

## Sujet d'examen sur le cours de traitement du signal. Partie signal aléatoire

Aucun document autorisé, durée conseillée : 1<sup>h00</sup>.

### 1• Stationnarité, ergodicité.

Soit un signal échantillonné  $x$  centré. On note  $x^i(kT) = x_k^i$  le  $k^{\text{ième}}$  échantillon du signal  $x$  obtenu lors de la  $i^{\text{ième}}$  expérience ( $T$  étant la période d'échantillonnage). On dispose de  $p$  expériences ( $i = 1, \dots, p$ ) et pour chaque expérience de  $N$  échantillons ( $k = 1, \dots, N$ ).

1.1• Que veut dire la phrase : "le signal  $x$  est ergodique au sens large" ?

1.2• Donnez une expression permettant de calculer l'auto-corrélation  $C_{xx}(mT)$  pour chaque expérience et l'auto-covariance  $R_{xx}(mT)$  pour chaque échantillon (ou presque) pour  $m = 3$ . **Attention aux bornes des calculs.**

1.3• Donnez l'expression de la moyenne des auto-corrélations  $C_{xx}(3T)$  (sur toutes les expériences) de la moyenne des auto-covariances  $R_{xx}(3T)$  (sur tous les échantillons). Que constatez vous ?

1.4• Comment feriez-vous pour montrer que le signal  $x$  est stationnaire d'ordre 1?

### 2• Mesure de l'agitation maritime.

On dispose d'un inclinomètre, c'est à dire un dispositif donnant une mesure dont la valeur est proportionnelle à l'inclinaison du support sur lequel il se trouve. Si  $\theta$  est l'inclinaison du dispositif, la mesure délivrée par celui-ci est  $g(\theta) = 0,2 \cos(0,5\pi\theta)$ . On va utiliser ce capteur pour mesurer l'agitation de la mer. Lorsque la mer est calme, on a  $\theta = 0$ . On suppose que la houle provoque une variation aléatoire de l'inclinaison ( $\theta$ ) et que cette variation est ergodique d'ordre 2. L'amplitude moyenne de l'agitation de la mer est donnée par l'écart type de la variation d'inclinaison  $\sigma_\theta$ .

2.1• Donnez la relation entre la moyenne temporelle de la mesure inclinométrique et l'amplitude moyenne de l'agitation de la mer. On appelle  $m_A$  la moyenne temporelle réalisée pendant  $A$  secondes.

**Rappel** : la fonction caractéristique d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $\mu$  et

de variance  $\sigma^2$  est  $\Phi(\omega) = e^{j\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$ .

2.2• Sachant que le capteur délivre une mesure toutes les 0.1 sec, quel est le temps minimal pour obtenir une mesure fiable du taux de houle ? Pourquoi ?

2.3• Le capteur d'inclinaison sature au delà de  $\theta = \pm\pi/2$ , quelle est la valeur maximale qu'on obtiendrait pour  $m(T)$  ? Pourquoi ?

### 3• Système linéaire échantillonné

Soit un capteur modélisé par un système échantillonné dont la fonction de transfert

s'écrit :  $H(z) = \frac{2}{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}$ . Ce capteur est utilisé pour mesurer un processus

aléatoire blanc ergodique au sens large  $x$ . Pour plus de simplicité, on supposera que la variable  $x$  est discrète, c'est à dire qu'elle peut être notée  $x_k$  (ou  $k$  est le numéro de l'échantillon). La mesure délivrée par ce capteur est discrète. Elle est notée  $y_k$ .

3.1• En supposant que le processus  $x$  n'est pas centré, mais a pour moyenne  $\mu_x$ , quelle est la moyenne  $\mu_y$  de la mesure ?

3.2• Déduire de  $H(z)$  l'expression de  $y_k$  en fonction de  $x_k$ ,  $y_{k-1}$  et  $y_{k-2}$ .

3.3• En supposant que la variance centrée de  $x$  est  $\sigma_x$ , donnez  $E[x_k x_k]$ ,  $E[x_k y_k]$ ,  $E[x_k y_{k-1}]$ ,  $E[x_k y_{k-2}]$ ,  $E[x_k y_{k+1}]$ ,  $E[x_k y_{k+2}]$ ,  $E[y_k y_k]$ ,  $E[y_k y_{k+1}]$  et  $E[y_k y_{k+2}]$  **en régime stationnaire** (c'est à dire quand le signal n'évolue plus temporellement mais uniquement statistiquement).

Attention, rappelez vous que le filtrage est **causal**.

Donnez les correspondances entre ces termes et les fonction d'auto et d'inter corrélation (pour vous aider  $E[x_k x_k] = R_{xx}(0)$ ).

3.4• Donnez  $\Gamma_{yx}(z)$  et  $\Gamma_{yy}(z)$ , respectivement la densité interspectrale de puissance de  $y$  et  $x$  et la densité spectrale de puissance de  $y$ .

*Rappel :  $z = e^{j\omega T}$ ,  $T$  étant la période d'échantillonnage.*

3.5• Que peut-on en déduire sur la nature de la sortie  $y$  (aléatoire ? stationnaire ? ergodique ? centrée ? blanche ?).