Sujet d'examen sur le cours de traitement du signal.
Partie signal aléatoire

Stationnarité, ergodicité.

Un signal aléatoire gaussien θ ergodique d'ordre 2, dont la moyenne est $\mu_\theta = \pi/2$ et l'écart type est $\sigma_\theta = 2$ perturbe de façon non-linéaire la mesure d'un capteur de chaleur. Le signal issus du capteur est de la forme $g(t) = H(t)e^{-3t}\cos(\theta)$, où t est le temps et H(t) l'échelon d'Heaviside.

1• En se rappelant que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 est $\Phi(\omega) = e^{j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$, calculez la moyenne statistique du signal g(t). Ce signal est-il stationnaire d'ordre 1 ?

2• Calculez la moyenne temporelle du signal g(t). Ce signal est-il ergodique d'ordre 1 ?

3• Calculez le moment statistique centré d'ordre deux $M_{gg}(t_1, t_2)$. Le processus est-il stationnaire d'ordre 2 ? Si oui mettez le sous la forme $M_{gg}(\tau)$.

4• Calculez le moment temporel centré d'ordre deux $C_{gg}(\tau)$. Le processus est-il ergodique d'ordre 2 ?

Systèmes linéaires

Soit un système linéaire de réponse impulsionnelle $f(t) = H(t)e^{-3t}$. On place en entrée de ce système un signal aléatoire x(t) ergodique au sens large de moyenne μ et de variance σ^2 dont la densité spectrale de puissance est donnée par :

$\Gamma_{xx}(\omega) = H(\omega + a + \Delta) - H(\omega + a - \Delta) + H(\omega - a + \Delta) - H(\omega - a - \Delta)$ avec $a > \frac{\Delta}{2}$.

y(t) est la sortie du système linéaire.

5• Dessinez la densité spectrale de puissance de x. Superposez à votre dessin un dessin qualitatif de ce que vous pensez être la densité spectrale de puissance de y (changez de couleur et indiquez bien quels sont Γ_{xx} et Γ_{yy}).

6• Donnez les moyennes statistiques et temporelles de y(t). Ce signal est-il aléatoire ?

7• Calculez $R_{xx}(\tau)$, la fonction d'auto-covariance de x.

8• Calculez $R_{yx}(\tau)$, la fonction de covariance de y et x.

Moindres carrés

9• Soient un ensemble de quatre points : $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ et $(4, 3)$. Donnez l'équation matricielle permettant de trouver les coefficients a et b de la droite moindre carrés d'équation paramétrique littérale $ax + by = 1$.

(vous devez donner les matrices A et B telles que $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1}B$).