Sur la relaxation linéaire du problème de localisation de dépôts

Soit $G = (V, A)$ un graphe dirigé, pas nécessairement connexe, où chaque arc $(u, v) \in A$ et chaque sommet v sont munis d'un coût $c(u, v)$ (*d'affectaion*) et $f(v)$ (*d'ouverture*), respectivement. Le problème de localisation de dépôts sans capacités (UFLP), consiste en la sélection d'un ensemble de sommets appelés *centres* et en l'affectation de tout sommet non sélectionné à un sommet sélectionné. L'objectif est de sélectionner des sommets qui minimisent les coûts induits par leur ouverture et l'affectation des sommets non sélectionnés.

Le UFLP peut se formuler par le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\text{minimiser} \sum_{(u,v)\in A} c(u, v)x(u, v) + \sum_{v\in V} f(v)y(v), \tag{1}$$

$$\sum_{v:(u,v)\in A} x(u, v) = 1 - y(u) \quad \forall u \in V, \tag{2}$$

$$x(u, v) \leq y(v) \quad \forall (u, v) \in A, \tag{3}$$

$$0 \leq y(v) \leq 1 \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

$$x(u, v) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in A, \tag{5}$$

$$x \in \{0, 1\}^{|A|},\ y \in \{0, 1\}^{|V|}. \tag{6}$$

Notons par $UFLP(G)$ l'enveloppe convexe des solutions de (2)-(6) et par $P(G)$ le polytope défini par (2)-(5). Nous avons $UFLP(G) \subseteq P(G)$.

Dans ce travail nous caractérisons les graphes pour lesquels $UFLP(G) = P(G)$. Nous montrons comment reconnaître ces graphes en temps polynomial. Finalement, dans le cas où $UFLP(G) \subset P(G)$, nous donnons une classe d'inégalités linéaires qui séparent $UFLP(G)$ de $P(G)$. Le nombre de ces inégalités peut être exponentiel en nombres d'arcs et de sommets du graphe mais nous pourrons résoudre le problème de séparation associé en temps polynomial.