Partitions régulières de graphes épars et applications.

Patrice Ossona de Mendez

Partitions régulières de graphes épars et applications.

Patrice Ossona de Mendez

en collaboration avec Jaroslav Nešetřil

Plan

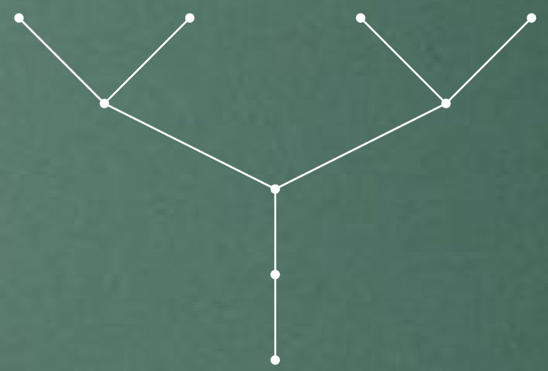
- Partitions régulières
- Graphes épars
- Applications

Plan

- Partitions régulières
  - La profondeur d'arbre (tree-depth) d'un graphe
  - Tree-depth borné
  - Nombres chromatiques
  - Coloring numbers généralisés
- Graphes épars
- Applications

Tree-depth

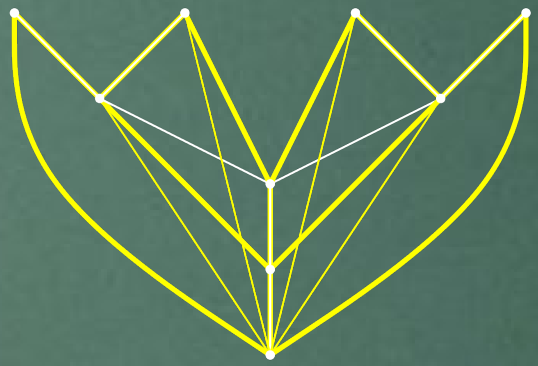
$$\mathrm{td}(G) = \min\{\mathrm{height}(T) : G \subseteq \mathrm{clos}(T)\}$$



$$\mathrm{height}(T) = 5$$

Tree-depth

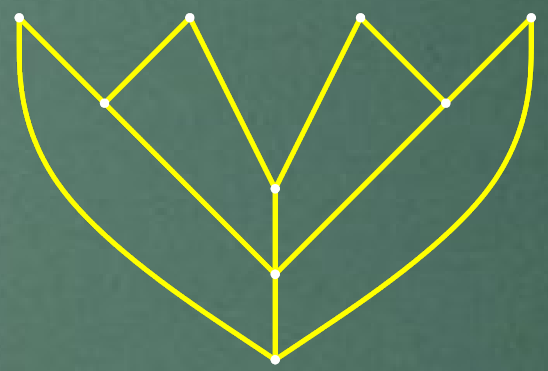
$$\mathrm{td}(G) = \min\ \{\mathrm{height}(T) : G \subseteq \mathrm{clos}(T)\}$$



$\mathrm{height}(T) = 5$

Tree-depth

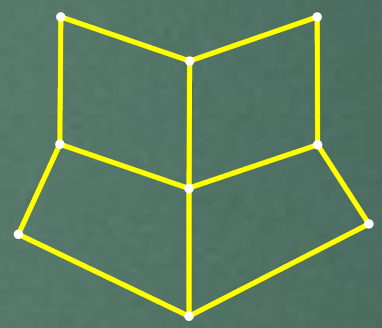
$$\operatorname{td}(G)=\min\ \{\operatorname{height}(T):\ G\subseteq \operatorname{clos}(T)\}$$



$$\operatorname{height}(T)=5$$

Tree-depth

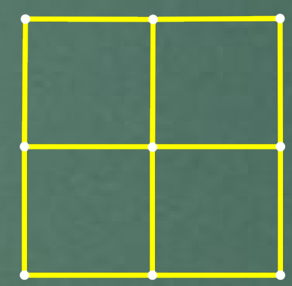
$$\mathrm{td}(G) = \min \{\mathrm{height}(T) : G \subseteq \mathrm{clos}(T)\}$$



$$\mathrm{height}(T) = 5$$

Tree-depth

$$\mathrm{td}(G)=\min\{\mathrm{height}(T):\ G\subseteq \mathrm{clos}(T)\}$$



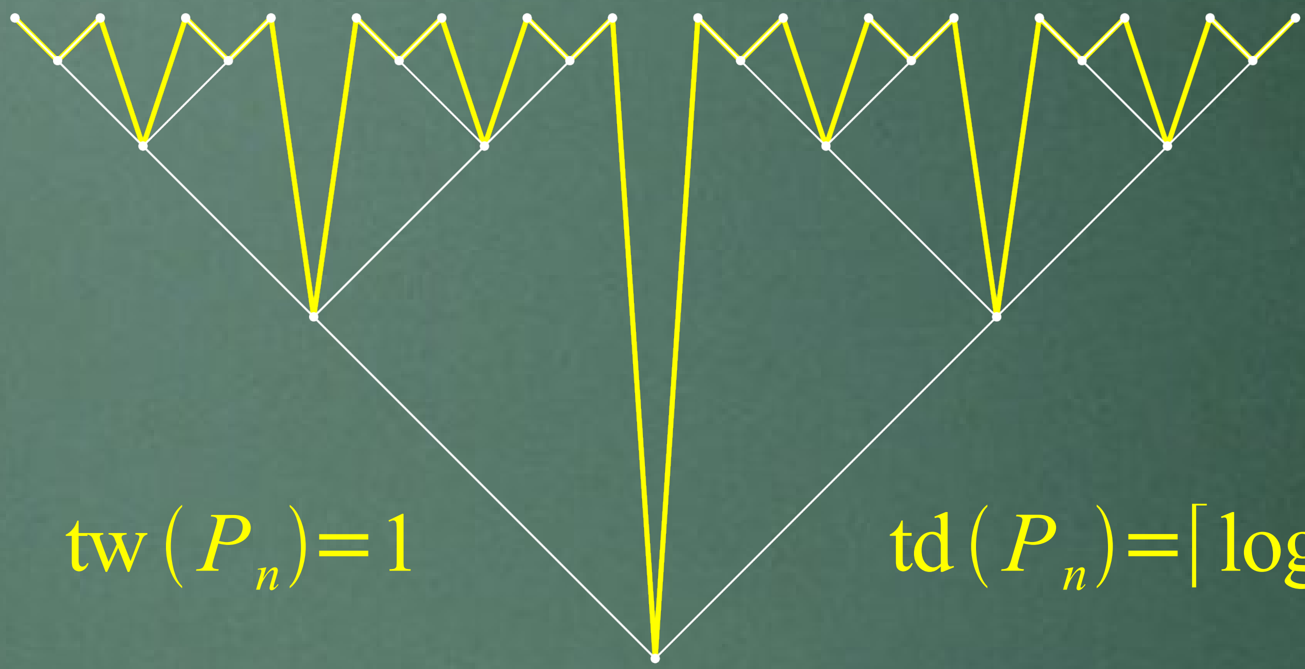
$$5\geq \mathrm{td}(Grid_{3,3})$$

Tree-depth

$$\mathrm{td}(G) = \min\left\{\mathrm{height}(T) : G \subseteq \mathrm{clos}(T)\right\}$$

Tree-depth

$$\mathrm{td}(G) = \min \{\mathrm{height}(T) : G \subseteq \mathrm{clos}(T)\}$$



$\mathrm{tw}(P_n) = 1$

$\mathrm{td}(P_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

$$\mathrm{tw}(G) + 1 \leq \mathrm{td}(G) \leq \mathrm{tw}(G)\ \log n$$

Plan

- Partitions régulières
  - Le Tree-depth d'un graphe
  - Tree-depth borné
  - Nombres chromatiques
  - Coloring numbers généralisés
- Graphes épars
- Applications

Tree-depth borné

La classe des graphes ayant un tree-depth au plus k a un certain nombre de propriétés:

- Elle est fermée par mineurs (P_{2^k} est un mineur exclu),
- Elle ne contiens qu'un nombre fini de classes d'équivalence pour l'homomorphisme,
- etc.

$\Rightarrow$ ressemble à une *classe finie* de graphes.

Plan

- Partitions régulières
  - Le Tree-depth d'un graphe
  - Tree-depth borné
  - Nombres Chromatiques
  - Coloring numbers généralisés
- Graphes épars
- Applications

Nombres Chromatiques

Le nombre chromatique $\chi_p(G)$ est le plus petit entier N tel que G ait une N-coloration dans laquelle tout ensemble de $i \leq p$ couleurs induit un sous-graphe de tree-depth au plus i.

$\rightarrow \chi_1(G) = \chi(G)$

$\rightarrow \chi_2(G)$: deux couleurs induisent une forêt d'étoiles

Nombres chromatiques

- tree-width
  - 2 coleurs induisent une forêt [Borodin '79]
  - Décompositions de faible tree-width [DeVos, Ding, Oporowski, Sanders, Reed, Seymour, Vertigan '04]
- tree-depth
  - 2 couleurs induisent une forêt d'étoiles [Alon, McDiarmid, Reed '72]
  - Décompositions de faible tree-depth

Nombres chromatiques

Le nombre chromatique $\chi_p(G)$ est le plus petit entier N tel que G ait une N-coloration dans laquelle tout ensemble de $i \leq p$ couleurs induit un sous-graphe de tree-depth au plus i.

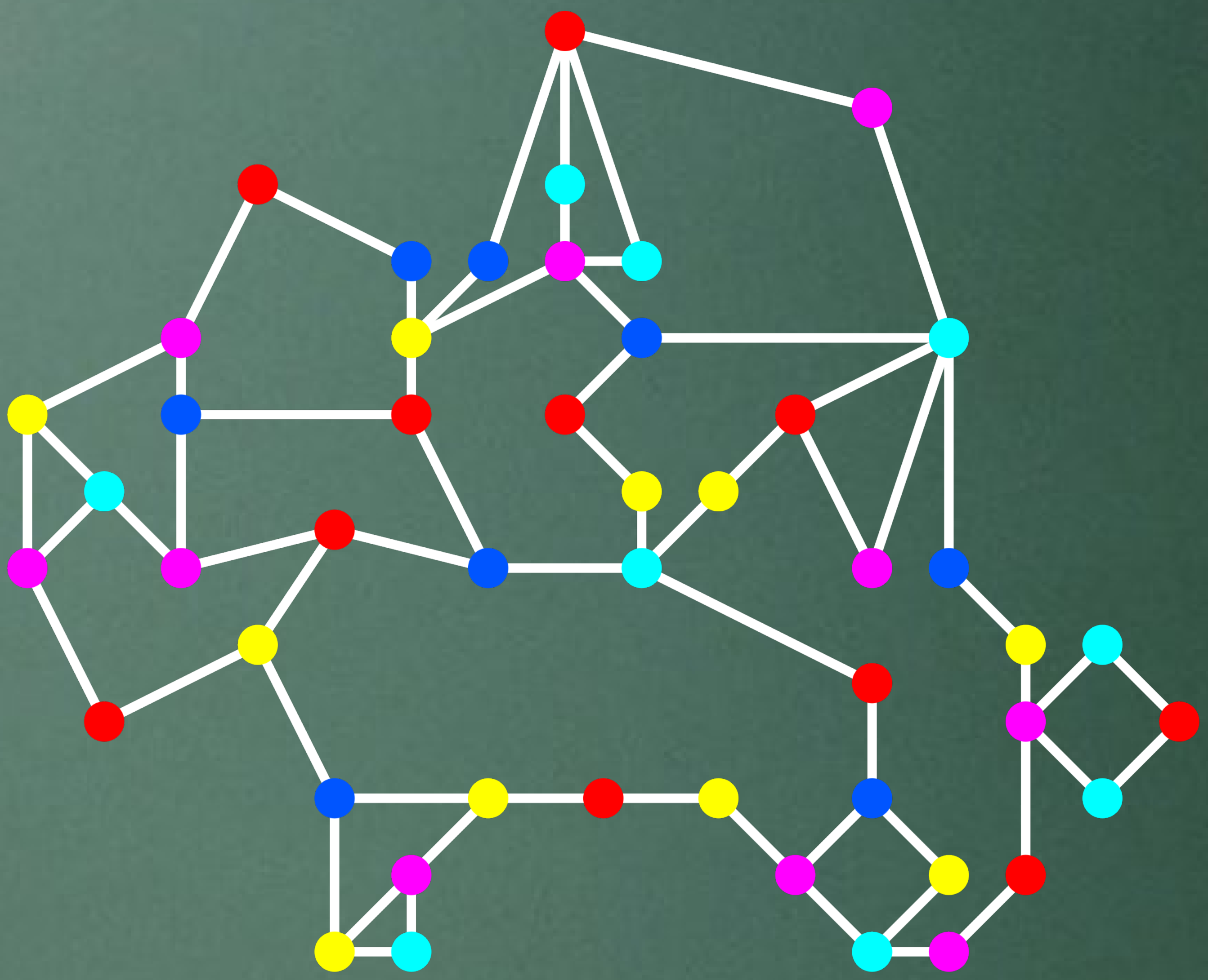
→ $\chi_1(G) = \chi(G)$

→ $\chi_2(G)$: deux couleurs induisent une forêt d'étoiles

$$\chi(G)=\chi_1(G)\leq\chi_2(H)\leq\cdots\leq\chi_\infty(G)=\mathrm{td}(G)$$

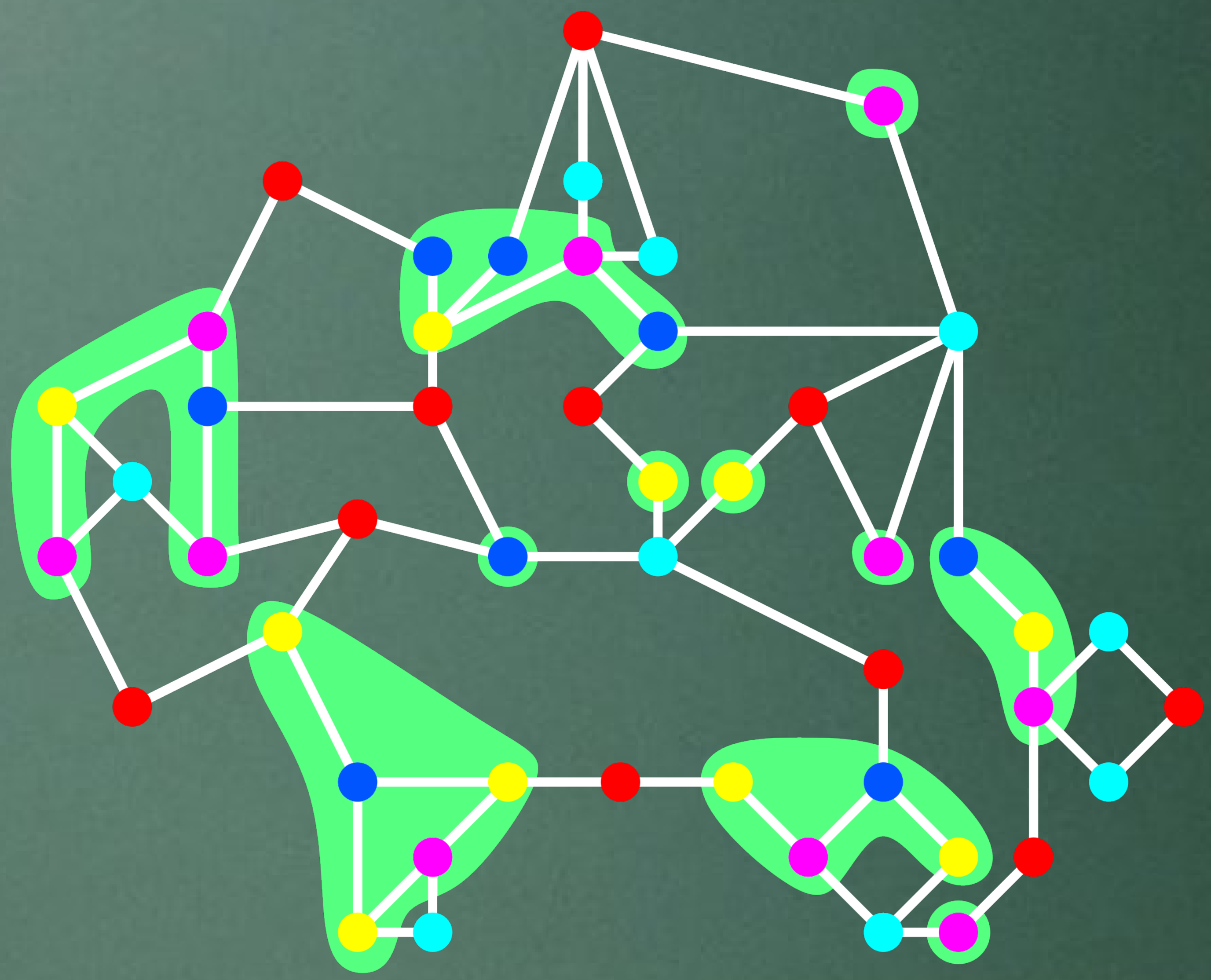
Nombres chromatiques

χ_3



Nombres chromatiques

χ_3



Plan

- Partitions régulières
  - Le Tree-depth d'un graphe
  - Tree-depth borné
  - Nombres chromatiques
  - Coloring numbers généralisés
- Graphes épars
- Applications

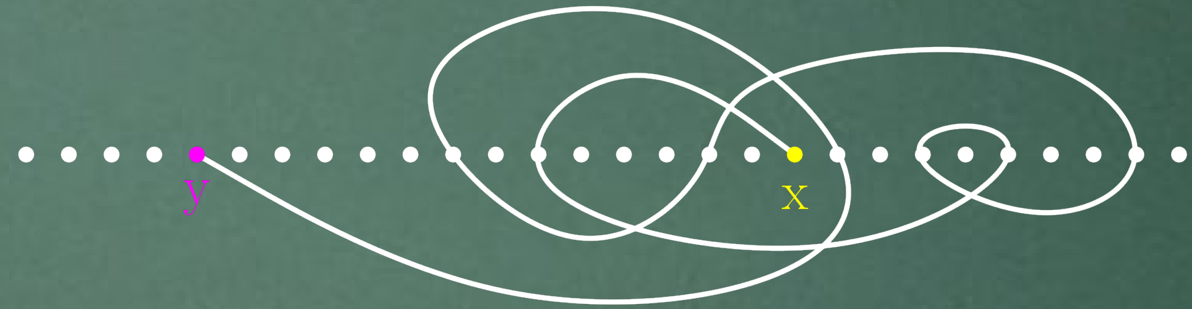
Coloring numbers généralisés

- Introduits par [Kierstead, Yang '03]

Considerons un ordre linéaire $<$ sur les sommets

$N_{k,<}(x) = |\{y:\ \exists x-y \text{ path } P, \|P\| \leq k \text{ et } \min P = y\}|$

$\mathrm{wcol}_k(G) = 1 + \min_< \max_x N_{k,<}(x)$



Coloring numbers généralisés

- Introduits par [Kierstead, Yang '03]

Considerons un ordre linéaire $<$ sur les sommets

$$N_{k,<}(x) = |\{y : \exists x-y \text{ path } P, \|P\| \leq k \text{ et } \min P = y\}|$$

$$\mathrm{wcol}_k(G) = 1 + \min_< \max_x N_{k,<}(x)$$

$$\mathrm{wcol}_1(G) \leq \mathrm{wcol}_2(H) \leq \cdots \leq \mathrm{wcol}_\infty(G) = \mathrm{td}(G)$$

Coloring numbers généralisés

- Introduits par [Kierstead, Yang '03]

Considerons un ordre linéaire $<$ sur les sommets

$$N_{k,<}(x) = |\{y : \exists x-y \text{ path } P, \|P\| \le k \text{ et } \min P = y\}|$$

$$\mathrm{wcol}_k(G) = 1 + \min_< \max_x N_{k,<}(x)$$

$$\mathrm{wcol}_1(G) \le \mathrm{wcol}_2(H) \le \cdots \le \mathrm{wcol}_\infty(G) = \mathrm{td}(G)$$

$$\chi_p(G) \le f_p(\mathrm{wcol}_{2^{p-1}}(G))$$ [Zhu '07]

Plan

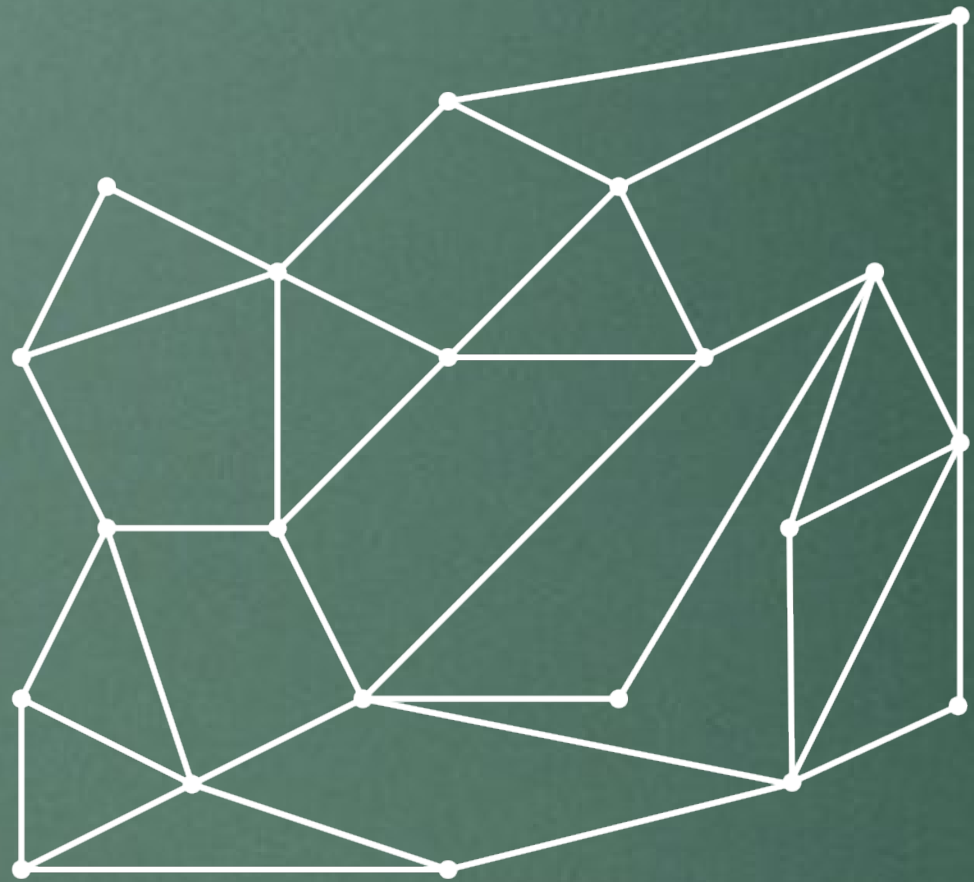
- Partitions régulières
- Graphes épars
- Applications

Plan

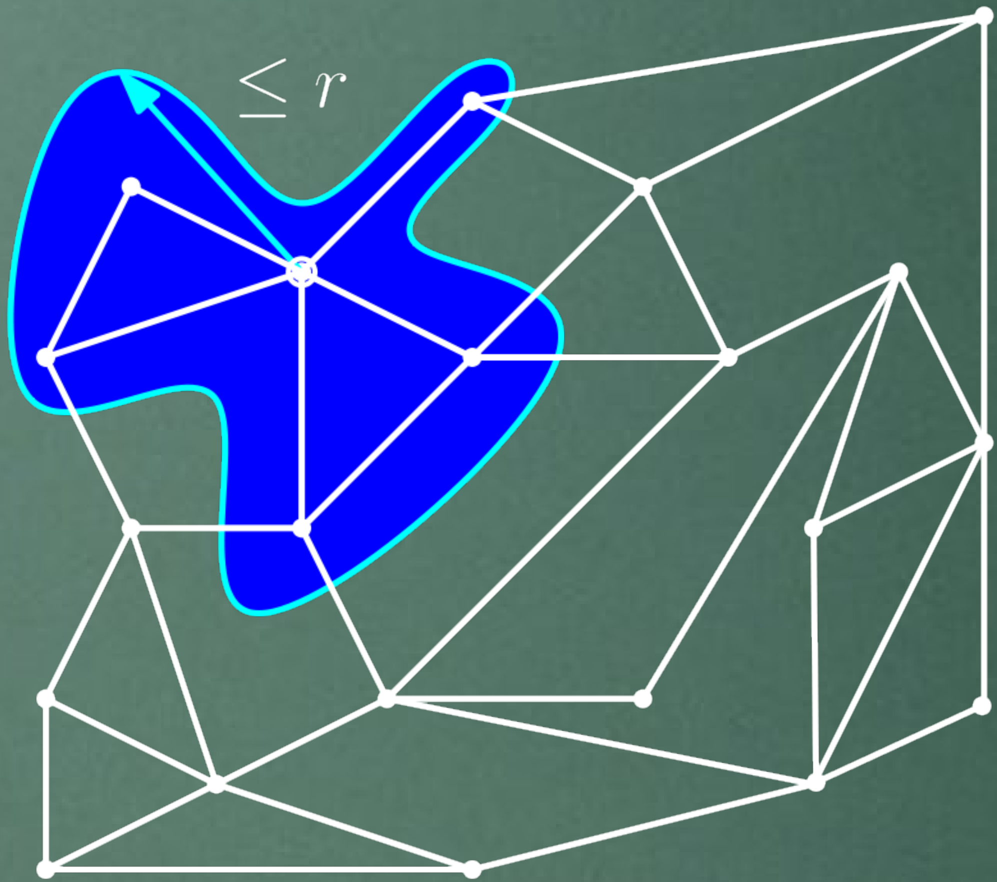
- Partitions régulières
- Graphes épars
  - Le grad d'un graphe
  - La version “subdivision”
  - Augmentation transitive fraternelle
  - Classes d'expansion bornée
- Applications

Le grad d'un graphe

G

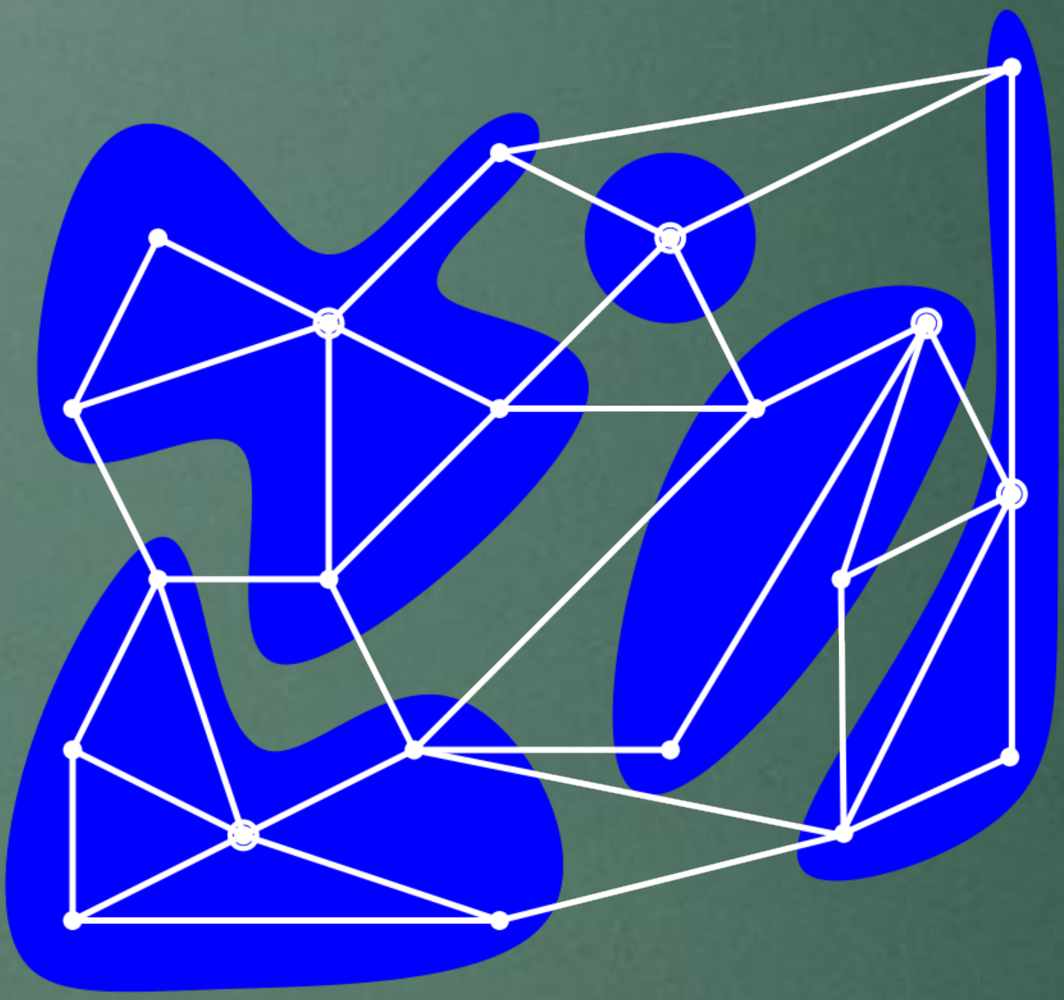


Le grad d'un graphe

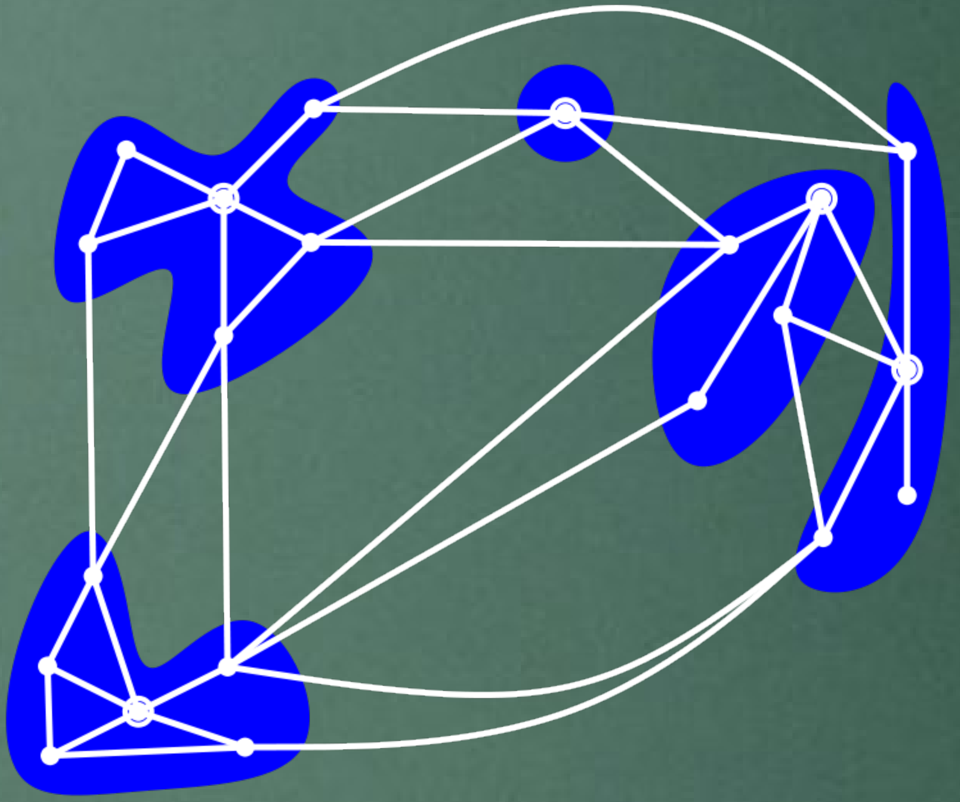


Le grad d'un graphe

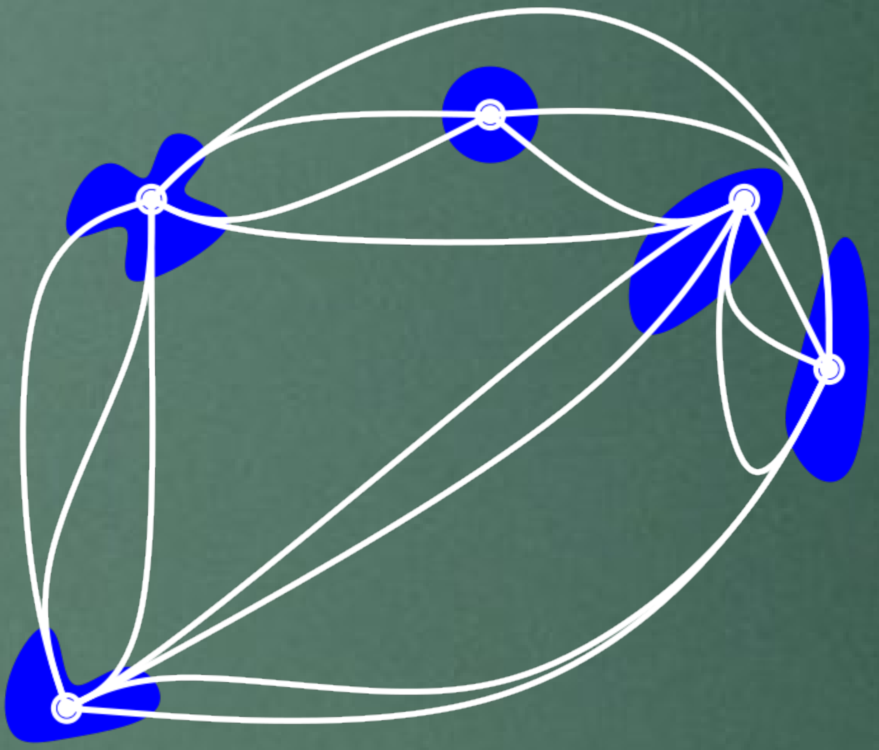
$\rho(\mathcal{P}) \leq r$



Le grad d'un graphe

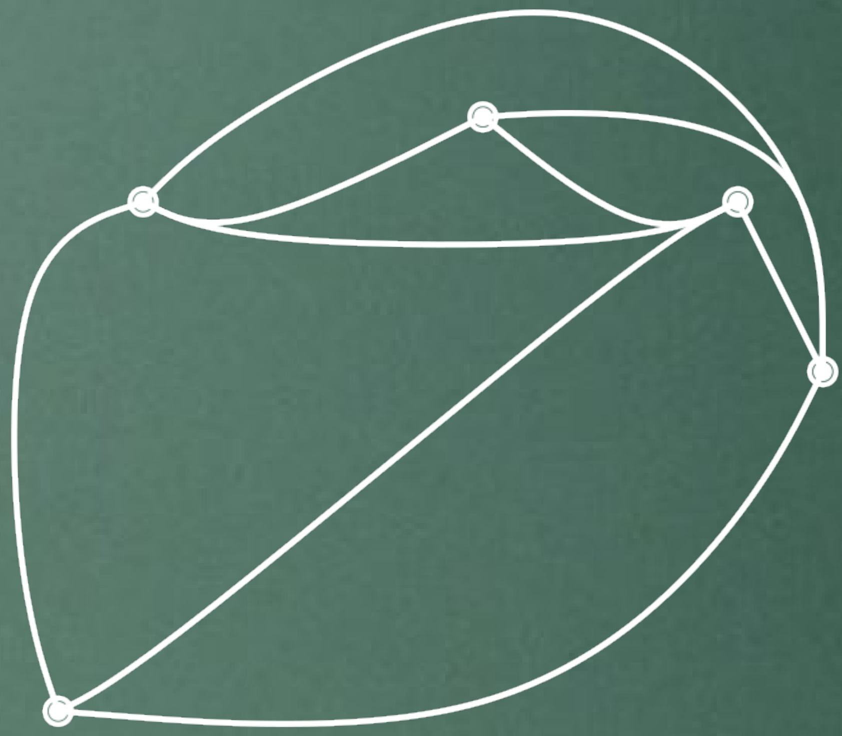


Le grad d'un graphe



Le grad d'un graphe

G / $\mathcal{P}$



Le grad d'un graphe

$$\nabla_r(G) = \max_{\rho(\mathcal{P}) \leq r} \frac{|E(G/\mathcal{P})|}{|V(G/\mathcal{P})|}$$

$$\max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \nabla_0(G) \leq \nabla_1(G) \leq \cdots \leq \nabla(G) = \max_{H \leq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$$

Le grad d'un graphe

$$\nabla_r(G) = \max_{\rho(\mathcal{P}) \leq r} \frac{|E(G/\mathcal{P})|}{|V(G/\mathcal{P})|}$$

$$\max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \nabla_0(G) \leq \nabla_1(G) \leq \cdots \leq \nabla(G) = \max_{H \leq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$$

$$\chi(G) \leq 2\nabla_0(G) + 1 \qquad \eta(G) \leq 2\nabla(G) + 1$$

Autres Propriétés

$$\nabla_r(G/*) \leq \nabla_{2r+1}(G)$$

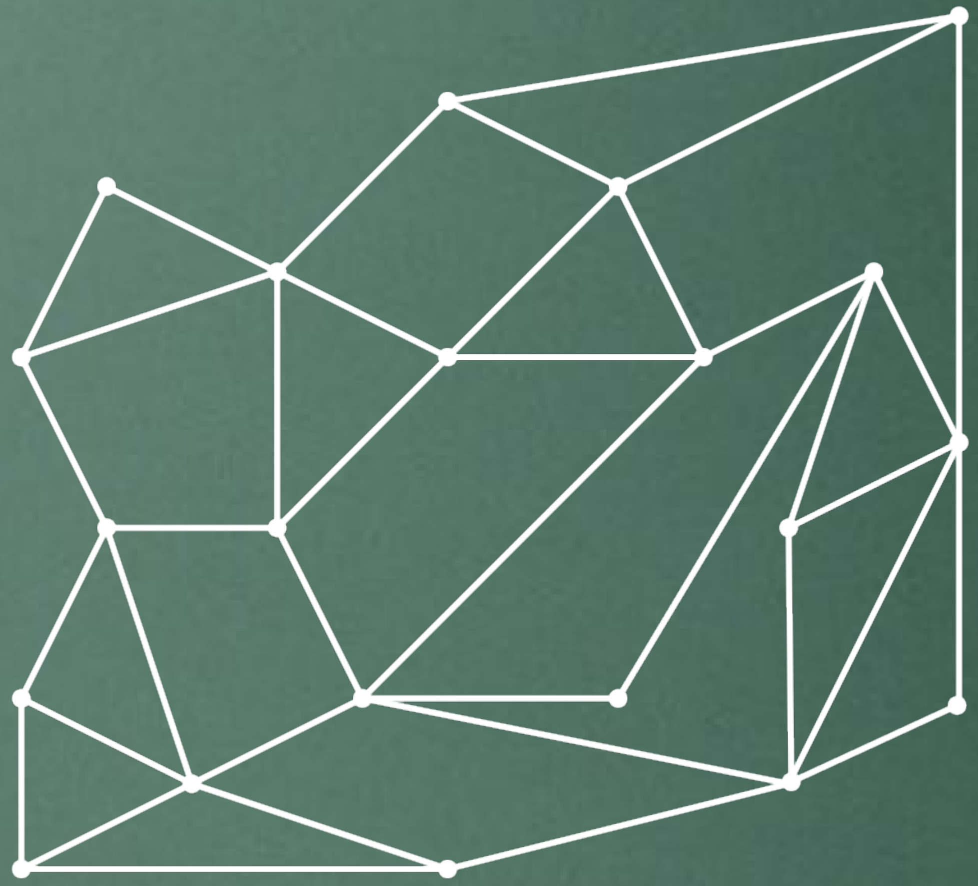
$$\nabla_r(G \bullet K_2) \leq F_r(\nabla_r(G))$$

Plan

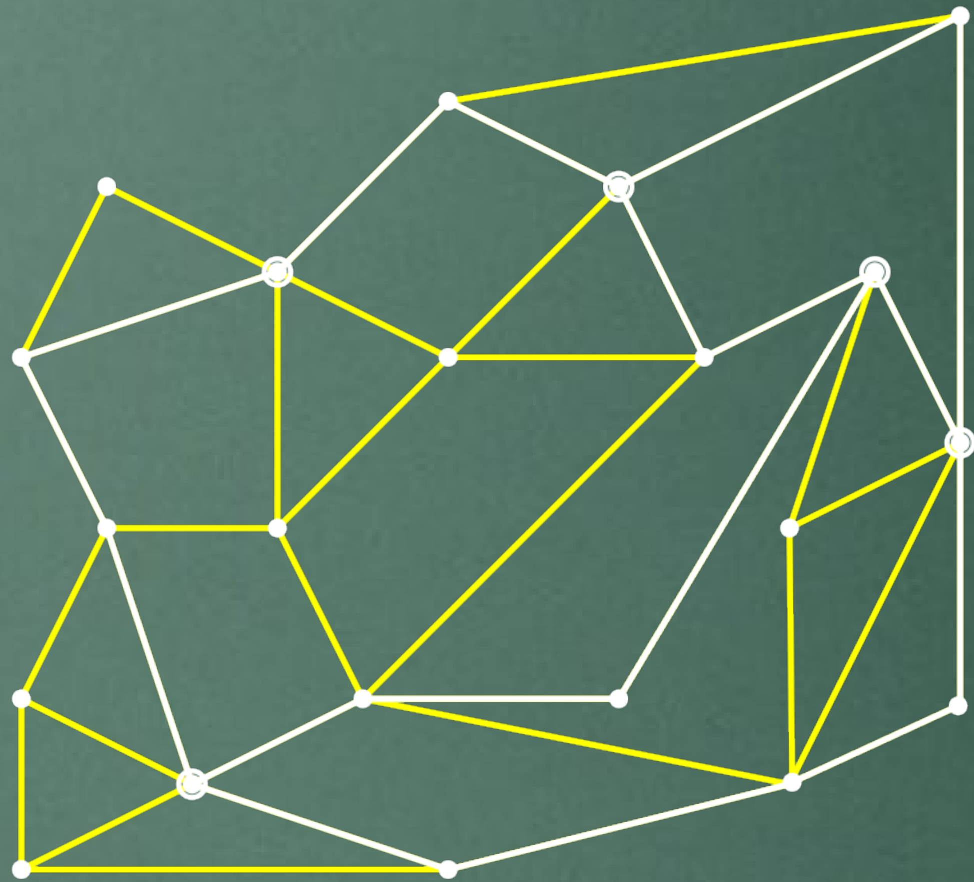
- Partitions régulières
- Graphes épars
  - Le grad d'un graphe
  - La version “subdivision”
  - Augmentation transitive fraternelle
  - Classes d'expansion bornée
- Applications

La version “subdivision”

G



La version “subdivision”

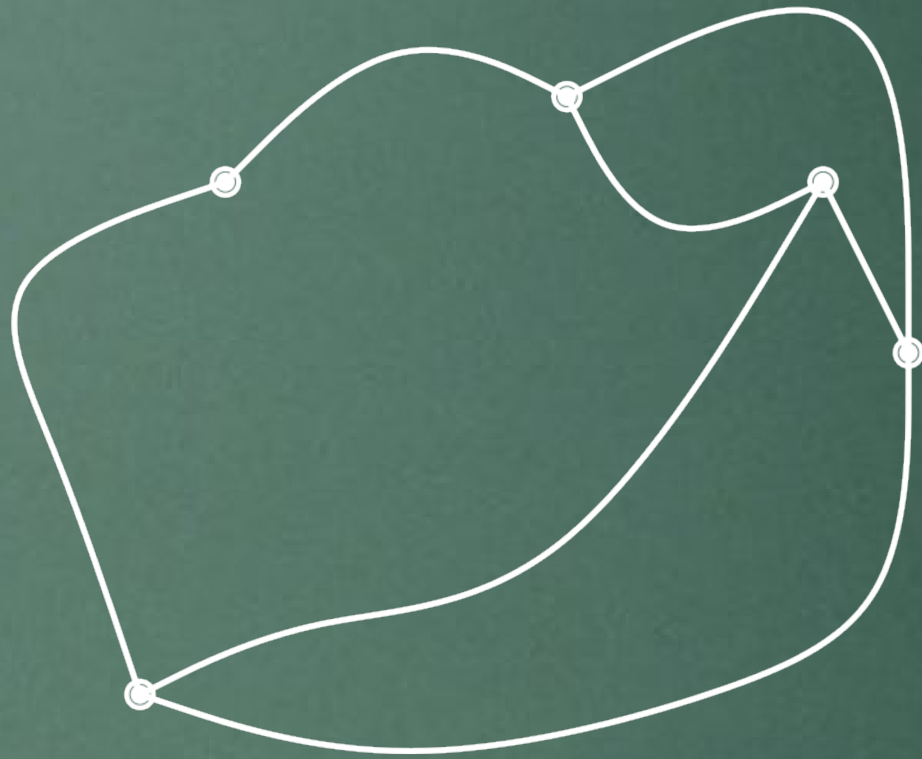


La version “subdivision”

$\leq 2r$

La version “subdivision”

H



La version “subdivision”

$$\tilde{\nabla}_r(G) = \max_{H : \exists G' \in \mathrm{Sd}_{\leq 2\mathrm{r}}(H),\, G' \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$$

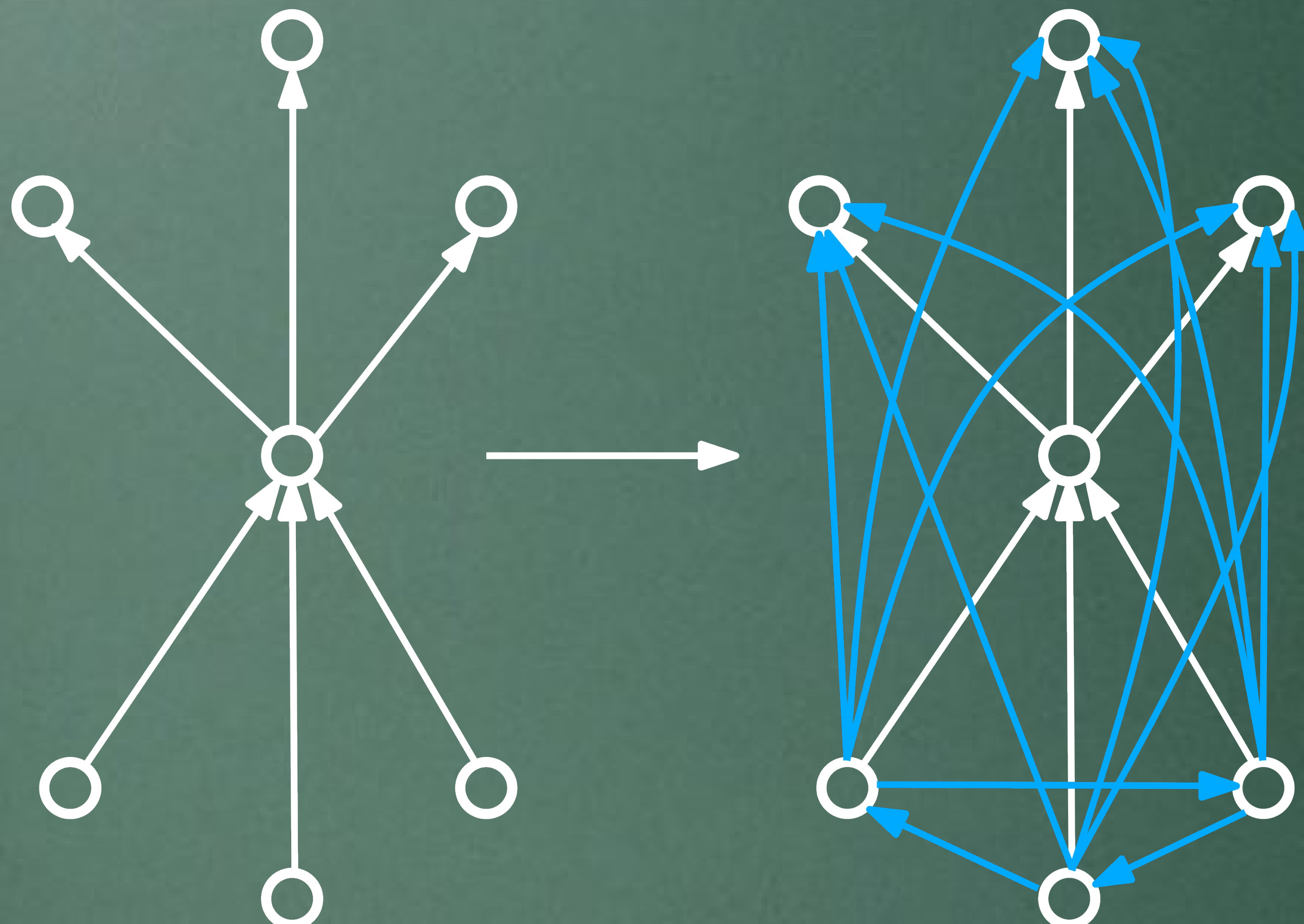
$$\frac{1}{4}\left(\frac{\nabla_r(G)}{4}\right)^{\frac{1}{(r+1)^2}} \leq \tilde{\nabla}_r(G) \leq \nabla_r(G)$$

[Dvořák '07]

Plan

- Partitions régulières
- Graphes épars
  - Le grad d'un graphe
  - La version “subdivision”
  - Augmentation transitive fraternelle
  - Classes d'expansion bornée
- Applications

Augmentation transitive fraternelle



Augmentation transitive fraternelle

Si H est obtenu de *G* par *p* log *p* augmentations transitives fraternelles, alors : $\chi_p(G) \leq \chi(H) \leq 2\nabla_0(H)+1$

Augmentation transitive fraternelle

Tout graphe G a un augmentation transitive fraternelle H telle que :

$$\Delta^{-}(H) \leq f(\Delta^{-}(G), \nabla_1(G))$$

$$\nabla_r(H) = g_r(\Delta^{-}(G), \nabla_{2r+1}(G))$$

Nombres chromatiques et grads

$$
\begin{tikzcd}
\chi(G) < A_1 & \nabla_0(G) < B_0 \quad (\textbf{degeneré}) \arrow[l] \\
\chi_2(G) < A_2 \arrow[u] \arrow[ur] & \nabla_1(G) < B_1 \arrow[u] \arrow[l] \\
\chi_p(G) < A_p \arrow[u] & \nabla_p(G) < B_p \arrow[u] \\
\chi_{2p+2}(G) < A_{2\mathrm{p}+2} \arrow[u] \arrow[ur] & \nabla_{p^p}(G) < B_{p^p} \arrow[u] \arrow[ul] \\
\chi_r(G) < g(r) \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \nabla_r(G) < f(r) \arrow[u] \\
\mathrm{td}(G) < A \arrow[u] \arrow[r] & \nabla(G) < B \quad (\textbf{fermée par mineur}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Plan

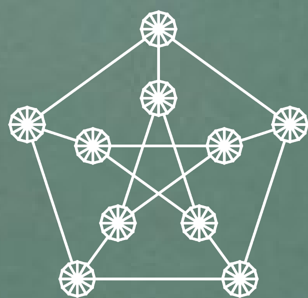
- Partitions régulières
- Graphes épars
  - Le grad d'un graphe
  - La version “subdivision”
  - Augmentation transitive fraternelle
  - Classes d'expansion bornée
- Applications

Expansion bornée

$\mathcal{C}$ a <u>une expansion bornée</u> si

$$\forall r\,,\quad \sup_{G\in\mathcal{C}} \nabla_r(G) < \infty$$

Classes d'expansion bornée

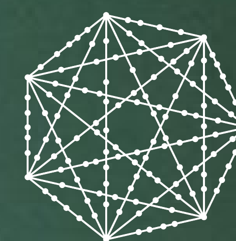


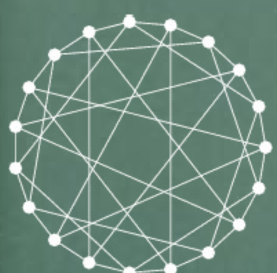
k-degénéré

Expansion bornée

Sans subdivisions de K_k

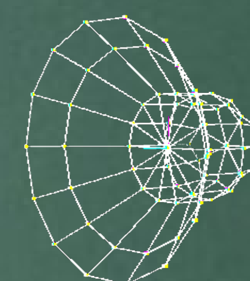
Cliques très subdivisées





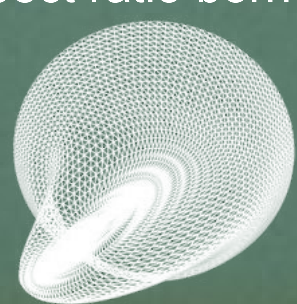
Degré borné

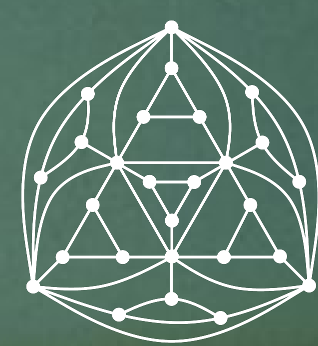
Sans mineurs K_k



Maillages d-dimensionels d'aspect ratio borné

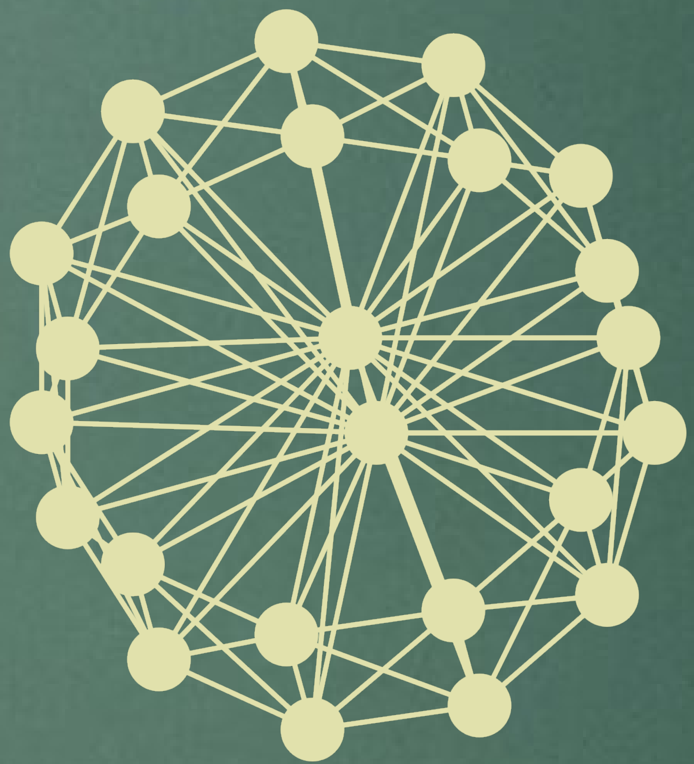
Planaire





Exemple de classe

$$\mathcal{C} = \{ G : \exists H \ planaire\ t.q.\ G \subseteq H \bullet K_2 \}$$



Aspects

$\mathcal{C}$ a une expansion bornée

$$\Leftrightarrow \forall r, \quad \sup_{G\in\mathcal{C}} \nabla_r(G) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \exists F : \mathbb{N}\to\mathbb{N}, \quad \forall G\in\mathcal{C}, \quad \exists \text{T.F.A.}$$
$$G \approx \vec{G}_0 \subseteq \vec{G}_1 \subseteq \cdots \subseteq \vec{G}_i \subseteq \cdots \quad \text{s.t. } \Delta^-(\vec{G}_i) < F(i)$$

$$\Leftrightarrow \forall p, \quad \sup_{G\in\mathcal{C}} \chi_p(G) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \forall k, \quad \sup_{G\in\mathcal{C}} \operatorname{wcol}_k(G) < \infty$$ [Zhu '07]

$$\Leftrightarrow \forall r, \quad \sup_{G\in\mathcal{C}} \tilde{\nabla}_r(G) < \infty$$ [Dvořák '07]

Plan

- Partitions régulières
- Graphes épars
- Applications

Plan

- Partitions régulières
- Graphes épars
- Applications
  - Fixed Parameter Complexity
  - Approximation de graphes et propriétés du premier ordre
  - Dualités restreintes

Fixed Parameter Complexity

- Algorithmes en temps $O(f(k, \nabla_{k^k}(G))\, n)$
  - Décomposition de faible tree-depth
  - Comptage des isomorphes d'un graphe fixé
  - Énumération des ensembles dominants de taille au plus *k*

Comptage des isomorphes de F

- Temps linéaire pour G de genre borné et F fixé [Eppstein '00].
- Temps $2^{O(w \log w)}$ pour G fourni avec une décomposition arborescente de largeur au plus w et F d'ordre au plus w [Eppstein '99].

Comptage des isomorphes de F

- $k = |V(F)|$
- Trouver une partition en $F(k, \nabla_{k^k}(G))$ parties telle que p classes quelconques induisent un sous-graphe de tree-depth au plus p.
- Pour chaque sous-graphe G_I avec $|I| \leq p$ calculer $\mathrm{count}(G_I)$.
- Inclusion/exclusion

Calculer hom(F,·)

- Pour calculer hom(F,G) pour un graphe F fixé, décomposer en $F \to^{s} F' \to^{i} G$ et réduire au comptage des isomorphes des graphes dans une famille finie.

Ensembles dominants

Tester l'existence d'un ensemble dominant de tailler au plus k dans un graphe d'ordre n:

- Temps $O(c^{\sqrt{k}}\, n)$ pour les graphes planaires [Alber, Bodlaender, Fernau, Niedermeier '00].
- Temps $O((4g+40)^k\, n^2)$ pour les graphes de genre g [Ellis, Fan, Fellows '04].

Ensembles dominants

- Si H a un tree-depth d'au plus t alors H a au plus $k!\,t^k$ ensembles dominants de taille au plus k.

$\Rightarrow$ Partitionner G en $N = F(k, \nabla_{k^k}(G))$ classes et vérifier les $\binom{N}{k} k!\,k^k$ ensembles candidats.

Plan

- Partitions régulières
- Graphes épars
- Applications
  - Fixed Parameter Complexity
  - Approximation de graphes et propriétés du premier ordre
  - Dualités restreintes

Approximation de graphes

- Pour tout graphe G et pour tout entier n, il existe des graphes G' et G_0, tels que:

$$G \rightleftarrows G' \equiv^n G_0$$

et

$$|G_0| \leq f(n)$$ [B. Rossman '07]

De plus, G_0 peut être construit en temps

$$O(g(n, \nabla_{n^n}(G))\,|G|)$$

Propriétés du premier ordre

Pour toute classe $\mathcal{C}$ d'expansion bornée et pour tout propriété P du premier ordre, tester P sur les graphes de $\mathcal{C}$ peut-il être effectué en temps linéaire?

Plan

- Partitions régulières
- Graphes épars
- Applications
  - Fixed Parameter Complexity
  - Approximation de graphes et propriétés du premier ordre
  - Dualités restreintes

Dualités

- Dualités d'homomorphismes

$$\forall G: \quad (F \nrightarrow G) \Leftrightarrow (G \rightarrow D_F)$$

existent seulement pour les arbres

[Nešetřil, Tardif '00]

$\Rightarrow$ considérer une version restreinte.

Dualités restreintes

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'expansion bornée.

Pour tout graphe F il existe un graphe $D_{\mathcal{C}}(F)$, tel que :

$$F \nrightarrow D_{\mathcal{C}}(F)$$

et

$$\forall G \in \mathcal{C} : \quad (F \nrightarrow G) \Leftrightarrow (G \rightarrow D_{\mathcal{C}}(F))$$

Dualités restreintes

Exemple:

Il existe un graphe U, 3-coloriable et sans triangles, tel que tout graphe planaire sans triangles ait un homomorphsime vers U.

Autres Applications

- Séparateurs
- Nombre de Ramsey
- Graphes extrémaux sans P_k induits

Séparateurs

- Si une classe de graphes a une expansion polynomiale, en O(n^k), alors les graphes de la classes ont des séparateurs de taille au plus $C(n\log n)^{1-\frac{1}{2k+2}}$ de [Plotkin, Rao, Smith '94]
- Si une classe de graphe a une expansion sub-exponentielle, alors les graphes de la classe ont des séparateurs de taille sous-linéaire.

Séparateurs

- Si les graphes d'une classe héréditaire ont des séparateurs de taille $o(n/\log(n))$, alors la classe a une expansion sous-exponentielle. [Dvořák '07]

Autres applications

- Séparateurs
- Nombre de Ramsey
- Graphes extrémaux sans P_k induits

Nombre de Ramsey

- En utilisant [Graham, Rödl, Ruciński '00] et une characterisation des graphes arrangeables, nous obtenons la borner suivante pour le nombre de Ramsey d'un graphe G d'ordre n:

$$\log\left|\frac{\mathrm{r}(G)}{n}\right| = O(\nabla_0(G)\nabla_1(G)\log(\nabla_1(G))^2)$$

Autres applications

- Séparateurs
- Nombre de Ramsey
- Graphes extrémaux sans P_k induits

Graphes sans P_k induits

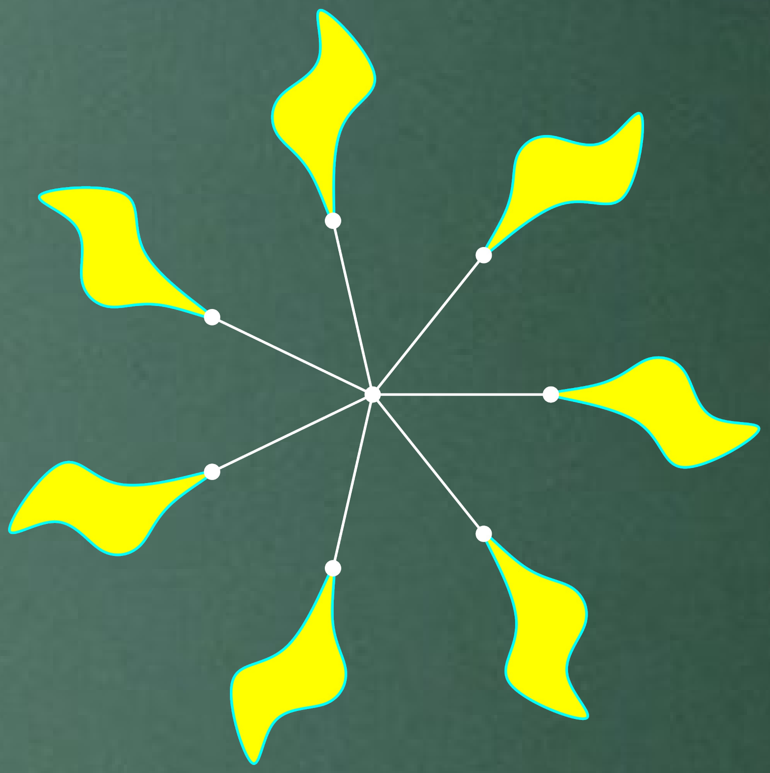
- Le nombre maximal d'arêtes $\mathrm{ex}^*(\Delta; H)$ d'un graphe de degré maximum Δ sans sous-graphe induit isomorphe à un graphe H fixé est fini si et seulement si H est une union disjointe de chaînes [Chung, West '96]

Graphes sans P_k induits

Complément d'un graphe asymétrique sans triangles

$\Downarrow$

Pas de P_5 induit



dense

symétrique

Graphes sans P_k induits

- Pour tout C>0, il n'existe qu'un nombre fini de graphes G sans P_k induits n'ayant aucun automorphisme involutif et tels que $\nabla_0(G) \leq C$.

References (actes)

- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. The grad of a graph and classes with bounded expansion. In André Raspaud and Olivier Delmas, editors, 7th **International Colloquium on Graph Theory**, volume 22 of Electronic Notes in Discrete Mathematics, pages 101–106. Elsevier, 2005.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Linear time low tree-width partitions and algorithmic consequences. In **STOC'06**. Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 391–400. ACM Press, 2006.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Fraternal augmentations of graphs, coloration and minors. In Proceedings of the Sixth **Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications**, volume 28 of Electronic Notes in Discrete Mathematics, pages 223–230, 2007.

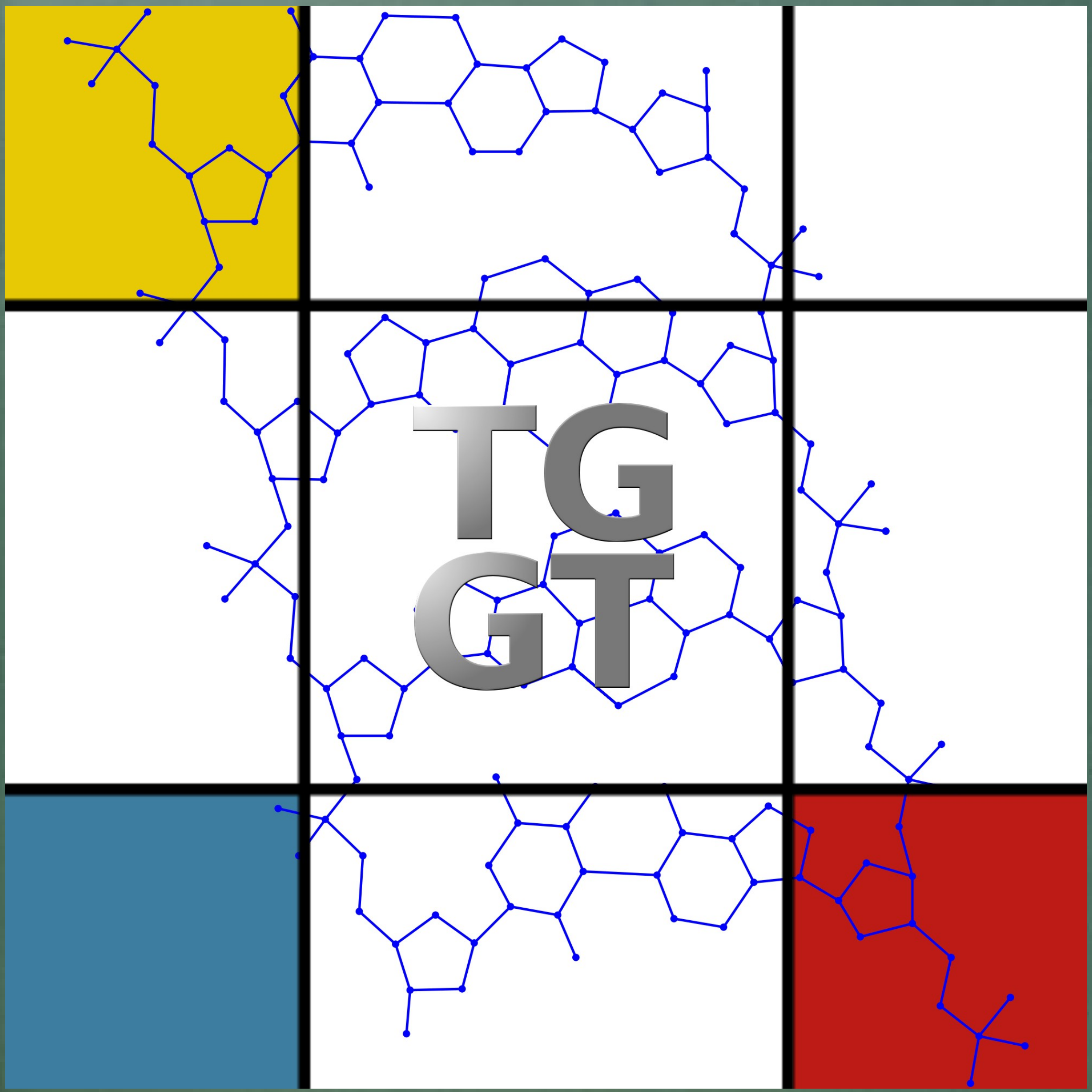
References (articles)

- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Colorings and homomorphisms of minor closed classes. In B. Aronov, S. Basu, J. Pach, and M. Sharir, editors, The Goodman-Pollack Festschrift, volume 25 of Algorithms and Combinatorics, pages 651–664. Discrete & Computational Geometry, 2003.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Tree depth, subgraph coloring and homomorphism bounds. European Journal of Combinatorics, 27(6):1022–1041, 2006.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion I. decompositions. European Journal of Combinatorics, 2007.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion II. algorithmic aspects. European Journal of Combinatorics, 2007.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion III. restricted dualities. European Journal of Combinatorics, to appear.
- J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Induced matchings and induced paths in graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, submitted.

Conclusion

Merci.

Topological & Geometric Graph Theory



19-23 May 2008
Paris

http://tggt.cams.ehess.fr

Plan

- Partitions régulières
  - Tree-depth, Bounded Tree-depth,Chromatic Numbers, Generalized Coloring Numbers
- Graphes épars
  - Grad, Subdivision version, Transitive Fraternal Augmentation, Chromatic Numbers and Grads, Bounded Expansion
- Applications
  - Fixed Parameter Algorithms (Isomorphs, Local Properties, Dominating Set), First Order, Restricted Dualities
  - Separators, Ramsey, Induced Pk-free
- References, TGGT