Augmentation de graphe sous contrainte de diamètre

V. Chepoi, B. Estellon, K. Nouioua, Y. Vaxès

Université de la Méditerranée

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille

Équipe Combinatoire et Recherche Opérationnelle

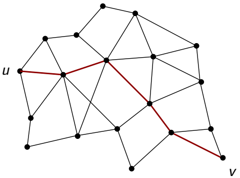
23 janvier 2009

Plan

Introduction

Domaine de recherche

Problèmes algorithmiques liés aux distances dans les graphes



Diamètre

Quel est la distance maximum entre deux sommets ?

Borner le délai maximum de communications

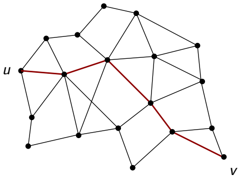
Problématique

- Classe complexité des problèmes rencontrés
- Pbs NP-difficiles : algorithmes d'approximation
- Classes de graphes

Introduction

Domaine de recherche

Problèmes algorithmiques liés aux distances dans les graphes



Augmentation

Combien d'arêtes faudrait-il ajouter pour obtenir un graphe de diamètre donné ?

Améliorer un réseau en ajoutant des liaisons.

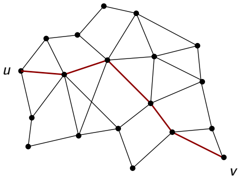
Problématique

- Classe complexité des problèmes rencontrés
- Pbs NP-difficiles : algorithmes d'approximation
- Classes de graphes

Introduction

Domaine de recherche

Problèmes algorithmiques liés aux distances dans les graphes



Augmentation

Combien d'arêtes faudrait-il ajouter pour obtenir un graphe de diamètre donné ?

Améliorer un réseau en ajoutant des liaisons.

Problématique

- Classe complexité des problèmes rencontrés
- Pbs NP-difficiles : algorithmes d'approximation
- Classes de graphes

Notions

Algorithme d'approximation

Un **algorithme d'approximation** avec un facteur α pour un problème de minimisation Π est un algorithme polynomial, pour chaque instance I de Π, délivre une solution dont le coût est au plus α fois $OPT_\Pi(I)$.

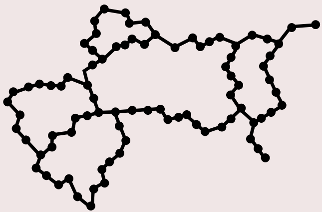
Notions liées aux distances dans les graphes

- la **distance** $d_G(u, v)$ entre deux sommets u et v est le nombre minimum d'arêtes dans un chemin entre u et v ;
- le **diamètre** du graphe G, $\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) : u, v \in V\}$
- la **boule** de rayon R centrée en v, $B_R(v) = \{u \in V : d_G(u, v) \leq R\}$

Deux problèmes sur les graphes :

- Couverture d'un graphe par des boules.
- Augmentation sous contraintes de diamètre.

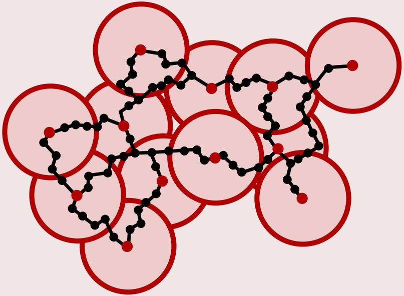
Couverture



Deux problèmes sur les graphes :

- Couverture d'un graphe par des boules.
- Augmentation sous contraintes de diamètre.

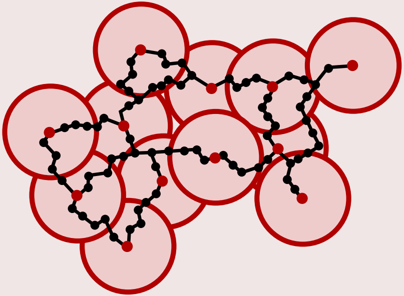
Couverture



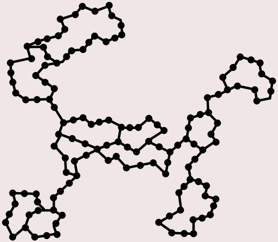
Deux problèmes sur les graphes :

- Couverture d'un graphe par des boules.
- Augmentation sous contraintes de diamètre.

Couverture



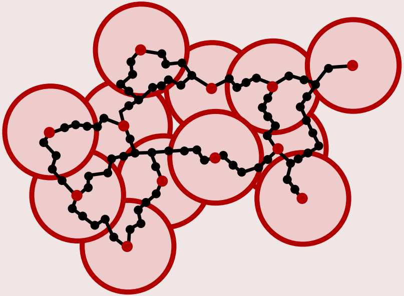
Augmentation



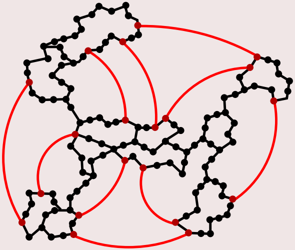
Deux problèmes sur les graphes :

- Couverture d'un graphe par des boules.
- Augmentation sous contraintes de diamètre.

Couverture



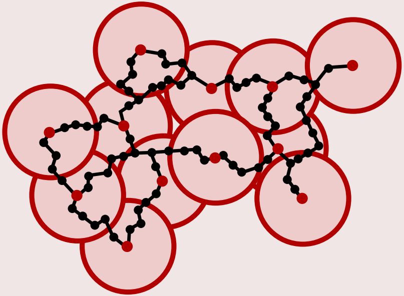
Augmentation



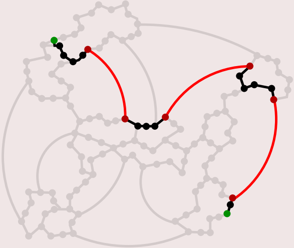
Deux problèmes sur les graphes :

- Couverture d'un graphe par des boules.
- Augmentation sous contraintes de diamètre.

Couverture



Augmentation

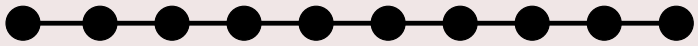


Problème d'augmentation

Problème ACD (Augmentation sous Contrainte de Diamètre)

Etant donné un graphe G et un entier $D > 0$, ajouter un nombre minimum d'arêtes de façon à obtenir un graphe dont le diamètre inférieur ou égal à D.

$D = 2$

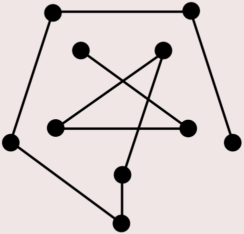


Problème d'augmentation

Problème ACD (Augmentation sous Contrainte de Diamètre)

Etant donné un graphe G et un entier $D > 0$, ajouter un nombre minimum d'arêtes de façon à obtenir un graphe dont le diamètre inférieur ou égal à D.

$D = 2$

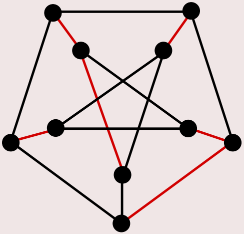


Problème d'augmentation

Problème ACD (Augmentation sous Contrainte de Diamètre)

Etant donné un graphe G et un entier $D > 0$, ajouter un nombre minimum d'arêtes de façon à obtenir un graphe dont le diamètre inférieur ou égal à D.

$D = 2$



Chemins et cycles

Même pour les chemins et les cycles,
borner le nombre d'arêtes d'une solution optimale n'est pas trivial.

Pour un chemin avec n sommets,

$$\frac{n-D-1}{D+1} \leq OPT \leq \frac{n-D+2}{D-2}.$$

F.R.K. Chung et M.R. Garey, J. of Graph Theory (1984)

Pour un cycle avec n sommets,

$$\left\lfloor \frac{n}{D-1} \right\rfloor - 7 \leq OPT \leq \left\lfloor \frac{n}{D-1} \right\rfloor \text{ si } D \text{ est pair,}$$

$$\left\lfloor \frac{n}{D-2} \right\rfloor - 146 \leq OPT \leq \left\lfloor \frac{n}{D-2} \right\rfloor \text{ si } D \text{ est impair (constante additive).}$$

N. Alon, A. Gyárfás et M. Ruszinkó, J. Graph Theory (2000)

Chemins et cycles

Même pour les chemins et les cycles,
borner le nombre d'arêtes d'une solution optimale n'est pas trivial.

Pour un chemin avec n sommets,

$$\frac{n-D-1}{D+1} \leq OPT \leq \frac{n-D+2}{D-2}.$$

F.R.K. Chung et M.R. Garey, J. of Graph Theory (1984)

Pour un cycle avec n sommets,

$$\left\lfloor \frac{n}{D-1} \right\rfloor - 7 \leq OPT \leq \left\lfloor \frac{n}{D-1} \right\rfloor \text{ si } D \text{ est pair,}$$

$$\left\lfloor \frac{n}{D-2} \right\rfloor - 146 \leq OPT \leq \left\lfloor \frac{n}{D-2} \right\rfloor \text{ si } D \text{ est impair (constante additive).}$$

N. Alon, A. Gyárfás et M. Ruszinkó, J. Graph Theory (2000)

Résultats négatifs

Graphes généraux

- NP-difficile.
  - A.A. Schoone and H.L. Bodlaender and J. van Leeuwen (1987)
  - Ch.-L. Li and S.Th. McCormick and D. Simchi–Levi (1992)
- Au moins aussi difficile à approximer que SET COVER
  - V. Chepoi, Y. V., Algorithmica (2002)

Arbres : diamètre + 2-connexité

- NP-difficile
  - V. Chepoi, Y. V., Algorithmica (2002)

Résultats négatifs

Graphes généraux

- NP-difficile.
  - A.A. Schoone and H.L. Bodlaender and J. van Leeuwen (1987)
  - Ch.-L. Li and S.Th. McCormick and D. Simchi–Levi (1992)
- Au moins aussi difficile à approximer que SET COVER
  - V. Chepoi, Y. V., Algorithmica (2002)

Arbres : diamètre + 2-connexité

- NP-difficile
  - V. Chepoi, Y. V., Algorithmica (2002)

Résultats positifs

Graphes généraux

- Approximable avec facteur $O(\log^2 n)$.
  - Y. Dodis, S. Khanna, STOC (1999)

Arbres

- Approximable avec un facteur 2 si D est pair.
  - V. Chepoi, Y. V., Algorithmica (2002)
- Approximable avec un facteur $2 + \frac{1}{\delta}$ si D est impair.
  - V. Chepoi, B. Estellon, K. Nouioua, Y. V., Algorithmica (2006)

Résultats positifs

Graphes généraux

- Approximable avec facteur $O(\log^2 n)$.
  - Y. Dodis, S. Khanna, STOC (1999)

Arbres

- Approximable avec un facteur 2 si D est pair.
  - V. Chepoi, Y. V., Algorithmica (2002)
- Approximable avec un facteur $2 + \frac{1}{\delta}$ si D est impair.
  - V. Chepoi, B. Estellon, K. Nouioua, Y. V., Algorithmica (2006)

Plan

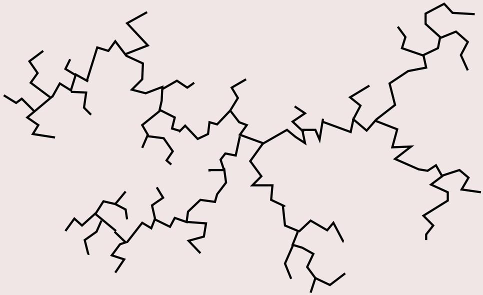
Augmentation associée à une couverture

Proposition

Si C est **couverture** avec :

- 1 **boule** de rayons R
- n_{R-1} boules de rayon $R - 1$.

alors il existe une solution admissible avec n_{R-1} arêtes.



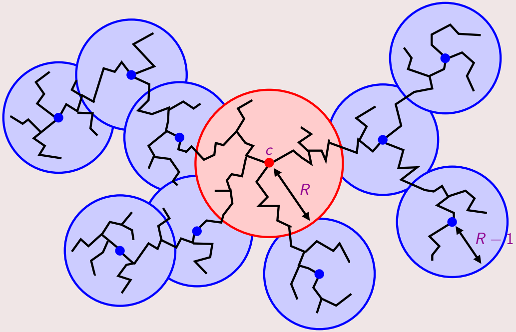
Augmentation associée à une couverture

Proposition

Si C est **couverture** avec :

- 1 **boule** de rayons R
- n_{R-1} boules de rayon $R - 1$.

alors il existe une solution admissible avec n_{R-1} arêtes.



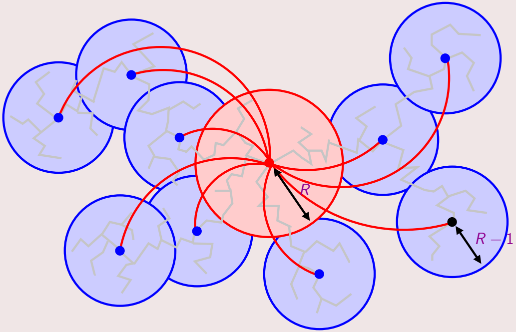
Augmentation associée à une couverture

Proposition

Si C est **couverture** avec :

- 1 **boule** de rayons R
- n_{R-1} boules de rayon $R - 1$.

alors il existe une solution admissible avec n_{R-1} arêtes.



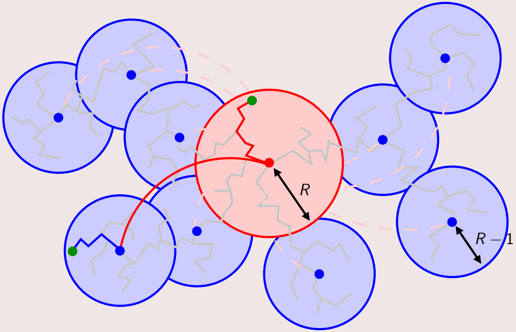
Augmentation associée à une couverture

Proposition

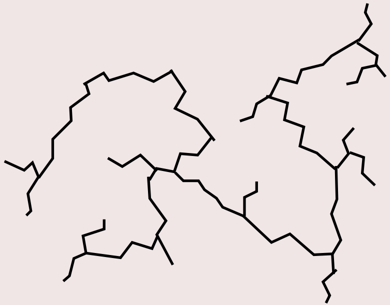
Si C est **couverture** avec :

- 1 **boule** de rayons R
- n_{R-1} boules de rayon $R - 1$.

alors il existe une solution admissible avec n_{R-1} arêtes.



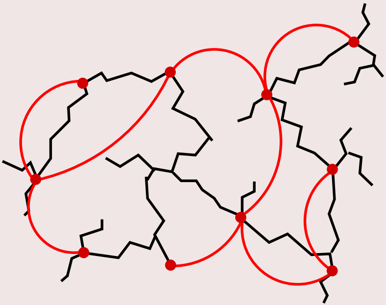
Couverture associée à une augmentation



Proposition

Il existe une couverture C' avec 1 boule de rayon R et $n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|$ boules de rayons $R - 1$.

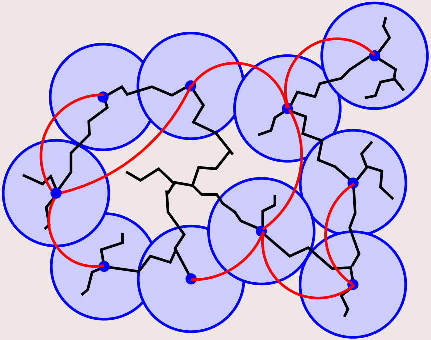
Couverture associée à une augmentation



Proposition

Il existe une couverture C' avec 1 boule de rayon R et $n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|$ boules de rayons $R - 1$.

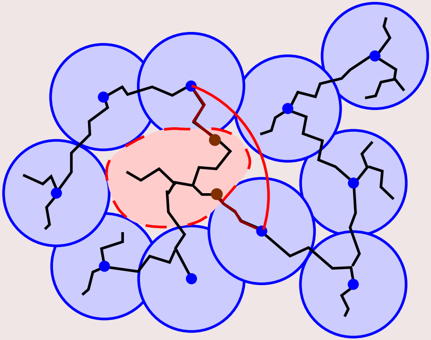
Couverture associée à une augmentation



Proposition

Il existe une couverture C' avec 1 boule de rayon R et $n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|$ boules de rayons $R - 1$.

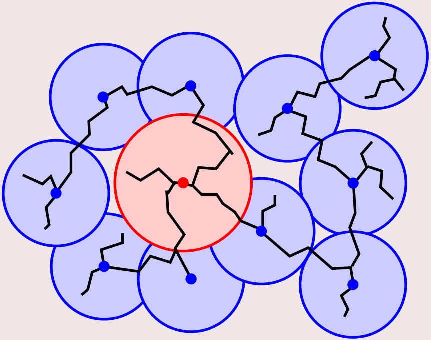
Couverture associée à une augmentation



Proposition

Il existe une couverture C' avec 1 boule de rayon R et $n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|$ boules de rayons $R - 1$.

Couverture associée à une augmentation



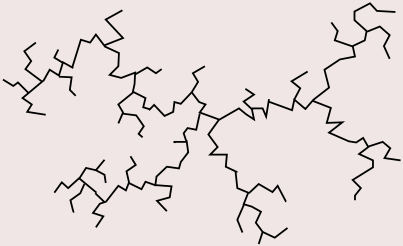
Proposition

Il existe une couverture C' avec 1 boule de rayon R et $n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|$ boules de rayons $R - 1$.

Algorithme pour $D = 2R$

Algorithme

- Trouver une couverture C avec une boule de rayon R et un nombre minimum de boules de rayon $R - 1$.
- Construire une solution admissible S à partir de cette couverture.

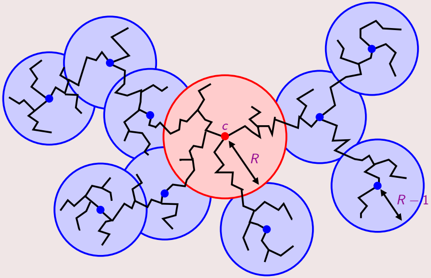


$$ALG = n_{R-1} \leq n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|.$$

Algorithme pour $D = 2R$

Algorithme

- Trouver une couverture C avec une boule de rayon R et un nombre minimum de boules de rayon $R - 1$.
- Construire une solution admissible S à partir de cette couverture.

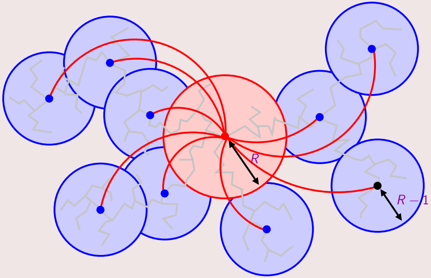


$$ALG = n_{R-1} \leq n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|.$$

Algorithme pour $D = 2R$

Algorithme

- Trouver une couverture C avec une boule de rayon R et un nombre minimum de boules de rayon $R - 1$.
- Construire une solution admissible S à partir de cette couverture.

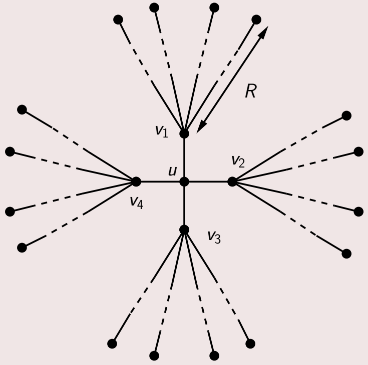


$$ALG = n_{R-1} \leq n'_{R-1} \leq 2 \cdot |OPT|.$$

Plan

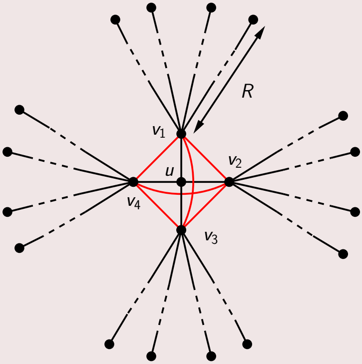
Instance induisant une clique

Pour $D = 2R + 1$, une clique de taille arbitrairement grande peut-être solution optimale.



Instance induisant une clique

Pour $D = 2R + 1$, une clique de taille arbitrairement grande peut-être solution optimale.



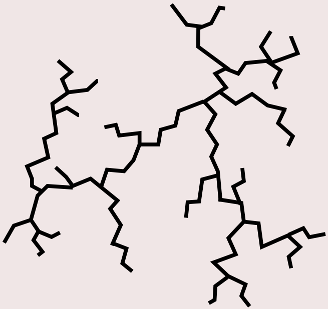
Le cas impair $(D = 2R + 1)$

Proposition

Si C est couverture avec :

- n_R boules de rayon $R = (D-1)/2$ et
- n_{R-1} boules de rayons $R - 1$

alors il existe une solution admissible avec $\text{coût}(C) := \frac{n_R(n_R-1)}{2} + n_{R-1}$ arêtes.



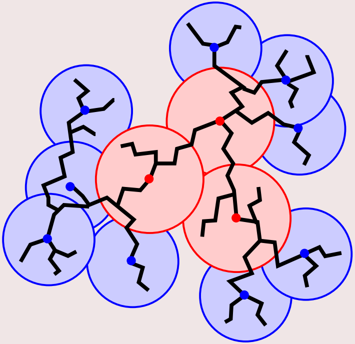
Le cas impair ($D = 2R + 1$)

Proposition

Si C est couverture avec :

- n_R boules de rayon $R = (D - 1)/2$ et
- n_{R-1} boules de rayons $R - 1$

alors il existe une solution admissible avec coût$(C) := \frac{n_R(n_R-1)}{2} + n_{R-1}$ arêtes.



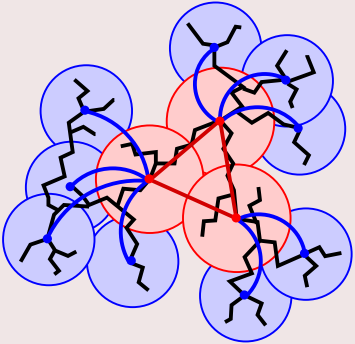
Le cas impair ($D = 2R + 1$)

Proposition

Si C est couverture avec :

- n_R boules de rayon $R = (D-1)/2$ et
- n_{R-1} boules de rayons $R - 1$

alors il existe une solution admissible avec coût$(C) := \frac{n_R(n_R-1)}{2} + n_{R-1}$ arêtes.

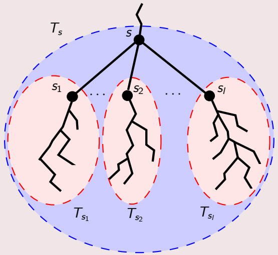


Le cas impair ($D = 2R + 1$)

Problème de la Couverture Mixte

Etant donné un graphe G, deux entiers positifs R_1 et R_2 et une fonction f, trouver une couverture de G avec n_1 boules de rayon R_1 et n_2 boules de rayon R_2 minimisant la fonction $f(n_1, n_2)$.

Si G est un arbre, il existe un algorithme polynomial pour résoudre ce problème par programmation dynamique.



Résultat

Algorithme

- Trouver une couverture C avec n_R boules de rayon R et n_{R-1} boules de rayon $R-1$ qui minimise $n_R(n_R-1)/2 + n_{R-1}$.
- Renvoyer la solution admissible du problème d'augmentation associée à cette couverture.

Théorème

Pour tout entier $\delta > 0$, $|ALG| = \text{coût}(C) \leq (2 + 1/\delta)|OPT| + O(\delta^5)$.

Ici, nous présentons une analyse plus simple qui montre seulement que

$$|ALG| \leq (3 + 1/\delta)|OPT| + O(\delta).$$

Idée de la preuve.
A partir de OPT, on construit une couverture mixte C' telle que

$$\text{coût}(C') \leq (3 + 1/\delta)|OPT| + O(\delta).$$

La couverture mixte utilisée par notre algorithme étant optimale, on a

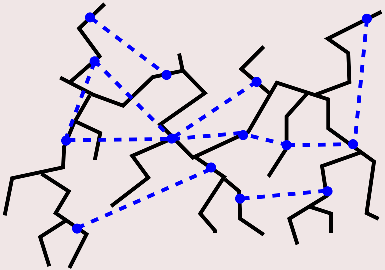
$$|ALG| = \text{coût}(C) \leq \text{coût}(C') \leq (3 + 1/\delta)|OPT| + O(\delta).$$

Construction de C'

- Une boule de rayon $R - 1$ sur chacune des extrémités des arêtes de OPT

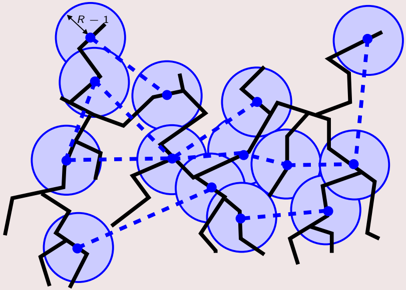
$$n_{R-1} \leq 2|OPT|.$$

- Soit Q l'ensemble des sommets non couverts.
- Soit n_R le nombre minimum de boules de rayon R pour couvrir Q.



Construction de C'

- Une boule de rayon $R - 1$ sur chacune des extrémités des arêtes de OPT
$$n_{R-1} \leq 2|OPT|.$$
- Soit Q l'ensemble des sommets non couverts.
- Soit n_R le nombre minimum de boules de rayon R pour couvrir Q.

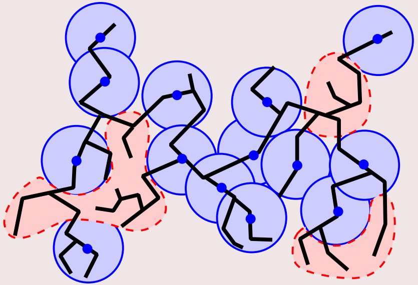


Construction de C'

- Une boule de rayon $R - 1$ sur chacune des extrémités des arêtes de OPT

$$n_{R-1} \leq 2|OPT|.$$

- Soit Q l'ensemble des sommets non couverts.
- Soit n_R le nombre minimum de boules de rayon R pour couvrir Q.

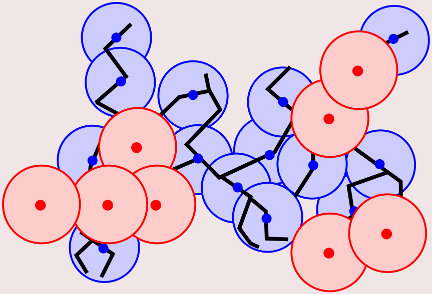


Construction de C'

- Une boule de rayon $R - 1$ sur chacune des extrémités des arêtes de OPT

$$n_{R-1} \leq 2|OPT|.$$

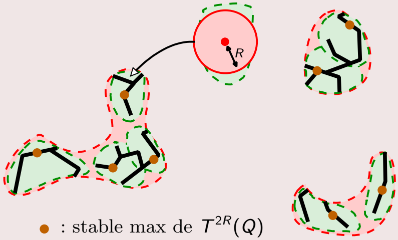
- Soit Q l'ensemble des sommets non couverts.
- Soit n_R le nombre minimum de boules de rayon R pour couvrir Q.



Analyse (1/3)

- Considérons $T^{2R}(Q)$ le sous-graphe de T^{2R} induit par Q.
- [des sommets deux à deux à distance $> 2R$ dans T] $\leftrightarrow$ [un stable dans T^{2R}]
- [boule de rayon R dans T] $\leftrightarrow$ [une clique dans T^{2R}]

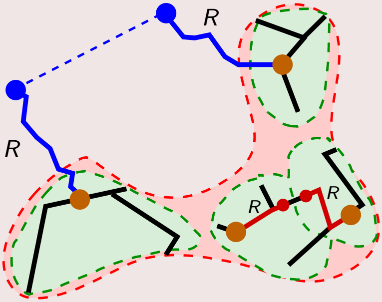
$\Rightarrow$ Il existe un ensemble S de n_R sommets de Q deux à deux à distance $> 2R$.



Analyse (2/3)

Proposition.

$$|OPT| \geq \frac{n_R(n_R - 1)}{2} - (n_R - 1).$$



● S : stable max de $T^{2R}(Q)$

Analyse (3/3)

A.

$$\frac{n_R(n_R - 1)}{2} - (n_R - 1) \leq |OPT|$$

B.

$$n_{R-1} \leq 2|OPT|$$

De A. et B., on déduit :

$$\text{coût}(C') = \frac{n_R(n_R - 1)}{2} + n_{R-1} \leq \left(3 + \frac{1}{\delta}\right)|OPT| + O(\delta)$$

$$ALG = \text{coût}(C) \leq \text{coût}(C') \leq \left(3 + \frac{1}{\delta}\right)|OPT|.$$

Idée de raffinement

Remplacer une boule de rayon R par un petit nombre (paramètre par δ) de boules de rayons $R - 1$.

Si c'est possible pour un grand nombre de boules de rayon R, on obtient une meilleure couverture mixte plus proche de OPT $\Rightarrow$ une meilleure borne supérieure pour $|ALG|$.

Sinon, on déduit à l'existence de sommets "dispersés" qui forcent des arêtes dans OPT $\Rightarrow$ une meilleure inférieure sur OPT.

Plan

Questions

Graphes généraux

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur $O(\log n)$?

Arbres

Les algorithmes que nous avons proposés sont-ils optimaux à une constante additive près ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur constant pour le problème d'augmentation ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme avec un facteur constant pour le problème de R-domination d'un graphe planaire ?

Questions

Graphes généraux

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur $O(\log n)$?

Arbres

Les algorithmes que nous avons proposés sont-ils optimaux à une constante additive près ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur constant pour le problème d'augmentation ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme avec un facteur constant pour le problème de R-domination d'un graphe planaire ?

Questions

Graphes généraux

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur $O(\log n)$?

Arbres

Les algorithmes que nous avons proposés sont-ils optimaux à une constante additive près ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur constant pour le problème d'augmentation ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme avec un facteur constant pour le problème de R-domination d'un graphe planaire ?

Questions

Graphes généraux

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur $O(\log n)$?

Arbres

Les algorithmes que nous avons proposés sont-ils optimaux à une constante additive près ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme d'approximation avec un facteur constant pour le problème d'augmentation ?

Graphes planaires

Existe-t-il un algorithme avec un facteur constant pour le problème de R-domination d'un graphe planaire ?

Problème de couverture

Conjecture

Existe-t-il une constante c telle que tout graphe planaire de diamètre $\leq 2R$ peut être couvert par c boules de rayon R ?

C. Gavoille, D. Peleg, A. Raspaud et E. Sopena (1999)

Trigraphes et squaregraphes

Pour les trigraphes et squaregraphes, la réponse est positive avec $c = 2$.

V. Chepoi et Y.V., J. of Graph Theory (2003)

Graphes planaires

Pour les graphes planaires, la réponse est positive mais on ne connait pas la valeur de c.

V. Chepoi, B. Estellon et Y.V., Disc. Comput. Geometry (2007)

Couverture des graphes planaires

Ingrédients de la preuve

- Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire de diamètre $2R$.
- Soit $\mathcal{B}(G)$ la famille des boules de rayons R de G

$$\text{VC-dim} = \max\left\{|X| : X \subseteq V, \{X \cap B : B \in \mathcal{B}(G)\} = 2^X\right\} \leq 4$$

- Il existe une constante $p \geq 5$ telle que $\mathcal{B}(G)$ satisfait la $(p, 5)$-propriété de Hadwiger-Debrunner.
- La preuve se déduit alors du résultat suivant :

Théorème (Matoušek, 2004)

Soit $\mathcal{F}$ un famille telle que VC-dim$(\mathcal{F}^*) \leq q - 1$ et un entier $p \geq q$. Il existe une constante c telle que si la famille $\mathcal{F}$ satisfait la (p, q)-propriété de Hadwiger-Debrunner alors elle admet un transversal de taille $\leq c$.

Fin

Merci !