Algèbre linéaire élémentaire

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

Définition 1 *Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est un ensemble dont les éléments sont appelés* ***vecteurs*** *et qui est muni de deux lois de compositions : une addition interne associative, commutative, qui possède un élément neutre 0 et telle que tout vecteur x possède un inverse $-x$, et enfin, une multiplication par un* ***scalaire*** *($\alpha \in \mathbb{K}$) possédant les propriétés suivantes $\forall (x, y) \in E$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$:*

- *Commutativité de + : $x + y = y + x$*
- *Elément neutre de + : $x + 0 = x$*
- *Inverse d'un vecteur : $x - x = 0$*
- *Distributivité sur l'addition vectorielle : $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$*
- *Distributivité sur l'addition scalaire : $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$*
- *Associativité : $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$*
- *Elémént absorbant et élément neutre : $0x = 0$ et $1x = x$*

Définition 2 *Une famille $\{x_i\}$ de vecteurs de E est un* ***système générateur*** *si pour tout vecteur $x \in E$ il existe une famille de scalaires $\alpha_i \in \mathbb{K}$ telle que $x = \sum_i \alpha_i x_i$. Le symbole i est un symbole d'indexation.*

Définition 3 *Une famille $\{x_i\}$ de vecteurs de E est un* ***système libre*** *si toute combinaison linéaire nulle $0 = \sum_i \alpha_i x_i$ implique que $\alpha_i = 0 \ \forall i$. On dit également que les vecteurs x_i sont linéairement indépendants.*

Définition 4 *Une famille libre et génératrice est appelée* ***base*** *de E. Si E possède une base finie $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors toutes les bases de E sont finies avec le même nombre d'éléments et E est dit de dimension finie. On note alors $dim(E) = n$. Comme une base est une famille génératrice, pour tout vecteur x de E on peut écrire $x = \sum_i \alpha_i x_i$. Cette décomposition est unique et α_i est appelée la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x sur la base $\{x_i\}$.*

Définition 5 *Un* ***sous-espace vectoriel*** *F est un sous-ensemble de E ayant lui aussi une structure d'espace vectoriel pour les opérations de E.*

Définition 6 *Le sous-espace vectoriel $F \subset E$ est* ***engendré*** *par la famille $\{x_i\}$ si tout vecteur de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire des x_i. On note $F = Vect(x_i)$.*

1.2 Exemple

L'ensemble $E = \mathbb{R}^3$ muni de l'addition :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

et de la multiplication :

$$\alpha \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \alpha\alpha_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Sa **base canonique** est le triplet :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Mais tout triplet de vecteurs linéairement indépendants constitue une base de E. Par exemple :

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

L'espace vectoriel F engendré par (f_1, f_3) est :

$$F = Vect(f_1, f_3) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\; tel \; que \;\; \exists(\alpha, \beta)/x = \alpha f_1 + \beta f_3 \right\} \qquad (5)$$

Tout vecteur V de F admet donc un couple de coordonnées dans F et un triplet de coordonnées si on le considère comme un vecteur de E. Sur l'exemple précédent, le vecteur : $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ a pour coordonnées $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dans la base (f_1, f_3) de F (voir figure 1).

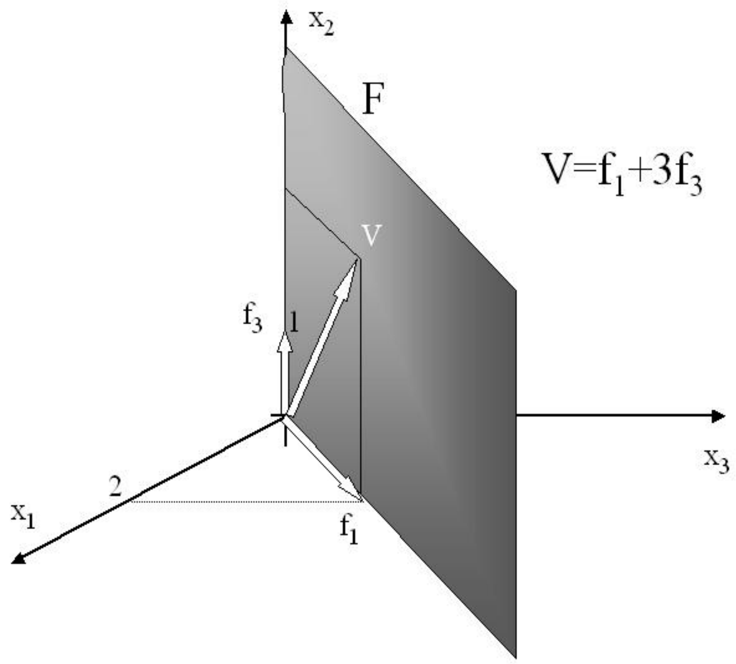

Fig. 1 – Un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

2 Matrices et calcul matriciel

2.1 Première approche : applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension m et n sur $\mathbb{K}$, munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{e_i\}$ et $\mathcal{C} = \{f_j\}$.

Définition 7 *Une application linéaire de E vers F est une application vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall (x, y) \in E \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \ \Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{6}$$

Comme :

$$x = \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i f(e_i) \tag{7}$$

alors on voit qu'il suffit de connaître les coordonnées de x ainsi que les valeurs de l'application f sur la base $\{e_i\}$ pour connaître $f(x)$.

En notant :

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{j=n} a_{j,i} f_j \tag{8}$$

on obtient :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{j=n} a_{j,i} f_j \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i a_{j,i} \right) f_j \tag{9}$$

et en regroupant tous ces coefficients dans une même **matrice** (tableau de dimension $n \times m$) :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \tag{10}$$

on peut alors écrire :

$$f(x) = Mx \tag{11}$$

qui représente l'expression des coordonnées de $f(x)$ en fonction des coordonnées de x et de la matrice M.

Dans la base $\{f_j\}$, la $j^{ème}$ coordonnée de $f(x)$ s'écrit donc :

$$\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i a_{j,i} \tag{12}$$

qui correspond bien au produit de la $j^{ème}$ ligne de la matrice M avec le vecteur x.

La matrice M représente l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

2.2 Deuxième approche : changements de base

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, muni des 2 bases $\mathcal{B} = \{e_i\}$ et $\mathcal{C} = \{f_j\}$. Soit x un vecteur dont les coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ s'écrivent respectivement :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \tag{13}$$

Littéralement, cette notation signifie :

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i = \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j f_j \tag{14}$$

En notant :

$$f_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} e_i \tag{15}$$

et en remplaçant cette expression de f_j dans l'équation (14), on obtient :

$$x = \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} e_i = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} \beta_j a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} \beta_j \right) e_i \tag{16}$$

On a donc :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} \beta_j \tag{17}$$

qui permet d'exprimer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B} = \{e_i\}$ en fonction des coordonnées de x dans la base $\mathcal{C} = \{f_j\}$. En posant :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{18}$$

La $j^{ème}$ colonne de M représente les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

On peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

où M est appelée **matrice de changement de base**.

En appelant $\mathcal{B}$ la première base et $\mathcal{C}$ la nouvelle base, cette équation s'exprime sous la forme :

`On obtient les coordonnées d'un vecteur dans la première base en multipliant les coordonnées de ce vecteur dans la nouvelle base par la matrice exprimant les coordonnées de la nouvelle base dans la première base.`

2.3 Exemple

2.3.1 Application linéaire

Soit $E = \mathbb{C}^2$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni de sa base canonique :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Si $x \in \mathbb{C}^2$ (couple de nombres complexes), on a :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_R + i\alpha_I \\ \beta_R + i\beta_I \end{bmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 \tag{21}$$

L'espace E est donc un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$.

Soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} i\alpha \\ \alpha + i\beta \end{bmatrix} \tag{22}$$

La matrice qui représente f dans la base canonique s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \tag{23}$$

Si maintenant on considère $E = \mathbb{C}^2$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et non plus sur $\mathbb{C}$, la base canonique s'écrit :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \tag{24}$$

Si $x \in \mathbb{C}^2$ (couple de nombres complexes), on a :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_R + i\alpha_I \\ \beta_R + i\beta_I \end{bmatrix} = \alpha_R e_1 + \alpha_I e_2 + \beta_R e_3 + \beta_I e_4 = \begin{bmatrix} \alpha_R \\ \alpha_I \\ \beta_R \\ \beta_I \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{25}$$

E est maintenant un espace de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. Pour déterminer la matrice de l'application linéaire (22), il faut calculer l'image par f de la base canonoque :

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} \quad f(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \quad f(e_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Par exemple, $f(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = -1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$ (voir deuxième colonne de M).

La matrice M qui représente f dans la base canonique s'écrit donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

2.3.2 Changement de base

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ la base :

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

La matrice de changement de base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Soit

$$x = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = 10f_1 + 6f_2 + 8f_3 = \begin{bmatrix} 38 \\ 26 \\ 20 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{30}$$

On a bien :

$$\begin{bmatrix} 38 \\ 26 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{31}$$

2.4 Calcul matriciel

- L'ensemble des matrices de dimensions $m \times n$ à coefficients réels (ou complexes) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{C}$) : on peut les additionner, il existe une matrice nulle, chaque matrice M à un "inverse" pour l'addition (la matrice $-M$), on peut les multiplier par un scalaire.

- La somme $M+N$ des matrices M et N représente l'application linéaire qui est la somme des applications linéaires représentés respectivement par les matrices M et N.

- Le produit d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$ donne une matrice $m \times p$. Ce produit est associatif : $A(BC) = (AB)C$. Ce produit n'est pas commutatif (même dans le cas $m = n = p$. En général :$AB \neq BA$).

- Le produit MN des matrices M et N représente l'application linéaire qui est la composée des applications linéaires représentés respectivement par les matrices M et N.

- $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ *ou* $B = 0$

- Si T est une matrice de dimension $n \times p$ composée des p vecteurs colonnes V_i de dimension $n \times 1$, et si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors : $AT = A\,[V_1\ V_2 \ldots V_p] = [AV_1\ AV_2 \ldots AV_p]$

– Le **rang** d'une matrice M de dimension $m \times n$ est le nombre de **vecteurs colonnes** (de dimension $m \times 1$) de M linéairement indépendants. C'est aussi le nombre de **vecteurs lignes** (de dimension $n \times 1$) de M linéairement indépendants On a donc : $rang(M) \leq min(m, n)$.

– Le rang d'une matrice est invariant si on échange des lignes (ou des colonnes), ou encore si on remplace une ligne (ou une colonne) par une combinaison linéaire de lignes (ou de colonnes).

– L'inverse d'une matrice M de dimension $n \times n$, est la matrice N de dimension $n \times n$ (QUAND ELLE EXISTE !) vérifiant : $MN = NM = \mathbb{I}$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité (1 sur la diagonale 0 ailleurs). On note $N = M^{-1}$.

3 Calcul de déterminants

Le déterminant d'une matrice M de dimension $n \times n$ est un scalaire ($det(M) \in \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). La théorie des déterminants ne sera pas étudiée ici. On se contentera de donner quelques règles sur leur utilisation.

3.1 Calcul pour $n = 2$

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{32}$$

3.2 Calcul pour $n = 3$: première méthode

S'obtient en faisant la somme sur les diagonales $\searrow$ moins la somme sur les diagonales $\nearrow$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = (aek + bfg + cdh) - (gec + hfa + kdb) \tag{33}$$

3.3 Calcul pour $n = 3$: deuxième méthode

En développant selon une ligne (ou une colonne) avec des signes appropriés. Pour chaque élément de cette ligne (ou de cette colonne), on raye la ligne et la colonne de l'élément considéré et on calcule le déterminant qui reste (appelé le **mineur** de cet élément). Exemple : développement selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{34}$$

Exemple : développement selon la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \tag{35}$$

Les signes sont représentés dans le tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \tag{36}$$

3.4 Calcul pour n quelconque

La deuxième méthode présentée pour les déterminants d'ordre 3 est généralisable aux déterminants d'ordre n. Exemple (en développant selon la première colonne) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \tag{37}$$

...et on continue à calculer ceux d'ordre 3...

4 Calcul de l'inverse d'une matrice

L'inverse d'une matrice carrée de dimension $n \times n$ est donnée par la transposée de la matrice des cofacteurs de M divisée par le déterminant de M :

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)} Cofacteur(M)^T \tag{38}$$

La matrice des cofacteurs est une matrice de dimension $n \times n$ obtenue en remplaçant chaque terme de M par le déterminant du mineur de cet élément multiplié par le signe correspondant (voir Calcul de déterminant). Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Autre exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (40)$$