

# Vers une approche unifiée du filtrage des images

## Toward a unified framework for image filtering

Olivier Strauss, Kevin Loquin

LIRMM, Université Montpellier II, 161, rue Ada,  
34392 Montpellier Cedex 5, France  
e-mail : Olivier.Strauss@lirmm.fr

**Résumé :** Dans cet article nous nous proposons de montrer que l'extension floue par coupe de niveau de la morphologie binaire n'est autre que l'extension par noyaux maxitifs du filtrage convolutif.

**Mots clef :** Image, convolution, filtrage, morphologie, possibilité, probabilité, noyau, intégrale de Choquet.

**Abstract:** This paper proposes to show that the particular fuzzy extension, based on level cuts, of the mathematical morphology coincide with a non-additive extension of the classical approach for filtering based on convolution.

**Keywords:** Image, convolution, filtering, morphology, possibility, probability, kernel, Choquet integral.

### 1. Introduction

Il est d'usage, en traitement d'image, de différencier deux classes d'outils d'analyse et de filtrage : la morphologie mathématique d'une part et le filtrage par convolution d'autre part.

La morphologie mathématique regroupe un ensemble de techniques dérivées des travaux initiaux de l'équipe de Jean Serra [1]. Le principe de base de la morphologie mathématique repose sur des considérations ensemblistes. Il consiste à comparer l'image à analyser ou modifier à un ensemble de géométrie connue appelé élément structurant (ou parfois noyau). On déplace cet élément structurant de façon à ce que son origine passe par toutes les positions de l'image, afin de rehausser, atténuer ou mettre en évidence certaines caractéristiques liées à l'élément structurant utilisé. Certaines opérations plus complexes nécessitent l'utilisation conjointe ou itérée de plusieurs opérations élémentaires utilisant des éléments structurants identiques ou différents. C'est le cas par exemple de l'extraction de contours.

Le filtrage par convolution regroupe un ensemble de techniques issues directement du traitement du signal et reposant sur la modélisation des signaux

par des distributions. Il consiste à convoluer l'image à analyser à une fonctionnelle adéquate appelée noyau de convolution. Le principe de la convolution est de déplacer le noyau de façon à ce que son origine passe par toutes les positions de l'image, afin de rehausser, atténuer ou mettre en évidence certaines caractéristiques liées au noyau utilisé. Certaines opérations plus complexes nécessitent l'utilisation conjointe ou itérée de plusieurs convolutions élémentaires utilisant des noyaux identiques ou différents. C'est le cas par exemple de l'extraction de contours.

Cette description des outils de morphologie et de filtrage classique est volontairement provocatrice. Elle met en évidence une analogie certaine entre ces deux types de traitement, alors que l'incompatibilité de ces deux approches semble admise dans la communauté du traitement d'image. Nous proposons, dans cet article, une vision unifiée des outils de filtrage et de morphologie de base. Nous montrons, plus particulièrement, que l'image obtenue par dilatation (resp. érosion) d'une image originale, à l'aide d'un élément structurant n'est autre que la borne supérieure (resp. inférieure) de toutes les images qui auraient été obtenues en filtrant cette image originale avec un noyau de convolution appartenant à un ensemble de noyaux défini par l'élément structurant.

### 2. Filtrage classique et morphologie floue, quelques préliminaires

#### 2.1 Filtrage numérique en traitement d'images

Si beaucoup de problématiques liées au traitement des images numériques font l'objet d'approches purement discrètes, bon nombre de problèmes trouvent une meilleure formulation dans le domaine continu (reconstruction tomo-

graphique, extraction de contours, calcul du flot optique, filtrage, déconvolution, ...). Dans de tels cas, l'approche à noyau permet de créer des algorithmes discrets réalisant des traitements basés sur une modélisation continue.

Le principe du filtrage numérique des images peut être résumé de façon schématique par la Figure 1. Il peut être décomposé en trois étapes :

- l'interpolation qui assure le passage de l'espace discret à l'espace continu d'illumination,
- le filtrage proprement dit dont le rôle est de réaliser le traitement défini dans l'espace continu,
- l'échantillonnage qui permet de repasser dans l'espace discret.

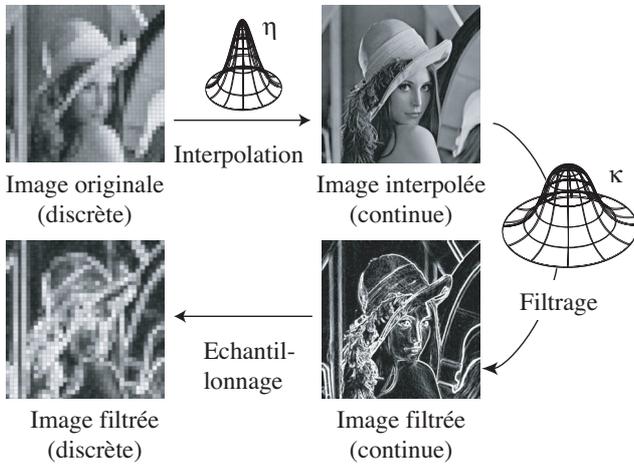


Figure 1 : Filtrage des images numériques.

Notons que les deux dernières étapes sont souvent réalisées en une seule opération.

Dans ce contexte, les noyaux sont utilisés pour définir des voisinages en vue de collecter ou disperser la mesure de luminance. Ils sont généralement monomodaux, symétriques, de support bornés et très souvent séparables [2].

Les applications utilisant cette approche sont multiples : transformation géométrique des images (rotation, translation, anamorphose, ...), opérations d'inversion (e.g. reconstruction tomographique), segmentation (extraction de contour, croissance de région, extraction d'indices, ...), analyse d'images statiques (corrélation de motifs, transformation de Fourier, transformation en ondelettes, extraction de texture, estimation de moments statistiques, ...) analyse du mouvement

(flot optique, ...). Cette approche est naturellement utilisée pour débarrasser les images de leur bruits d'acquisition ou de transmission en utilisant l'ergodicité présupposée de ces bruits ou encore pour en modifier le contenu (effets esthétiques, cryptage, ...).

## 2.2 Noyaux sommatifs et noyaux non-sommatifs maxitifs en traitement d'image

Soit  $\Omega$ , l'espace dans lequel est défini une fonction ou une distribution d'illumination  $S$  que nous appellerons image. Un noyau de  $\Omega$  est aussi une fonction ou plus généralement une distribution de  $\Omega$ . Nous distinguerons ici deux types de noyaux : les noyaux sommatifs et les noyaux maxitifs.

Un noyau sommatif est une fonction ou une distribution positive  $\kappa$  normalisée c'est à dire respectant la condition de sommativité :

$$\int_{\Omega} \kappa(\omega) d\omega = 1. \quad (1)$$

Un noyau sommatif peut être vu comme une distribution de probabilité (ou fonction de densité de probabilité) c'est à dire définissant une mesure de probabilité  $P_{\kappa}$  :

$$\forall A \subseteq \Omega, P_{\kappa}(A) = \int_A \kappa(\omega) d\omega. \quad (2)$$

La convolution du noyau sommatif  $\kappa$  centré sur un point  $\omega \in \Omega$  permet de calculer une estimation  $\hat{S}$  de  $S$  en ce point :

$$\hat{S}(\omega) = \int_{\Omega} S(u) \kappa(\omega - u) du. \quad (3)$$

Cette opération est aussi appelée agrégation additive. Elle utilise le fait que la mesure de probabilité  $P_{\kappa}$  est additive.

Un noyau maxitif est un ensemble flou  $E$  normalisé c'est à dire dont la fonction d'appartenance  $\mu_E$  respecte la condition de maxitivité :

$$\sup_{\omega \in \Omega} \{\mu_E(\omega)\} = 1. \quad (4)$$

Un noyau maxitif peut être vu comme une distribution de possibilité [3] c'est à dire définissant une mesure de possibilité  $\Pi_E$  :

$$\begin{aligned} \forall A \subseteq \Omega, \Pi_E(A) &= \sup_{\omega \in A} \{\mu_E(\omega)\} \\ &= \sup_{u \in \Omega} \{\mu_E(u)\chi_A(u)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $A$ . La mesure de confiance duale de  $\Pi_E$  est  $N_E$  définie par  $N_E(A) = 1 - \Pi_E(A^c)$ , où  $A^c$  est l'ensemble complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ .

On dit qu'un noyau maxitif  $E$  domine un noyau sommatif  $\kappa$  si la mesure de confiance  $\Pi_E$  domine la mesure de probabilité  $P_\kappa$ , c'est à dire :

$$\forall A \subseteq \Omega, N_E(A) \leq P_\kappa(A) \leq \Pi_E(A). \quad (6)$$

L'ensemble des noyaux sommatifs dominés par le noyau maxitif  $E$  est noté  $\mathcal{M}(E)$ .

Comme  $\Pi_E$  et  $N_E$  ne sont pas des mesures de confiances additives, l'agrégation de la fonction  $S$  dans un voisinage défini autour d'un point  $\omega \in \Omega$  nécessite l'utilisation d'une intégrale de Choquet [4, 5]. On définit deux estimations :

$$\bar{S}(\omega) = \int_0^\infty \Pi_E\{u \in \Omega, S(\omega - u) \geq \gamma\} d\gamma, \text{ et} \quad (7)$$

$$\underline{S}(\omega) = \int_0^\infty N_E\{u \in \Omega, S(\omega - u) \geq \gamma\} d\gamma. \quad (8)$$

Dans le cas sommatif comme dans le cas maxitif, on appelle *support* du noyau le sous-ensemble de  $\Omega$  sur lequel la fonctionnelle est non-nulle.

Nous utiliserons deux théorèmes dans la suite de cet article. Le premier est issu de travaux de Dennenberg [6] et Dubois [7] et concerne les conséquences sur l'estimation de la propriété de domination (6). Le second est issu des travaux de Dubois et al. [8] et concerne la composition de deux distributions de possibilité dominante.

**Théorème 1** :  $\forall \kappa \subseteq \mathcal{M}(E), \forall \omega \in \Omega,$   
 $\underline{S}(\omega) \leq \int_\Omega S(u)\kappa(\omega - u)du \leq \bar{S}(\omega).$

Le filtrage de  $S$  par le noyau maxitif  $E$  est donc un intervalle  $[\underline{S}(\omega), \bar{S}(\omega)]$  contenant tous les filtrages de  $S$  par un noyau sommatif dominés par  $E$ .

**Théorème 2** : Soient deux noyaux maxitifs monomodaux symétriques  $E$  et  $F$  de  $\Omega$ , et deux noyaux sommatifs monomodaux symétriques  $\kappa \subseteq \mathcal{M}(E)$  et  $\eta \subseteq \mathcal{M}(F)$ , alors le noyau sommatif  $\nu$  tel que  $\nu(\omega) = \int_\Omega \kappa(u)\eta(\omega - u)du$  est dominé par le noyau maxitif  $G$  tel que  $\mu_G(\omega) = \sup_{u \in \Omega} \{\min(\mu_E(u), \mu_F(\omega - u))\}.$

### 2.3 Morphologie floue

Les opérations de base de la morphologie mathématique sont deux opérations duales appelées respectivement érosion et dilatation. Ces noms proviennent de l'effet produit sur une forme binaire. Des combinaisons de ces opérateurs permettent de filtrer les images du point de vue morphologique, c'est à dire supprimer (ou mettre en valeur) des formes sur l'image comparables aux éléments structurants utilisés. C'est le cas de l'ouverture (succession d'une dilatation et d'une érosion utilisant le même élément structurant) et de la fermeture (succession d'une érosion et d'une dilatation utilisant le même élément structurant).

Les premières approches de morphologie mathématique ont concerné des images binaires, c'est à dire des images issues d'une classification. Dans ces approches, chaque pixel d'une image numérique binaire est classifié comme appartenant à une des formes à analyser (classe des objets) ou non (classe du fond). Une opération morphologique peut être vue comme une modification de cette classification en utilisant le voisinage défini par l'élément structurant. Elle respecte quatre propriétés fondamentales [1] qui sont : l'invariance par translation, la compatibilité par changement d'échelle, la connaissance locale et la semi-continuité. Ces propriétés sont définies sur l'image discrète sauf la semi-continuité qui n'a de sens que dans le cas continu.

Plusieurs extensions ont été proposées pour adapter, généraliser ou simplement mimer les opérations morphologiques sur des images à niveaux de gris d'une part et avec des éléments structurants fonctionnels d'autre part. Tous les auteurs

ne s'entendent pas sur la dénomination de ces extensions. Nous retenons celle proposée par Isabelle Bloch [9].

La généralisation aux images à niveaux de gris considère que le niveau de gris de chaque pixel peut être vu comme une mesure de confiance de son appartenance à la forme à analyser. De façon équivalente, on peut considérer que le seuil permettant de séparer la forme du fond est mal connu. L'application de seuils de valeur décroissante amène à créer une suite d'images binaires emboîtées. Toutes ces représentations mènent à considérer le niveau de gris comme une fonctionnelle. Cette généralisation porte le nom de *morphologie à niveaux de gris*.

La généralisation appelée *morphologie fonctionnelle* permet de représenter soit une mauvaise connaissance de l'élément structurant, soit le fait que le voisinage qu'il définit ne peut être représenté comme une union de pixels de l'image. L'élément structurant peut être considéré comme un noyau permettant de définir une mesure de confiance sur l'appartenance d'un pixel au voisinage d'un autre pixel. Il est à remarquer que la plupart des morphologies fonctionnelles ne sont pas internes : l'utilisation d'un noyau fonctionnel sur une image binaire ne produit que rarement une image binaire.

Enfin, la généralisation considérant l'image et le noyau comme des fonctionnelles est appelée *morphologie floue*. La morphologie floue permet une bonne représentation à la fois de notre idée intuitive de frontières mal définies sur les objets, mais aussi de l'aspect arbitraire du partitionnement de l'image (si on considère qu'une image numérique est issue de l'échantillonnage puis de la numérisation d'une image continue). La fonctionnelle utilisée pour modéliser le voisinage de chaque point de l'image est généralement un sous-ensemble flou normalisé, monomodal et symétrique, que nous avons appelé *noyau maxitif*.

L'approche morphologie floue, quoiqu'utilisant un voisinage pondéré, se différencie de l'approche filtrage par le fait qu'elle est purement discrète et ne fait pas explicitement appel à un modèle continu sous-jacent d'illumination. En considérant que l'élément structurant flou définit un voi-

sinage possibiliste, c'est à dire en ré-introduisant un point de vue filtrage dans cette technique, il est possible de réunir les approches morphologique et classique.

Nous proposons de montrer que la généralisation non-additive du filtrage par noyaux maxitifs amène une formulation identique à la généralisation floue des opérations de base de la morphologie par coupe de niveau.

### 3. Filtrage additif

Dans la section 2.1, nous avons décomposé le filtrage numérique par convolution de noyau en trois étapes : interpolation, filtrage, échantillonnage. Nous présentons ici l'approche classique.

#### 3.1 Interpolation des images discrètes : passage discret-continu

Soit  $\Omega$ , l'espace sur lequel est définie une fonction de luminance dont on ne connaît que les mesures discrètes  $(I_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$  en  $N$  positions (généralement régulièrement réparties)  $(\omega_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$  de  $\Omega$ . L'image discrète peut être vue comme une distribution  $I^*$  :

$$I^*(\omega) = \sum_{n=1}^N I_n \delta(\omega - \omega_n), \quad (9)$$

où  $\delta$  est l'impulsion de Dirac.

Soit  $\eta$  un noyau de reconstruction assurant le passage discret-continu, c'est à dire permettant d'estimer la mesure de luminance en dehors des points de mesure et soit  $I(\omega)$  cette estimation :

$$I(\omega) = \int_{\Omega} I^*(u) \eta(\omega - u) du = \sum_{k=1}^N I_k \eta(\omega - \omega_k). \quad (10)$$

La contrainte de sommativité (1), appliquée à un noyau de reconstruction, devient alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \sum_{k=1}^N \eta(\omega - \omega_k) = 1. \quad (11)$$

$\eta$  est un noyau d'interpolation s'il vérifie :

$$I(\omega_n) = \sum_{k=1}^N I_k \eta(\omega_n - \omega_k) = I_n. \quad (12)$$

Ce qui implique que  $\eta(\omega_n - \omega_k) = d(k - n)$ , où  $d$  est le symbole de Krœnecker. Cette restriction impose à  $\eta$  d'être un noyau dont le support ne peut excéder l'union de quatre pavés de la grille d'échantillonnage (voir Figure 2).

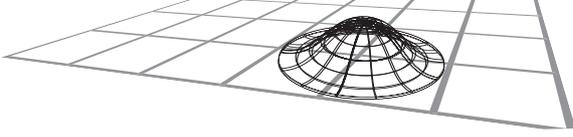


Figure 2 : Noyau d'interpolation.

### 3.2 Filtrage des signaux continus

Soit  $S$  un signal (ici de luminance) bi-dimensionnel défini en chaque point de  $\Omega$ , le filtrage continu de  $S$  est obtenu par convolution avec un (ou plusieurs) noyau(x) sommatif(s) continu(s)  $\kappa$  :

$$\hat{S}(\omega) = \int_{\Omega} S(u) \kappa(\omega - u) du. \quad (13)$$

Le noyau  $\kappa$  est sommatif et vérifie donc la propriété de sommativité (1).

### 3.3 Filtrage des signaux discrets

Le filtrage des signaux discrets est obtenu en combinant les deux approches précédentes et en évaluant l'estimation filtrée en chaque position du maillage discret défini sur  $\Omega$ . La valeur  $\hat{I}_n$  de la luminance filtrée à la position  $\omega_n$  est :

$$\begin{aligned} \hat{I}_n &= \hat{I}(\omega_n) = \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^N I_k \eta(u - \omega_k) \right) \kappa(\omega_n - u) du \\ &= \sum_{k=1}^N I_k \int_{\Omega} \eta(u - \omega_k) \kappa(\omega_n - u) du. \end{aligned} \quad (14)$$

Si on pose :

$$p_{k,n} = \int_{\Omega} \eta(u - \omega_k) \kappa(\omega_n - u) du, \quad (15)$$

l'expression (14) se résume à une estimation de la luminance  $\hat{I}_n$  par combinaison linéaire discrète des luminances  $I_k$  :

$$\hat{I}_n = \sum_{k=1}^N p_{k,n} I_k. \quad (16)$$

Les coefficients  $p_{k,n}$  sont les poids du filtre discret utilisé pour réaliser la convolution discrète de l'image  $I$  afin d'obtenir l'image  $\hat{I}$ . La matrice des  $p_{k,n}$  est parfois appelée matrice d'interaction de voisinage. Les coefficients de cette matrice sont normalisés car la convolution de deux noyaux sommatifs normalisés donne un noyau sommatif normalisé.

Pour certaines opérations de filtrage, la dérivation des images par exemple, le filtre utilisé n'est pas un noyau sommatif mais une combinaison linéaire de noyaux sommatifs. On aboutit, quoi qu'il en soit, à une combinaison linéaire d'expressions semblables à l'expression (16).

## 4. Filtrage non-additif

Le principe du filtrage des images exposé dans le paragraphe 3 peut-être facilement étendu pour utiliser, non plus un noyau sommatif, mais un noyau maxitif.

### 4.1 Interpolation des images discrètes : passage discret-continu

Soit  $F$  un sous-ensemble flou normalisé définissant une mesure de possibilité  $\Pi_F(A)$ .  $F$  permet de définir, autour de chaque position  $\omega \in \Omega$ , un voisinage pondéré  $F_{\omega}$  dont la fonction d'appartenance  $\mu_{F_{\omega}}$  est définie par :

$$\forall u \in \Omega, \mu_{F_{\omega}}(u) = \mu_F(u - \omega). \quad (17)$$

Ce voisinage pondéré peut être utilisé pour réaliser l'estimation d'une luminance continue, notée  $\bar{I}$ , en utilisant la mesure de possibilité  $\Pi_{F_{\omega}}$  définie pour chaque position  $\omega \in \Omega$ . Cependant, la mesure de confiance  $\Pi_{F_{\omega}}$  n'étant pas additive, il faut substituer à l'agrégation additive de l'expression (10) une intégrale de Choquet :

$$\begin{aligned} \bar{I}(\omega) &= \int_0^{\infty} \Pi_{F_{\omega}} \{ u \in \Omega, I^*(\omega - u) \geq \gamma \} d\gamma \\ &= \sum_{n=1}^N (I_{(n)} - I_{(n-1)}) \Pi_{F_{\omega}}(A_{(n)}), \end{aligned} \quad (18)$$

où  $(.)$  est une permutation triant les niveaux de gris par ordre croissant :  $0 \leq I_{(1)} \leq \dots \leq I_{(N)}$  et en posant par convention  $I_{(0)} = 0$ . Les  $A_{(n)}$  sont

des coalitions de pixels de l'image basés sur l'ordre défini par  $(.) : A_{(n)} = \{\omega_{(n)}, \dots, \omega_{(N)}\}$ .

De la même façon, on peut définir une estimation inférieure par complémentation :

$$\begin{aligned} \underline{I}(\omega) &= \sum_{n=1}^N (I_{(n)} - I_{(n-1)})(1 - \Pi_{F_\omega}(A_{(n)}^c)) \\ &= \sum_{n=1}^N (I_{(n)} - I_{(n-1)})N_{F_\omega}(A_{(n)}), \end{aligned} \quad (19)$$

Les  $A_{(n)}^c$  sont les complémentaires des coalitions de pixels de l'image basés sur l'ordre défini par la permutation  $(.) : A_{(n)}^c = \{\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(n-1)}\}$ , par convention  $A_{(1)}^c = \emptyset$ .

Le noyau maxitif est un noyau d'interpolation à partir du moment où il réalise la contrainte :

$$\bar{I}(\omega_n) = \underline{I}(\omega_n) = I(\omega_n) = I_n. \quad (20)$$

La notation  $\bar{I}$  (resp.  $\underline{I}$ ) laisse entendre que cette estimation est une borne supérieure (resp. inférieure). En effet, le théorème 1 implique que, si  $\eta$  est un noyau sommatif dominé par  $F$ , les interpolations  $I(\omega)$  définie par l'équation (10) et le noyau sommatif  $\eta$  d'une part et  $\bar{I}(\omega)$  définie par l'équation (18) et le noyau maxitif  $\mu_F$  d'autre part vérifient :

$$\forall \omega \subseteq \Omega, \underline{I}(\omega) \leq I(\omega) \leq \bar{I}(\omega). \quad (21)$$

## 4.2 Filtrage des signaux continus

Soit  $S(\omega)$  un signal (lumineux) bi-dimensionnel et soit  $E$  un sous-ensemble flou normalisé au sens de l'équation (4),  $E$  permet de définir autour de chaque point  $\omega_n$  un voisinage pondéré  $E_n$  :

$$\mu_{E_n}(u) = \mu_E(\omega_n - u). \quad (22)$$

L'utilisation d'un intégrale de Choquet continue permet de réaliser une estimation supérieure continue de ce signal, notée  $\bar{S}$ , en utilisant le voisinage flou défini par la mesure de possibilité  $\Pi_{E_\omega}$  :

$$\begin{aligned} \bar{S}(\omega_n) &= \int_0^\infty \Pi_{E_n}\{u \in \Omega, S(u) \geq \gamma\} d\gamma \\ &= \int_0^\infty \Pi_E\{u \in \Omega, S(\omega_n - u) \geq \gamma\} d\gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

De façon analogue, la mesure de nécessité  $N_E$  permet de réaliser une estimation inférieure de  $S$ , notée  $\underline{S}$  :

$$\underline{S}(\omega_n) = \int_0^\infty N_E\{u \in \Omega, S(\omega_n - u) \geq \gamma\} d\gamma. \quad (24)$$

$\bar{S}$  et  $\underline{S}$  sont respectivement des mesures supérieures et inférieures au sens où, si  $\kappa$  est un noyau sommatif définissant une mesure de probabilité  $P_\kappa$  dominée par  $\Pi_E$  alors :

$$\underline{S}(\omega_n) \leq \hat{S}(\omega_n) \leq \bar{S}(\omega_n), \quad (25)$$

$$\text{avec } \hat{S}(\omega_n) = \int_\Omega S(u)\kappa(\omega_n - u)du.$$

## 4.3 Filtrage des signaux discrets

Le filtrage non-additif des signaux discrets combine les deux approches précédentes. Soient  $E$  et  $F$  deux sous-ensembles flous normalisés définissant deux mesures de possibilité  $\Pi_E$  et  $\Pi_F$ .  $E$  et  $F$  peuvent être utilisés pour définir un voisinage pondéré autour de chaque position  $(\omega_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$  du maillage discret défini sur  $\Omega$ . La possibilité d'intersection entre le voisinage  $E_n$  défini autour de  $\omega_n$  et  $F_k$  défini autour de  $\omega_k$  peut être estimé par :

$$\pi_{k,n} = \text{Sup}_{u \in \Omega} \{ \min(\mu_F(u - \omega_k), \mu_E(\omega_n - u)) \}. \quad (26)$$

Les  $\pi_{k,n}$  définissent une distribution de possibilité, normalisée au sens où  $\forall n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\pi_{n,n} = 1$ . Elle permet de définir, pour chaque position  $\omega_n$ , la compatibilité d'un sous-ensemble discret de position  $A \subseteq \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  au sens des voisinages définis par  $E$  et  $F$  :

$$\Pi_n(A) = \text{Sup}_k \{ \chi_A(\omega_k) \pi_{k,n} \}. \quad (27)$$

En conséquence du théorème 2, si  $\kappa \subseteq \mathcal{M}(E)$  et  $\eta \subseteq \mathcal{M}(F)$ , alors la distribution de possibilités  $\pi_{k,n}$  définie par l'équation (26) domine la distribution de probabilité définie par l'équation (15). Autrement dit :

$$\forall \eta \in \mathcal{M}(F), \forall \kappa \in \mathcal{M}(E), I_n \leq I_n \leq \bar{I}_n, \quad (28)$$

avec

$$\bar{I}_n = \sum_{k=1}^N (I_{(k)} - I_{(k-1)}) \Pi_n(A_{(k)}) \quad (29)$$

et

$$I_n = \sum_{k=1}^N (I_{(k)} - I_{(k-1)}) (1 - \Pi_n(A_{(k)}^c)). \quad (30)$$

où la permutation  $(.)$  ainsi que les coalitions  $A_{(n)}$  et  $A_{(n)}^c$  sont définis dans la section 4.1.

## 5. Extension de la morphologie binaire par coupes de niveaux

L'extension que nous proposons ici est floue c'est à dire qu'elle considère une image fonctionnelle et un voisinage fonctionnel (flou). Cette extension utilise une agrégation par intégrale des opérations binaires obtenues par coupes de niveaux. Elle correspond à la définition 1 de [9].

Soit  $\gamma$  le seuil utilisé pour passer d'une image à niveau de gris à une image binaire (l'image à niveaux de gris pouvant être une image brute ou une image issue d'une pré-classification par un critère comme le calcul de la norme du gradient, de points de Harris, de régions homogènes, ...).

On peut créer ainsi l'image  $I^\gamma$  :  $I_k^\gamma = 1$  si  $I_k \geq \gamma$  et  $I_k^\gamma = 0$  sinon.

Soit  $F$  le sous-ensemble flou définissant le voisinage d'un pixel et  $F^\alpha$  son  $\alpha$ -coupe :  $F^\alpha = \{\omega \in \Omega, \mu_F(\omega) \geq \alpha\}$ .

Soit  $E$  l'élément structurant flou et  $E^\alpha$  son  $\alpha$ -coupe :  $E^\alpha = \{\omega \in \Omega, \mu_E(\omega) \geq \alpha\}$ .

Soit  $n \in \{1 \dots N\}$ , la valeur continue de la dilata-tion en  $\omega_n$  est donnée par :

$$\begin{aligned} DI^{\alpha\beta\gamma}(\omega_n) &= 1 \text{ si} \\ \exists k \in \{1 \dots N\}, \exists u \in \Omega \\ (\omega_k - u) \in F^\alpha, (\omega_n - u) \in E^\alpha, \\ DI^{\alpha\beta\gamma}(\omega_n) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (31)$$

Ce qui peut s'écrire de façon condensée :

$$DI^{\alpha\beta\gamma}(\omega_n) = \sup_{k \in \{1 \dots N\}} \left\{ \sup_{u \in \Omega} \left\{ \chi_{F^\alpha}(\omega_k - u) \chi_{E^\alpha}(\omega_n - u) \chi_{I^\gamma}(k) \right\} \right\} \quad (32)$$

L'extension par coupe de niveau s'écrit :

$$\begin{aligned} DI(\omega_n) &= \int_0^1 \int_0^1 DI^{\alpha\gamma}(\omega_n) d\alpha d\gamma \quad (33) \\ &= \int_0^1 \int_{k \in \{1 \dots N\}} \left\{ \sup_{u \in \Omega} \left\{ \chi_{F^\alpha}(\omega_k - u) \chi_{E^\alpha}(\omega_n - u) \chi_{I^\gamma}(k) \right\} \right\} d\alpha d\gamma \\ &= \int_0^1 \int_{k \in \{1 \dots N\}} \left\{ \sup_{u \in \Omega} \left\{ \int_0^1 \chi_{F^\alpha}(\omega_k - u) \chi_{E^\alpha}(\omega_n - u) d\alpha \right\} \chi_{I^\gamma}(k) \right\} d\gamma \\ &= \int_0^1 \int_{k \in \{1 \dots N\}} \left\{ \sup_{u \in \Omega} \left\{ \min(\mu_F(\omega_k - u), \mu_E(\omega_n - u)) \right\} \chi_{I^\gamma}(k) \right\} d\gamma \end{aligned}$$

, qui n'est autre que l'intégrale de Choquet définie par l'équation (29). En effet si on pose :

$$\pi_{k,n} = \sup_{u \in \Omega} \left\{ \min(\mu_F(\omega_k - u), \mu_E(\omega_n - u)) \right\}, \quad (34)$$

$\pi_{k,n}$  définit une distribution de possibilité permettant de définir, pour chaque position  $\omega_n$ , la compatibilité d'un sous-ensemble discret de position  $A \subseteq \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  :

$$\Pi_n(A) = \sup_k \left\{ \chi_A(\omega_k) \pi_{k,n} \right\}. \quad (35)$$

L'écriture de l'équation (33) se simplifie alors :

$$DI(\omega_n) = \sum_{k=1}^N (I_{(k)} - I_{(k-1)}) \Pi_n(A_{(k)}), \quad (36)$$

qui n'est autre que l'expression (29) où la permutation  $(.)$  ainsi que les coalitions  $A_{(n)}$  sont définis de façon analogue. L'image érodée est obtenue en utilisant la mesure  $N_n$  duale de la mesure de possibilité  $\Pi_n$  :

$$EI(\omega_n) = \sum_{k=1}^N (I_{(k)} - I_{(k-1)}) N_n(A_{(k)}). \quad (37)$$

## 6. Conclusion

Nous avons présenté, dans cet article, une vision unifiée du filtrage convolutif des images d'une part et de l'extension floue, par coupe de niveau, de la morphologie mathématique d'autre part. Plus qu'une démarche esthétique, cette nouvelle approche pourrait permettre de résoudre un certain nombre de problématiques difficilement modélisables par les approches classiques tels que le problème récurrent du choix des noyaux ou la

quantification de l'erreur d'estimation (ou du bruit de reconstruction).

Classiquement, le choix du noyau présuppose connue les propriétés systématiques ou statistiques du signal que l'on veut rehausser, détecter ou supprimer (par exemple continuité, ergodicité, propriétés fréquentielle, ...). L'optimisation d'un critère subjectif ou objectif permet de définir des propriétés permettant de sélectionner un noyau. Cette approche n'est souvent pas très robuste au sens où, si les propriétés présupposées ne sont pas vérifiées, le résultat du filtrage s'éloigne fortement des conditions optimales désirées. L'utilisation de l'approche non-additive permet de définir non pas un noyau mais une classe de noyaux et de sélectionner a posteriori celui dont le comportement s'éloigne le plus des conditions extrêmes, c'est à dire celui donnant une estimation médiane par rapport à l'ensemble des estimations produites par cette classe de noyaux.

Quantifier une erreur d'estimation revient généralement à estimer les variations d'estimation produites soit par une répétition de l'expérience d'estimation dans des conditions analogues, soit à estimer l'impact de variations connues sur cette estimation. L'approche classique consiste à supposer ergodique les variations statistiques et à les associer aux variations locales du signal dans une zone infinitésimale. Une telle estimation peut être réalisée de façon robuste en faisant varier la forme du noyau dans une classe de noyaux ayant des propriétés équivalentes. Cette approche revient à définir le noyau maxitif le plus spécifique réalisant la domination de l'ensemble des noyaux d'une classe donnée et de mesurer les variations d'estimation à l'aide de la longueur de l'intervalle produit.

Enfin cette vision unifiée peut permettre de décloisonner les approches signal et morphologique. Elle permettrait d'analyser et comprendre, au sens du traitement du signal, les filtrages morphologiques que sont les ouvertures et les fermetures c'est à dire des estimations inférieures d'estimations supérieures et vice-versa. Elle permettrait de prendre en compte de façon très simple l'impact statistiques de l'échantillonnage spatial sur les images. Ainsi dans [10] nous mon-

trons comment l'estimation du gradient de luminance par un approche non-additive aboutit à l'obtention d'un seuil naturel permettant d'augmenter considérablement la robustesse de la phase de détection des maxima locaux (généralement le seuil est choisi de façon arbitraire). Elle cette vision unifiée permettrait aussi d'utiliser facilement les outils de la géométrie discrète pour résoudre de problèmes bien posés dans l'espace continu (en tomographie par exemple).

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Didier Dubois pour ses conseils avisés et toujours pertinents.

## 7. Références

- [1] J. Serra, Image analysis and mathematical morphology, Academic Press, inc., London 1982.
- [2] K. Loquin, O. Strauss, De la granulosité des noyaux d'échantillonnage, Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (2006), 387-394.
- [3] D. Dubois, H. Prade, Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty, Plenum Press, London, 1985
- [4] J.-L. Marichal, An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (6) (2000) pp. 800-807.
- [5] A. Chateauneuf and J.Y. Jaffray, Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, Mathematical Social Sciences, 17 (1989) 263-283.
- [6] D. Denneberg. Non Additive Measure and Integral, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).
- [7] Dubois D, Possibility theory and statistical reasoning, Computational Statistics & Data Analysis, Volume 51, Issue 1, (2006) 47-69.
- [8] Dubois D, Foulloy L, Mauris G and Prade H, Probability-possibility transformation, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities, Reliable Computing, vol. 10, (2004) 273-297.
- [9] I. Bloch, H. Maître, Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study, Pattern Recognition, Vol. 28, No. 9, pp. 1341-1387, 1995.
- [10] F. Jacquey, K. Loquin, F. Comby, O. Strauss, Non-additive approach for gradient-based edge detection, ICIP'07, Int. Conf. on Image Processing, San Antonio, Texas, USA, September 16-19, 2007.