

# Traitement du signal aléatoire

Aucun document autorisé. Durée 1<sup>H00</sup>.

Lisez attentivement les questions qui suivent. Les réponses sont usuellement brèves mais nécessitent des explications. Un résultat donné sans justification ou explication, fût-il juste, ne sera pas considéré. Agissez comme si chaque question était suivie de "pourquoi?" ou bien "expliquez!". Par exemple si vous répondez "oui" à la question "ce signal est il ergodique?" sans expliquer la raison de cette affirmation, cette réponse sera considérée comme erronée.

On veut identifier un système linéaire. On appelle  $f(t)$  sa réponse impulsionnelle (inconnue). Pour réaliser cette identification, on décide d'utiliser une technique basée sur l'utilisation d'une perturbation en entrée du système par un bruit blanc de distribution normale, ergodique au sens large  $x(t)$  centré et de variance  $\sigma_x^2 = 2$ .

On appelle  $e(t)$  le signal d'entrée du système et  $s(t)$  le signal de sortie du système. Rajouter le bruit blanc  $x(t)$  en entrée revient à remplacer le signal original  $e(t)$  par le signal  $e'(t) = e(t) + x(t)$ .

**Question 1.** Rappelez ce que veut dire ergodique au sens large et distribution normale.

**Question 2.** Donnez la densité spectrale de puissance  $\Gamma_{xx}$  du signal  $x$ .

**Question 3.** Soit  $y(t)$  le signal en sortie du système lorsque seul  $x(t)$  est le signal d'entrée, Le signal  $y(t)$  est-il aléatoire? Sa distribution est-elle normale? (*votre réponse n'est pas valable sans explication*)

**Question 4.** Donnez  $m_y$  la moyenne statistique du signal  $y$ . (*votre réponse n'est pas valable sans explication*)

**Question 5.** Expliquez pourquoi  $s'(t)$  la sortie du système lorsqu'il est attaqué en entrée par  $e'(t)$  est égale à  $s(t) + y(t)$ .

**Question 6.** Montrez que la fonction de covariance  $R_{s'x}(\tau) = R_{yx}(\tau)$ .

**Question 7.** Donnez la relation entre  $R_{s'x}(\tau)$  et la réponse impulsionnelle du système.

**Question 8.** Expliquez les avantages de l'utilisation de ce type de technique.

---

**Question 9.** Vous venez d'acheter un accéléromètre. La mesure qu'il produit est bruitée. Comment feriez vous pour montrer que le bruit qu'il ajoute à la mesure est ergodique au premier ordre ?

**Question 10.** On place cet accéléromètre sur un véhicule et on enregistre le signal qui en sort. On réalise ensuite la transformée de Fourier du signal que l'on a enregistré. Est-ce que cette transformée de Fourier est :

- l'addition de la transformée de Fourier du signal non-bruité et de la transformée de Fourier du signal du bruit ?
- une version bruitée de la transformée de Fourier du signal non-bruité ?
- la convolution du bruit avec le signal ?

(n'oubliez pas de justifier votre réponse).

---

Soit le signal  $z(t) = \sin(0.1\pi t)$ .

**Question 11.** Donnez les moyennes statistique et temporelle du signal  $z$ . Ce signal est-il stationnaire d'ordre 1 ? Ergodique d'ordre 1 ?

---

Soit un système discret régi par l'équation récurrente :

$$s_k + 2s_{k-1} - 3s_{k-2} = e_k,$$

où  $e_k$  est la série numérique des entrées et  $s_k$  la série numérique des sorties du système.

**Question 12.** Donnez la transformée en  $z$  de ce système discret. Est-ce un système de type AR ? MA ? ARMA ?

On suppose que l'entrée du système est un signal généré par un processus pseudo-aléatoire centré et dont la fonction d'autocovariance  $R_{ee}(\tau) = 0$  si  $\tau \notin [-1, 1]$ ,  $R_{ee}(0) = 1$ ,  $R_{ee}(1) = 0.2$ .

**Question 13.** Rappelez ce qu'est un processus pseudo-aléatoire.

**Question 14.** Donnez que  $R_{se}(0)$ ,  $R_{se}(1)$  et  $R_{se}(2)$ . Expliquez comment vous avez calculé ces quantités, et sur quelle propriété vous vous êtes appuyé.