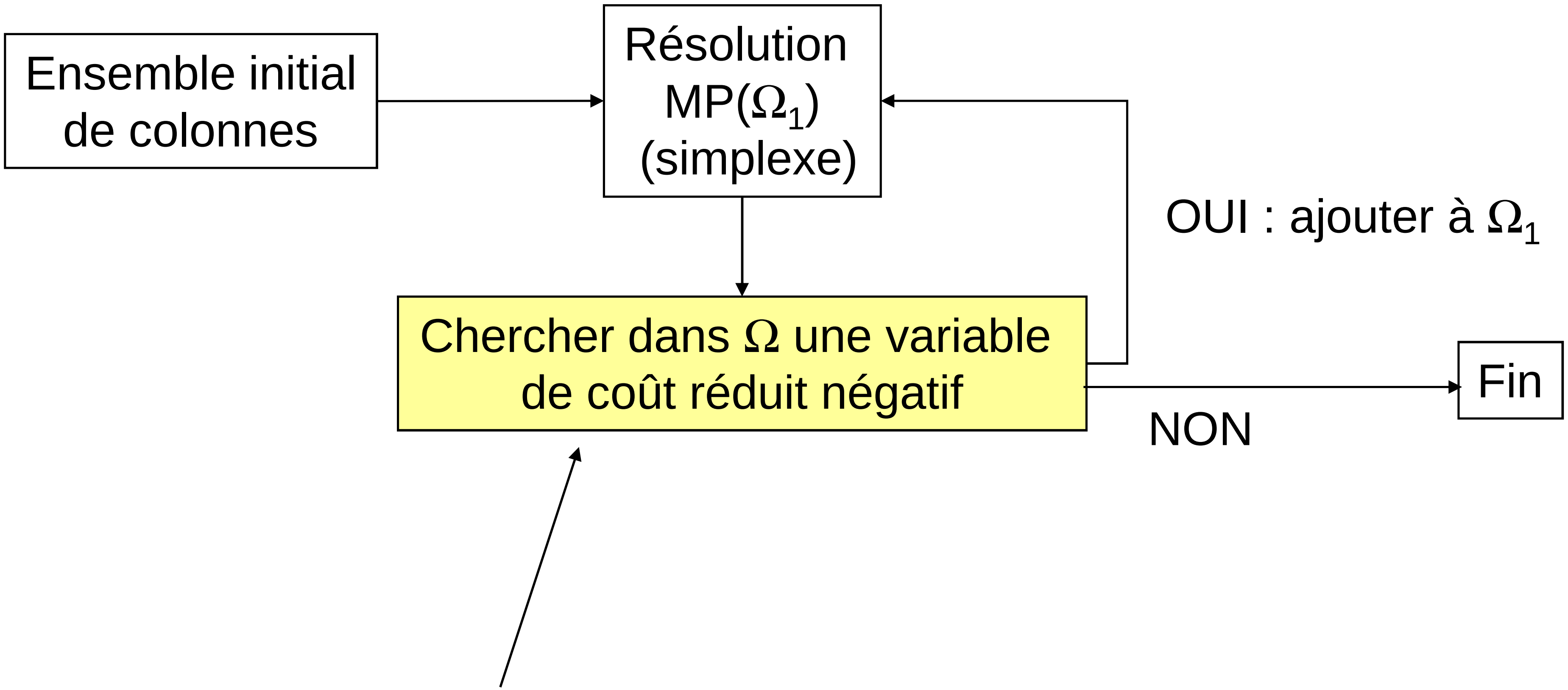


Solution optimale sur le polyèdre



Ajout d'une coupe

Principe



Sous-problème

(ou problème esclave, ou oracle, ou problème de pricing)

Définition du sous-problème

- Le sous-problème cherche un élément de Ω tel que

$$c_k - \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i - \lambda_0 < 0.$$

soit, en notant b^k_{ij} = 1 si le chemin r_k utilise l'arc (v_i,v_j), 0 sinon

$$\sum_{(v_i,v_j) \in A} b_{ij}^k (c_{ij} - \lambda_i) < 0.$$

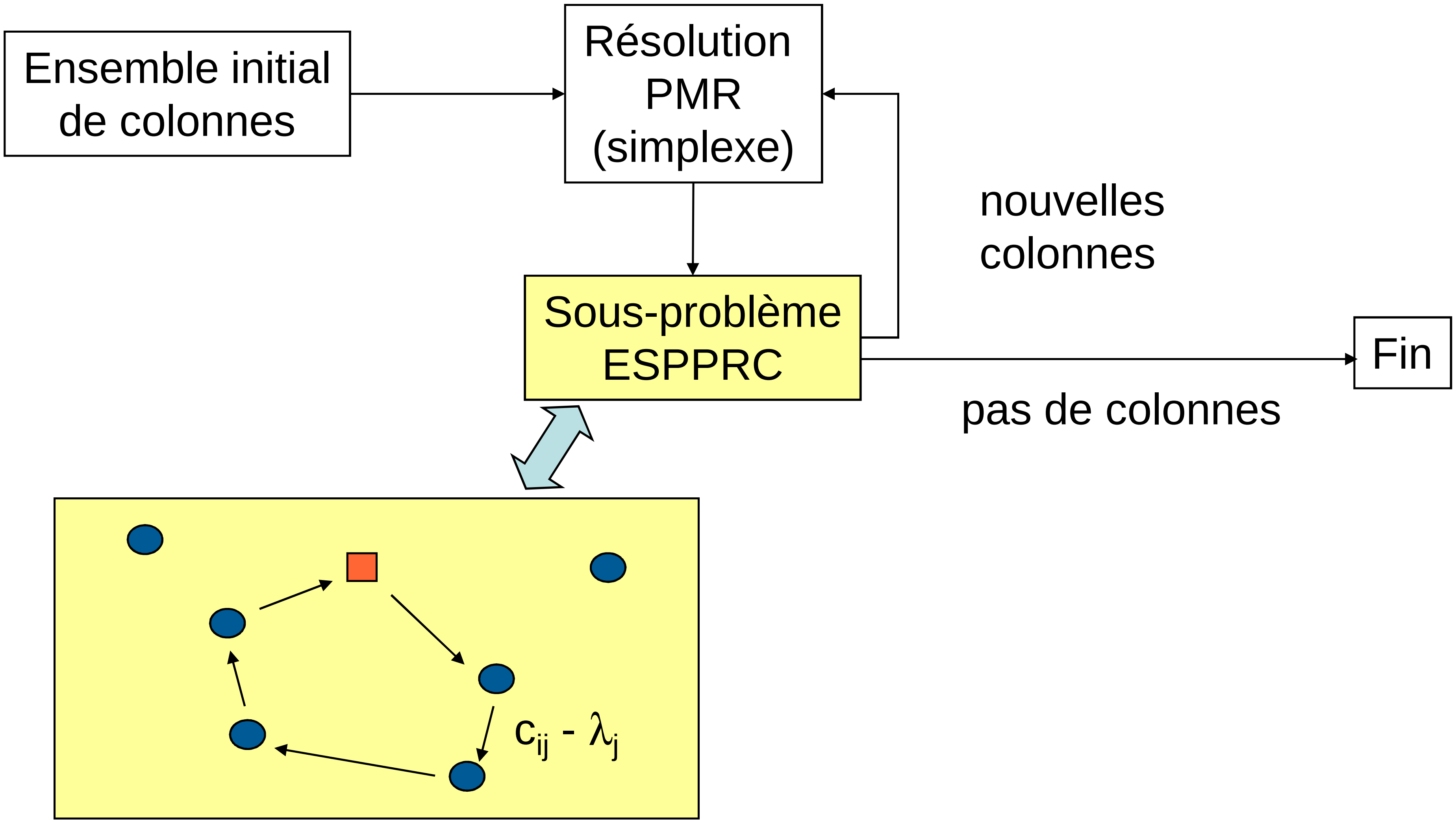
Définition du sous-problème

- Pour cela, on cherche l'élément de Ω minimisant cette valeur
  - C'est un problème d'optimisation combinatoire
  - Trouver le chemin de v_0 à v_0, passant au plus une fois par chaque sommet, respectant la contrainte de capacité et les fenêtres de temps, et minimisant

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} b_{ij}^k (c_{ij} - \lambda_i)$$

  - Il s'agit d'un Problème de Plus Court Chemin Elémentaire avec Contraintes de Ressources, le coût des arcs (v_i,v_j) étant c_{ij} - λ_j
  - Ce problème est NP-dur au sens fort mais peut être résolu par programmation dynamique

Définition du sous-problème



Branch and Price

- A chaque nœud de l'arbre de recherche, le calcul de la borne fait appel à la génération de colonnes…

- Si la solution obtenue est fractionnaire (et la borne plus basse que la meilleure solution connue), il faut brancher

- Utiliser un branchement sur les variables ?
  - Trouver r_k tel que $0 < \theta_k < 1$
  - Définir un fils pour lequel $\theta_k = 0$ et un fils pour lequel $\theta_k = 1$

Branch and Price

- Utiliser un branchement sur les variables ?
  - Fils $\theta_k = 0$
    - Problème maître : supprimer r_k de Ω_1
    - Sous-problème : chercher une route de coût réduit négatif dans $\Omega \backslash \{r_k\}$
  - Fils $\theta_k = 1$
    - Problème maître : fixer $\theta_k = 1$, supprimer de Ω les routes visitant des sommets présent dans r_k
    - Sous-problème : supprimer les sommets présents dans r_k
    - Revient en fait à continuer sur une instance de taille réduite…

- Difficultés
  - Chercher une route de coût réduit négatif dans $\Omega \backslash \{r_k\}$
    - possible avec une approche de recherche de k-meilleurs chemins mais lourd ; possible en adaptant le graphe (Irnich et Desaulniers 2005)
  - Déséquilibre de l’arbre

Politique de branchement

- Principe couramment admis : utiliser les variables de la formulation initiale
  - Choisir un arc traversé par un flot x_{ij} fractionnaire (on peut montrer que si la solution est fractionnaire un tel arc existe)

$$x_{ij} = \sum_{r_k \in \Omega_1} b_{ij}^k \theta_k = \sum_{1 \le u \le U} x_{ij}^u$$

  - Définir un fils dans lequel $x_{ij} = 0$ et un fils dans lequel $x_{ij} = 1$
  - Fils $x_{ij} = 0$
    - Problème maître : supprimer toutes les routes traversant (v_i,v_j)
    - Sous-problème : supprimer l'arc (v_i,v_j)
  - Fils $x_{ij} = 1$
    - Problème maître : supprimer toutes les routes traversant un arc (v_i,v_k) ou un arc (v_k,v_j) avec $v_k \neq v_j$
    - Sous-problème : supprimer tout arc (v_i,v_k) et (v_k,v_j) avec $v_k \neq v_j$

Atouts de la méthode

- Forte généricité
  - La conception se limite généralement à définir les ressources du sous-problème
- Adaptée à une utilisation heuristique
  - Résolution heuristique des sous-problèmes
  - Fixation de variables
  - Branch and Bound sur les colonnes générées à la racine
  - …

Qualité de la relaxation linéaire

- Rappel : le modèle 2 est obtenu du modèle 1 par décomposition de Dantzig-Wolfe

$$\text{minimize} \sum_{1\le u\le U}\sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij}x_{ij}^u \tag{1.1}$$

subject to

$$\sum_{1\le u\le U}\sum_{\{v_j\in V|(v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i\in V\setminus\{v_0\}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{\{v_j\in V|(v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j\in V|(v_j,v_i)\in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i\in V, 1\le u\le U), \tag{1.3}$$

$$\sum_{\{v_i\in V|(v_0,v_i)\in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1\le u\le U), \tag{1.4}$$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1\le u\le U), \tag{1.5}$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + Mx_{ij}^u \le M \qquad ((v_i,v_j)\in A, v_j\ne v_0, 1\le u\le U), \tag{1.6}$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + Mx_{i0}^u \le M \qquad ((v_i,v_0)\in A, 1\le u\le U), \tag{1.7}$$

$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i\in V, 1\le u\le U), \tag{1.8}$$

$$x_{ij}^u \in \{0,1\} \qquad ((v_i,v_j)\in A, 1\le u\le U), \tag{1.9}$$

Minimiser les coûts de transport

Tous les clients doivent être servis

Ensemble de combinaisons d'au plus U routes réalisables

$$\text{minimize} \sum_{r_k\in\Omega} c_k\theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k\in\Omega} a_{ik}\theta_k \ge 1 \qquad (v_i\in V\setminus\{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k\in\Omega} \theta_k \le U,$$

$$\theta_k\in\mathbb{N} \qquad (r_k\in\Omega).$$

Qualité de la relaxation linéaire

- Le mécanisme de la génération de colonnes est très proche de la relaxation Lagrangienne

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \sum_{(v_i,v_j) \in A} c_{ij} x_{ij}^u \tag{1.1}$$

subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j) \in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \tag{1.2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j) \in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j \in V | (v_j,v_i) \in A\}} x_{ji}^u = 0 && (v_i \in V, 1 \le u \le U), && (1.3)\\
&\sum_{\{v_i \in V | (v_0,v_i) \in A\}} x_{0i}^u \le 1 && (1 \le u \le U), && (1.4)\\
&\sum_{(v_i,v_j) \in A} d_i x_{ij}^u \le Q && (1 \le u \le U), && (1.5)\\
&s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M && ((v_i,v_j) \in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), && (1.6)\\
&s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M && ((v_i,v_0) \in A, 1 \le u \le U), && (1.7)\\
&a_i \le s_i^u \le b_i && (v_i \in V, 1 \le u \le U), && (1.8)\\
&x_{ij}^u \in \{0,1\} && ((v_i,v_j) \in A, 1 \le u \le U), && (1.9)
\end{aligned}}$$

Relaxer de manière Lagrangienne dans l'objectif (poids λ_i)

Résoudre sur cet ensemble de contrainte (ESPPRC)

- La résolution du dual Lagrangien revient à alterner calcul du vecteur Lagrangien λ et résolution de ESPPRC

Qualité de la relaxation linéaire

- On peut démontrer que la borne obtenue par génération de colonnes est égale à la borne fournie par le Dual Lagrangien
  - min $\{cx : A^1x \leq b^1, x \in \text{conv}(A^2x \leq b^2 \text{ , x entier})\}$
  - au lieu de min $\{cx : A^1x \leq b^1, A^2x \leq b^2 \text{ , } x \geq 0\}$ pour le modèle 1

- La génération de colonnes n'améliore pas la borne si le sous-problème à la propriété d'intégralité

Sous-problème

ESPPRC versus SPPRC

- Dans les premières implémentations de la génération de colonnes pour les problèmes de tournées, le sous-problème résolu était le SPPRC

- Principe
  - Ω est défini comme étant l'ensemble des routes vérifiant les contraintes de capacité et fenêtres de temps, sans limite sur le nombre de visite des clients
  - La solution optimale de ce nouveau problème reste la même
    - A l'optimum un client ne sera pas visité deux fois

ESPPRC versus SPPRC

- Nouveau modèle :
  - a_{ik} = nombre de passages de la route r_k chez le client v_i

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \leq U,$$

$$\theta_k \in \mathbb{N} \qquad (r_k \in \Omega).$$

- Coût réduit d'une variable : $c_k - \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i - \lambda_0$

ESPPRC versus SPPRC

Ensemble initial de colonnes

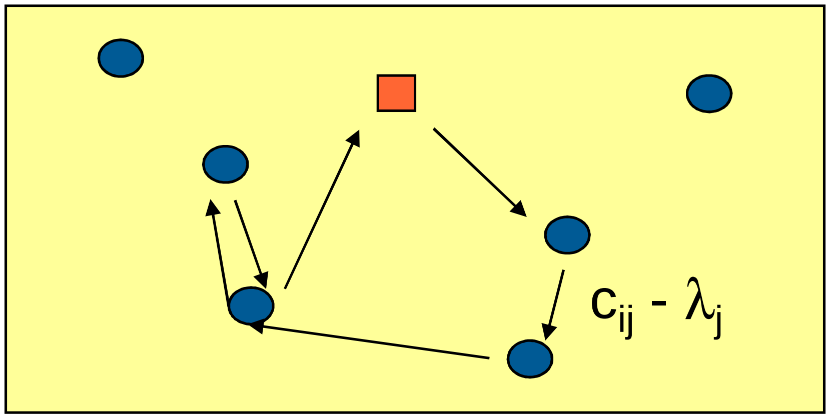
Résolution PMR (simplexe)

Sous-problème SPPRC

nouvelles colonnes

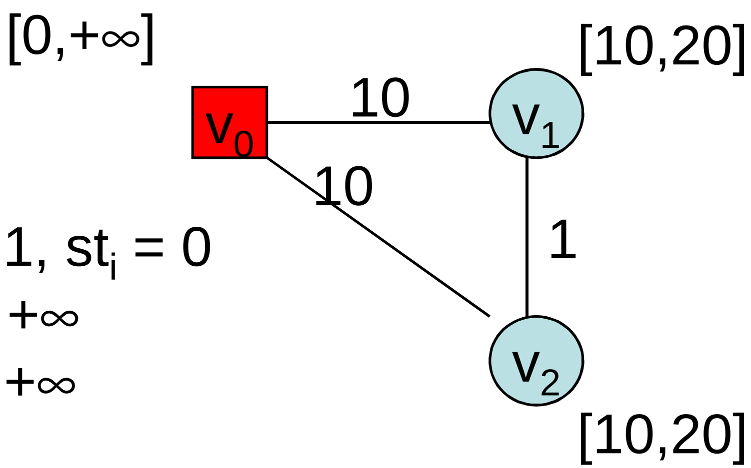
Fin

pas de colonnes



ESPPRC versus SPPRC

- Impact
  - SSPRC seulement NP-dur au sens faible
  - Résolution par programmation dynamique beaucoup plus efficace
    - Espace des solutions plus grand (pas beaucoup plus si les TW sont relativement serrées)
    - Mais… dominance beaucoup plus efficace (2 ressources dans le cas du TSPTW)
  - Borne obtenue de moins bonne qualité (parfois sensiblement)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

Exemple de solution réalisable (coût 5,8) :

route $(v_0,v_1,v_2,v_1,v_2, v_1,v_2,v_1,v_2,v_1,v_2,v_0)$, de coût 29 avec un coefficient 0,2

ESPPRC versus SPPRC

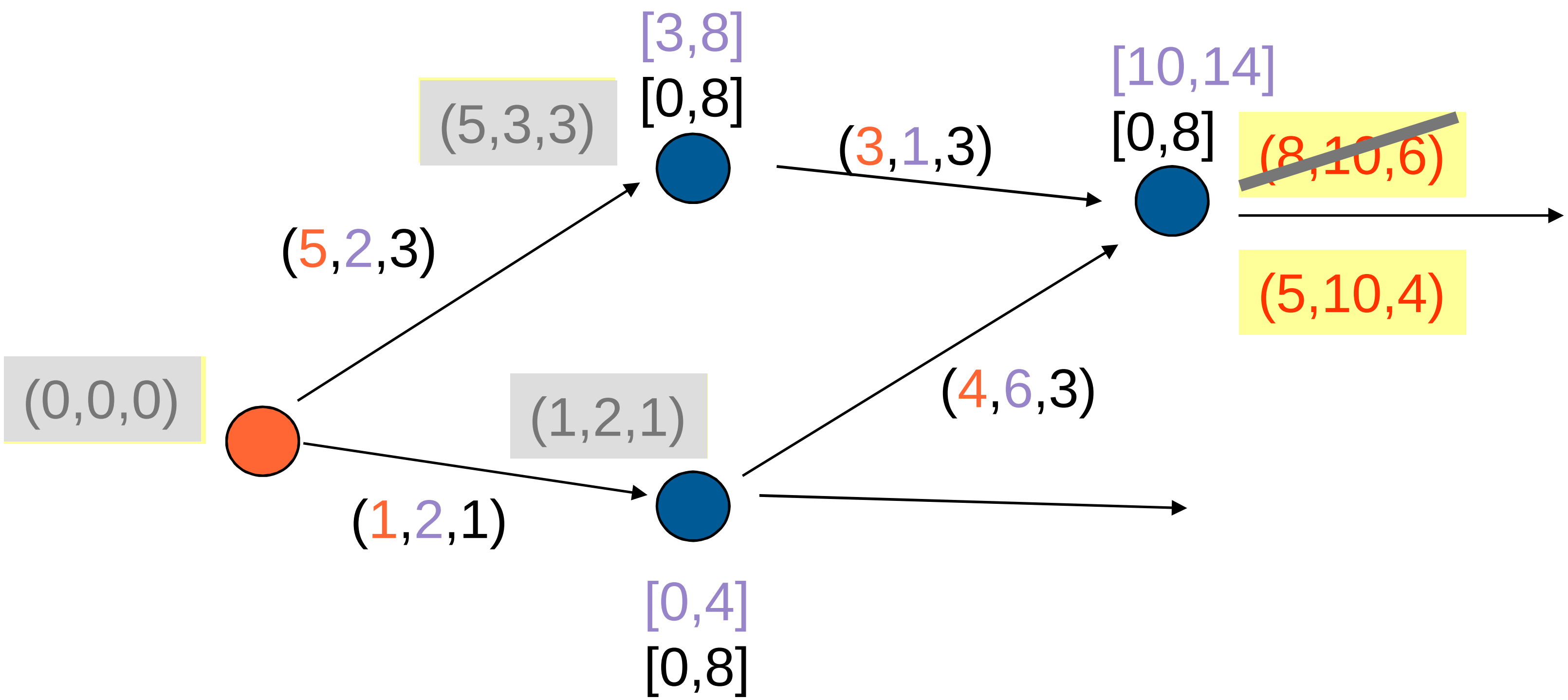
- Approches les plus efficaces : compromis
  - SSPRC sans 2-cycle : guère plus long à résoudre
  - SPPRC sans k-cycle : multiplie par O(k!) le nombre de labels
    - raisonnable pour k = 3 ou 4
    - borne presque équivalente à celle obtenue avec l'ESPPRC si les ressources empêchent des cycles trop longs
    - Irnich et Villeneuve (2003)
  - SPPRC avec contrainte d'élémentarité pour des sommets choisis dynamiquement
    - borne presque équivalente à celle obtenue avec l'ESPPRC si les sommets sont bien choisis
    - Desaulniers et al. (2006)
  - ESSPRC avec ajout dynamique des contraintes d'élémentarité
    - Si le sous-problème ne retourne que des tournées avec des cycles, une contrainte est ajoutée et le sous-problème rappelé
    - Dumitrescu et Boland (2006), Righini et Salani (2005)

SPPRC

- Contraintes de ressources
  - Ressource r = 1,…,R
  - Consommation t^r_{ij} pour tout arc (v_i,v_j)
  - Fenêtre $[a^r_i,b^r_i]$ pour tout sommet v_i
    - le niveau de consommation de la ressource ne peut pas dépasser b^r_i quand le sommet v_i est atteint
    - si le niveau de consommation de la ressource est inférieur à a^r_i quand le sommet v_i est atteint, alors il est mis à a^r_i

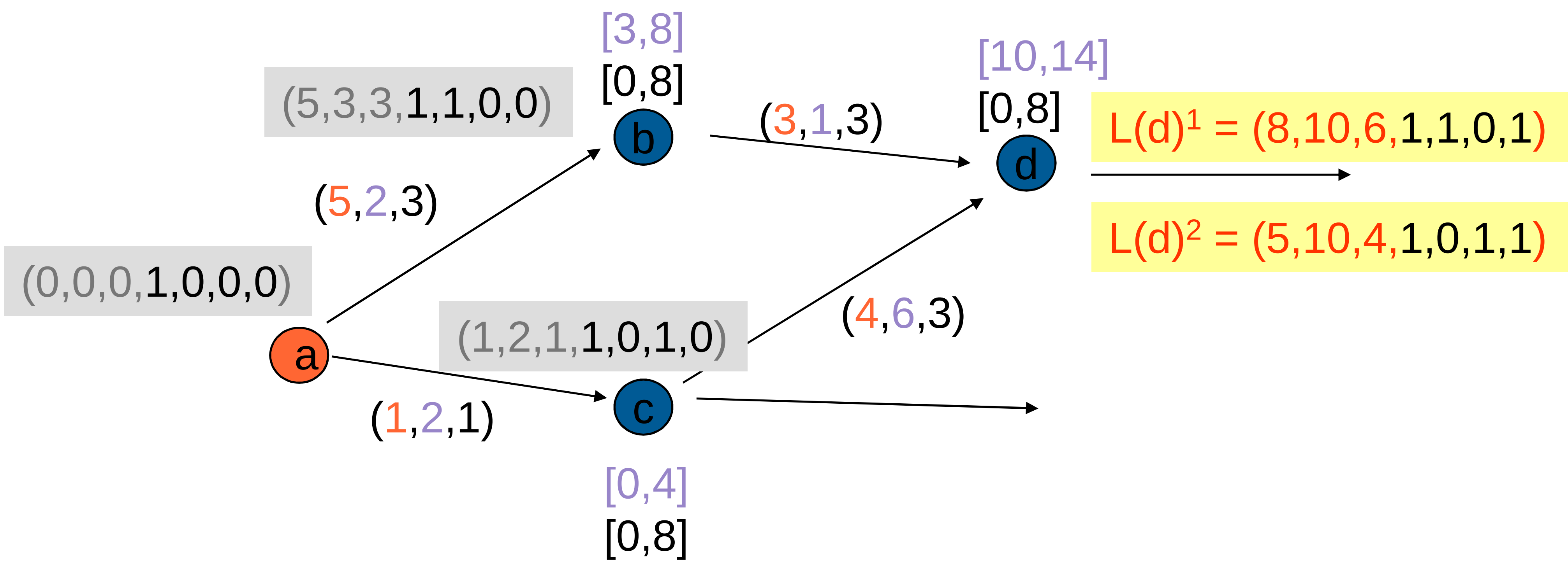
SPPRC

- Desrochers 1988



ESPPRC

- Ajouter une ressource 0-1 par sommet
  - Indique si sommet visité ou non
  - Proposé mais non testé par Beasley et Christofides (1989)

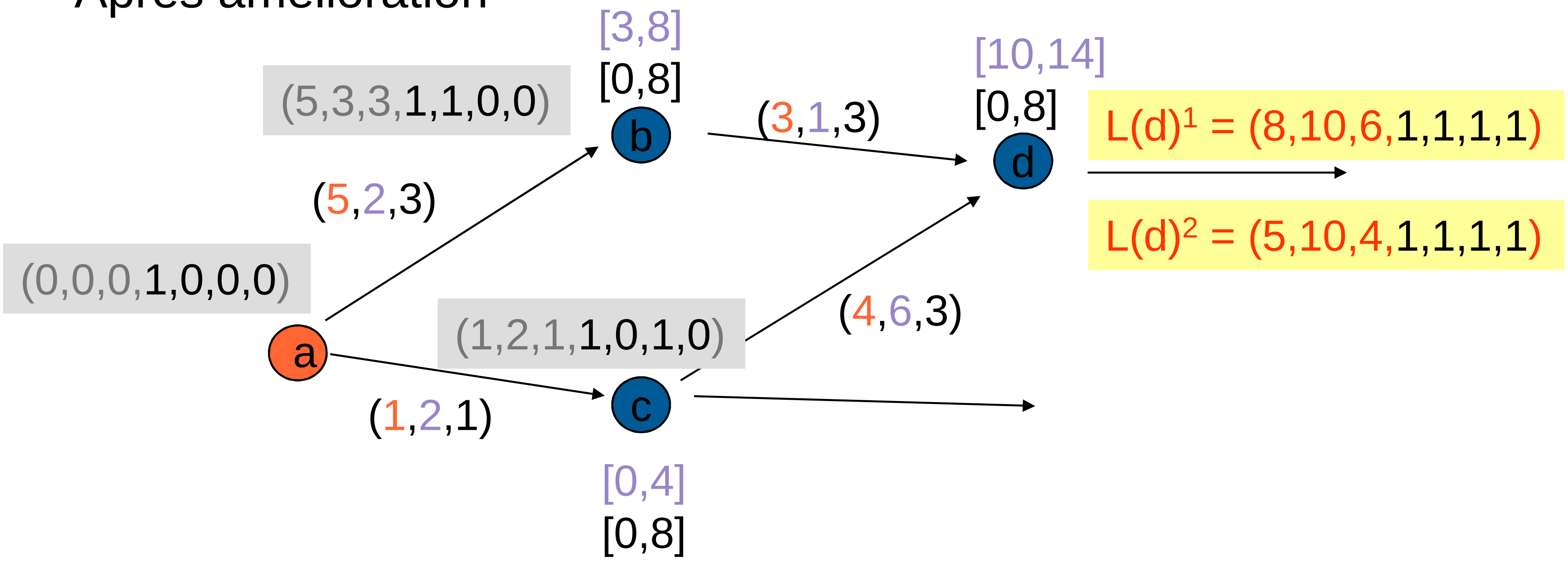


ESPPRC

- Amélioration
  - Notion de sommet « non atteignable »
  - Règle d’extension
    - pour tous les sommets ne pouvant plus être atteints, la ressource est fixée à 1
  - Feillet et al. (2004)

ESPPRC

- Après amélioration



ESPPRC

- Le nombre de ressources a un impact négatif fort sur le nombre de labels
  - Dominance plus difficile
- Mais les contraintes ont un impact positif fort sur le nombre de labels
  - Moins de labels réalisables

Efficacité de la résolution du sous-problème

- Remonter plusieurs routes de coût négatif
  - Programmation dynamique bien adaptée pour ça
  - Compromis à trouver : réduire le nombre d'itérations / limiter la taille du problème maître restreint

- Tronquer la résolution
  - Le but réel n'est pas de trouver la route de coût minimum mais de trouver une (des) route(s) de coût négatif !
  - Compromis à trouver : limiter les temps de calcul du sous-problème / remonter des routes attractives

- Commencer par une résolution heuristique du sous-problème
  - Recherche tabou…
  - Programmation dynamique heuristique…

Efficacité de la résolution du sous-problème (Feillet et al. 2007)

- Limited Discrepancy Search
  - Exploration restreinte aux chemins contenant un nombre limité de « mauvais » arcs
    - qualité d'un arc définie selon le coût réduit associé
  - Algorithme
    - résoudre ESPPRC restreint
    - si au moins un chemin de coût réduit négatif est trouvé STOP, sinon augmenter la limite et répéter
  - Avantage
    - reflète bien la structure des solutions
    - approche simple et générique

Efficacité de la résolution du sous-problème (Feillet et al. 2007)

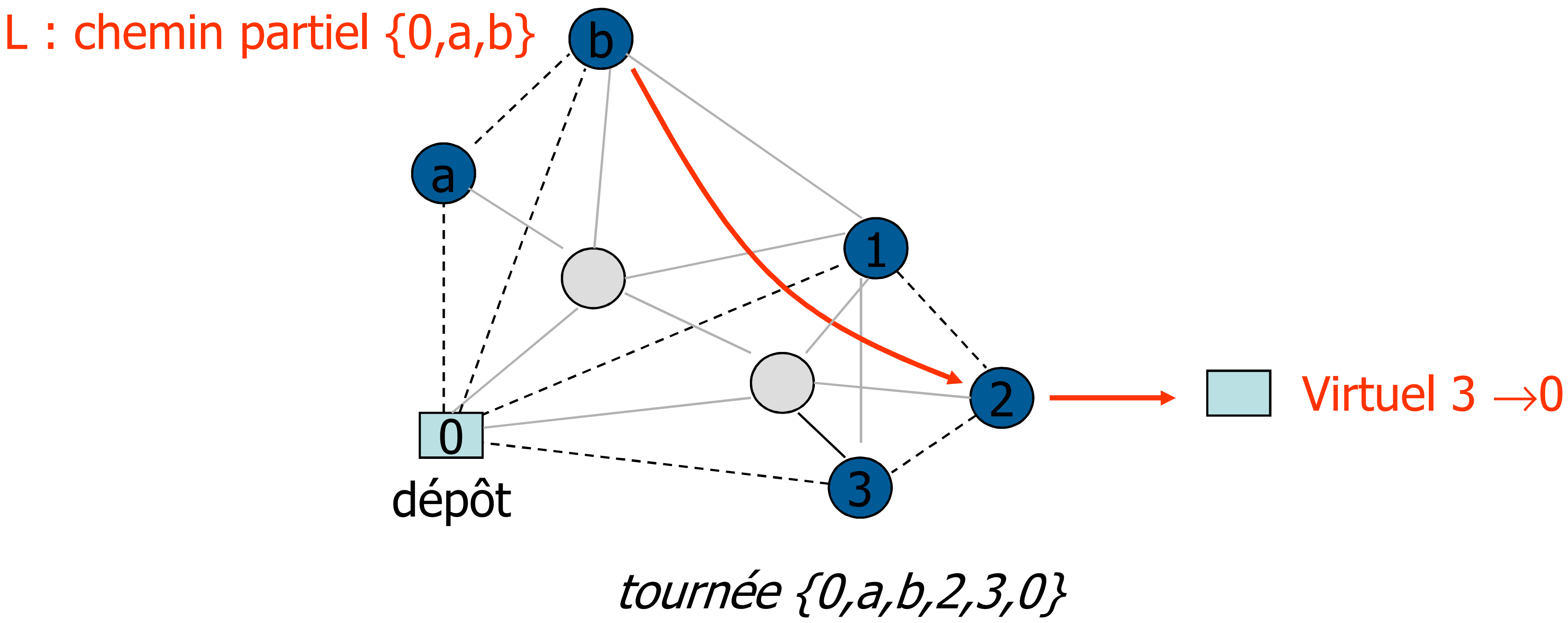
- Label Elimination
  - Objectif : supprimer des labels qui génèrent du temps de calcul sans possibilité de générer des chemins de coût négatif
    - évaluer une borne sur le coût de la meilleure extension possible pour un label
    - couper le label si `coût du label + borne > 0`

Efficacité de la résolution du sous-problème (Feillet et al. 2007)

- Meta-extend et Label-loading
  - Utilise le fait que les chemins correspondant aux variables de la base ont un coût réduit nul
  - Introduire en pré-processing :
    - des labels correspondant aux débuts de ces chemins
    - des dépôts virtuels correspondant à la fin de ces chemins

Efficacité de la résolution du sous-problème (Feillet et al. 2007)

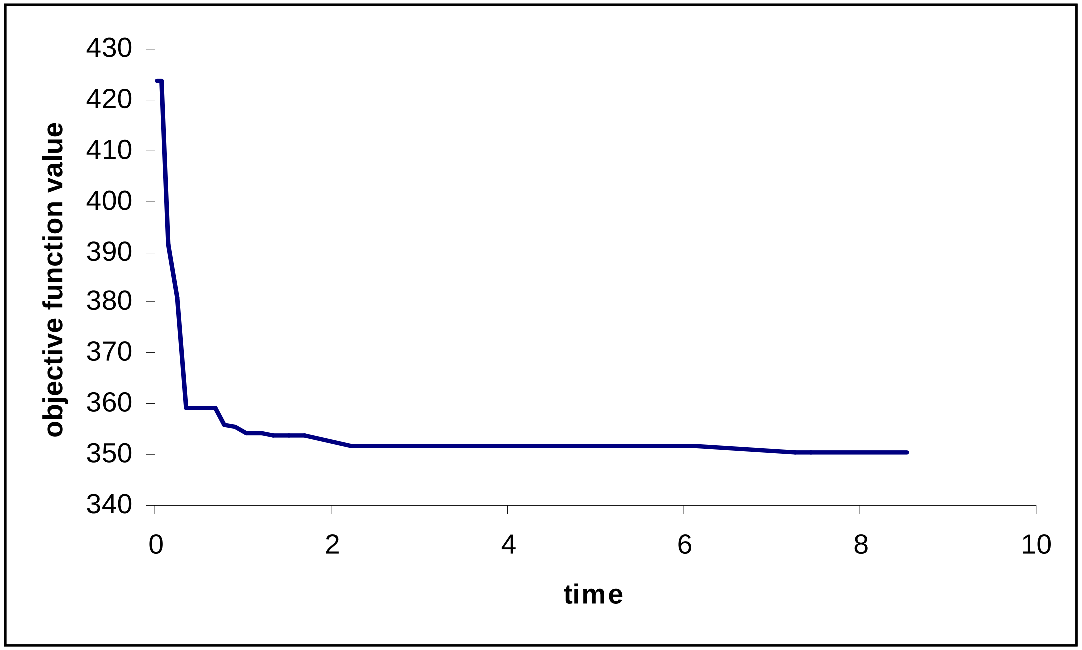
- Meta-extend et Label-loading



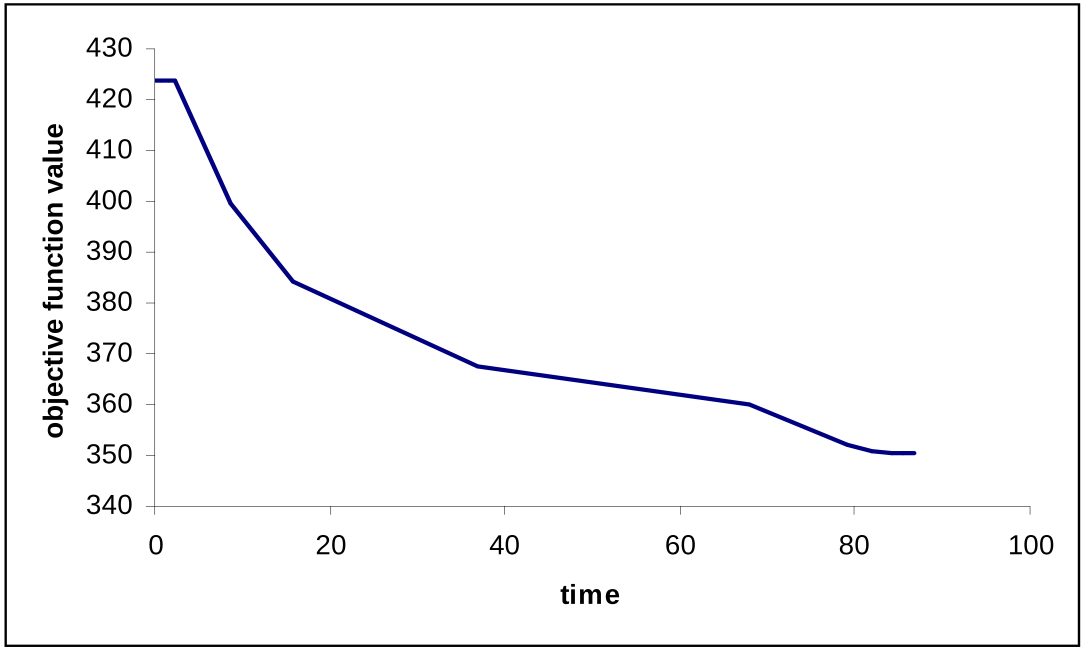
- Revient à une recherche locale générique autour des chemins de la base

Efficacité de la résolution du sous-problème (Feillet et al. 2007)

- LDS + Meta-extend + Label-loading
  - les effets se cumulent
  - utilisation d'informations globales et locales
  - convergence rapide



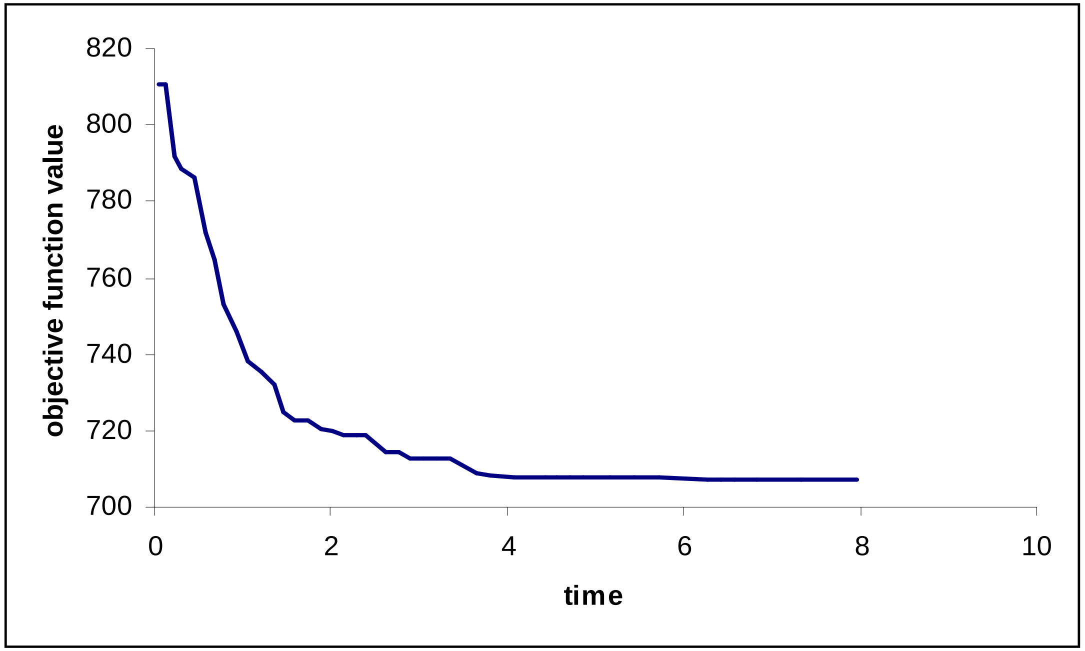
Avec



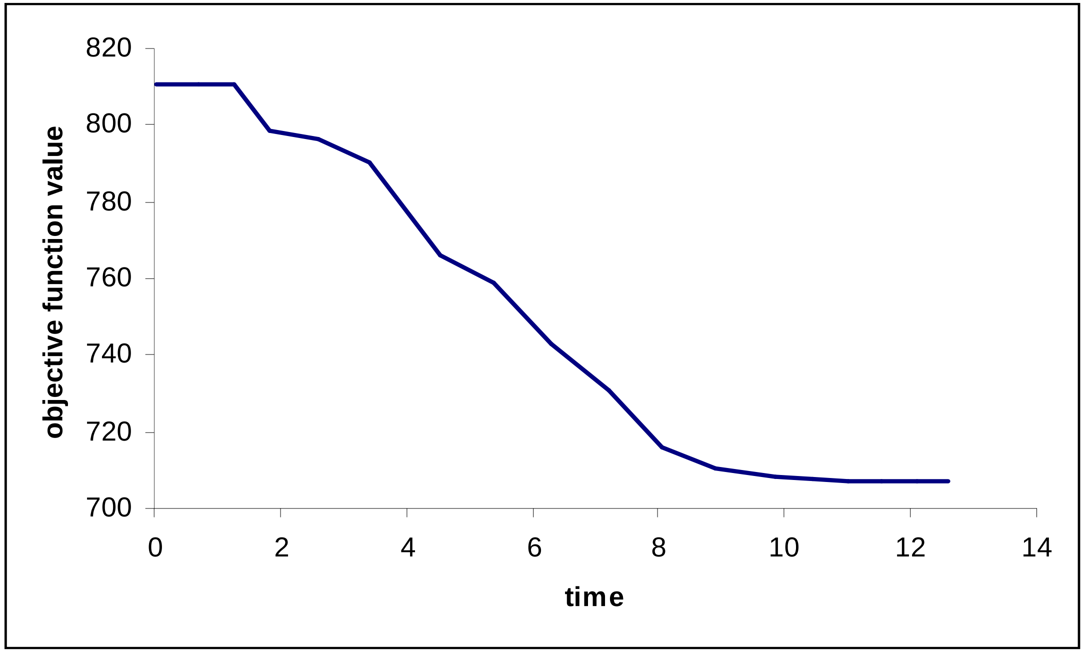
Sans

Efficacité de la résolution du sous-problème (Feillet et al. 2007)

- LDS + Meta-extend + Label-loading



Avec



Sans

Conclusions

- Importance de la résolution efficace du sous-problème dans le contexte des problèmes de tournées de véhicules

- Aspects importants non évoqués
  - Génération de coupe pour améliorer la borne
    - question de la compatibilité avec le sous-problème
  - Stabilisation