

Vers une déconvolution intervalliste : un usage détourné des mesures non-additives

Towards interval-based non-additive deconvolution in signal processing

O. Strauss¹

A. Rico²

¹ LIRMM

² LIRIS

Université Montpellier II, 61 rue Ada, 34392 Montpellier cedex 5, France, e-mail : Olivier.Strauss@lirmm.fr

Université Claude Bernard Lyon 1, 43 bld du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne, France

Résumé :

Déconvoluer, c'est reconstruire un signal à partir de sa mesure via un capteur. Une telle inversion n'est possible que si la réponse impulsionnelle du capteur est parfaitement connue. Sinon, la reconstruction est biaisée et ce biais n'est pas quantifiable directement par des techniques classiques. Cet article présente une nouvelle technique de déconvolution permettant de prendre en compte une mauvaise connaissance de la réponse impulsionnelle du capteur utilisé. Cette technique s'appuie sur une modélisation du rapport entre mesure et signal incident via une capacité concave qui étend la notion de convolution à un ensemble concave de réponses impulsionnelles. Le signal reconstruit est de nature intervalliste. L'imprécision de ce signal quantifie l'erreur de reconstruction induite par la mauvaise connaissance de la réponse impulsionnelle du capteur.

Mots-clés :

Déconvolution, problème inverse, capacité concave, moindres carrés.

Abstract:

Reconstructing a signal from its observations via a sensor device is usually called "deconvolution". Such a reconstruction needs a perfect knowledge of the impulse response of the sensor involved in the signal measurement. The lower this knowledge, the more biased the reconstruction. In this paper, we present a novel method for reconstructing a signal measured by a sensor whose impulse response is imprecisely known. This technique is based on modeling the relationship between measurement and signal via a concave capacity and extending the concept of convolution to a concave set of impulse responses. The reconstructed signal is interval-valued, reflecting the poor knowledge of the impulse response of the sensor.

1 Introduction

Nous percevons la plupart des signaux au travers de capteurs qui les modifient et les trans-

forment pour en créer une mesure. Lorsque cette transformation est linéaire et indépendante du temps, la relation entre la mesure et le signal incident fait intervenir un signal particulier appelé réponse impulsionnelle du capteur, qui n'est autre que la réponse du capteur à une hypothétique impulsion de Dirac. Cette relation s'écrit avec un produit de convolution :

$$m(t) = (h \otimes s)(t), \quad (1)$$

$m(t)$ étant la mesure, $h(t)$ la réponse impulsionnelle et $s(t)$ le signal à mesurer. La déconvolution se présente comme le problème inverse à la convolution permettant de déduire une estimée $\hat{s}(t)$ du signal à partir de sa mesure :

$$\hat{s}(t) = (h \otimes^{-1} m)(t) = (h^{-1} \otimes m)(t), \quad (2)$$

où \otimes^{-1} est l'hypothétique opération de déconvolution et h^{-1} l'inverse de h au sens de la convolution. On parle aussi de reconstruction du signal. Une telle inversion est réalisable pour un certain nombre de réponses impulsionnelles ou en passant dans l'espace de Fourier. Cependant, la déconvolution fait partie des problèmes inverses mal posés au sens de Hadamard (défaut de stabilité, d'unicité et d'existence). En outre, la mesure ne dépend que rarement du seul signal à mesurer et il faut substituer, à l'équation (1) :

$$m(t) = (h \otimes s)(t) + b(t), \quad (3)$$

où la fonction $b(t)$ représente toutes les influences de la mesure qui ne seraient pas dues au signal (erreur de transmission, bruit thermique, bruit de quantification, ...). Appliquer le principe de déconvolution à l'équation (3) biaise alors l'estimation de $\hat{s}(t)$ en lui ajoutant une interprétation cohérente $-(h \otimes^{-1} b)(t)$ du bruit $b(t)$ appelée artefact de reconstruction. Pour résoudre ce problème, on utilise généralement des techniques de régularisation. Ces techniques sont particulièrement difficiles à mettre en oeuvre dans le domaine continu. Depuis l'avènement de l'informatique, le traitement analytique des signaux analogiques a laissé place au traitement numérique des signaux discrets. En discret, l'équation (3) devient :

$$M = AS + B, \quad (4)$$

où M est le vecteur $K \times 1$ des échantillons de mesure, S le vecteur de dimension $N \times 1$ des échantillons de signal, B le vecteur de dimension $K \times 1$ des perturbations et A une matrice $K \times N$ faisant intervenir la réponse impulsionnelle h . En théorie, pour reconstruire S , il devrait suffire d'inverser A . Dans la pratique, A est très mal conditionnée et cette inversion numérique doit faire intervenir la minimisation d'un critère de vraisemblance $J_A(S, M)$ du signal reconstruit, l'estimation \hat{S} retenue étant celle optimisant ce critère. Parmi les critères les plus utilisés se trouve celui des moindres carrés de l'erreur résiduelle : $J_A(S, M) = \|M - AS\|^2$ dont la solution analytique est donnée par :

$$\hat{S} = A^+ M, \quad (5)$$

où A^+ est la pseudo inverse de A . L'utilisation directe de l'équation (5) pour réaliser une déconvolution fait apparaître aussi des artefacts de reconstruction. Pour minimiser l'apparition d'artefacts, il est nécessaire de modifier le critère moindres-carrés en lui ajoutant un terme supplémentaire dont le rôle est de limiter la dynamique du signal reconstruit dans les hautes fréquences. Il n'existe cependant plus alors de solution analytique à la minimisation du critère obtenu. Cette minimisation est réalisée par une procédure itérative.

Une des limites principales de l'approche classique vient du fait que l'erreur de modélisation ne peut être considérée que comme un bruit agissant sur la mesure. Or, en établissant les équations (3) et (4), on occulte un problème majeur qu'est le lien entre la modélisation et le phénomène physique représenté. En effet, toute technique de déconvolution présuppose une connaissance parfaite de la réponse impulsionnelle h (ou de la matrice A). Lorsque cette connaissance est imparfaite (et elle l'est toujours) la démarche classique, consistant à reporter cette mauvaise connaissance comme un bruit de mesure, provoque un biais non quantifiable.

Dans un travail récent [8], nous avons montré comment il était possible de représenter une mauvaise connaissance de la réponse impulsionnelle du processus étudié en utilisant une capacité convexe. Avec cette représentation, tout se passe comme si la réponse impulsionnelle était connue de façon imprécise. Cette imprécision est alors répercutée sur l'imprécision de la mesure via une généralisation de l'opération de convolution. Cette généralisation fait intervenir une mesure de confiance non-additive concave ν ainsi qu'une équation non linéaire entre le vecteur de mesure et le vecteur du signal à reconstruire de la forme :

$$[\underline{M}, \overline{M}] = \sigma \cdot \mathcal{A}_\nu(S), \quad (6)$$

où \underline{M} (rsp. \overline{M}) est la borne inférieure (rsp. supérieure) de toutes les mesures obtenues à partir de l'ensemble des réponses impulsionnelles modélisées par la capacité ν et σ un coefficient réel.

Le problème abordé dans cet article est l'inversion de ce principe : connaissant M , le vecteur mesure, est-il possible de trouver un ensemble convexe $[\underline{S}, \overline{S}]$ compatible avec la mesure M c'est à dire que :

$$\forall S \in [\underline{S}, \overline{S}], M \in \sigma \cdot \mathcal{A}_\nu(S)? \quad (7)$$

Nous nous intéresserons ici uniquement aux réponses impulsionnelles positives.

2 Quelques rappels

2.1 Le filtrage vu comme une opération d'estimation

Le filtrage linéaire discret repose sur la convolution discrète de N échantillons du signal incident, $(s_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$, avec $h = (h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle discrète du filtre considéré. Le $k^{\text{ième}}$ élément de la sortie de ce filtre est :

$$m_k = \sum_{i=1}^N s_i h_{k-i}. \quad (8)$$

Posons $\sigma = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i$ et $\rho_i = \frac{h_i}{\sigma}$. Par construction $\rho = (\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ peut être considérée comme une distribution de probabilité induisant une mesure de probabilité P sur l'ensemble des échantillons. Soit $\rho^k = (\rho_i^k)_{i \in \mathbb{Z}}$ la distribution de probabilité définie par $\rho_i^k = \rho_{k-i}$, alors l'expression (8) peut être réécrite en :

$$m_k = \sigma \sum_{i=1}^N s_i \rho_i^k = \sigma \mathbb{E}_{P_k}\{S\}, \quad (9)$$

P_k étant la mesure de probabilité définie par la distribution de probabilité translatée $(\rho_i^k)_{i \in \mathbb{Z}}$ et \mathbb{E}_{P_k} l'espérance induite par P_k sur les valeurs des échantillons du signal. Une opération de filtrage, avec un filtre dont la réponse impulsionnelle est positive, peut donc être vue, à un facteur près, comme une moyenne locale d'échantillons du signal incident. L'ensemble de ces opérations peut être réécrite sous une forme matricielle :

$$M = \sigma A_P S \text{ où } A_P \text{ est la matrice,} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_0^0 & \rho_1^0 & \dots & \rho_N^0 \\ \rho_0^1 & \rho_1^1 & \dots & \rho_N^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_0^N & \rho_1^N & \dots & \rho_N^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_{-1} & \dots & \rho_{-N} \\ \rho_1 & \rho_0 & \dots & \rho_{-N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_N & \rho_{N-1} & \dots & \rho_0 \end{bmatrix}$$

La forme de la réponse impulsionnelle du filtre est définie par ρ . Donc une mauvaise connaissance de cette forme affecte ρ et non σ .

2.2 Généralisation intervalliste de l'opérateur espérance

Les échantillons du signal S peuvent être considérés comme un vecteur $S = (s_1, \dots, s_N)$. Pour généraliser l'espérance mathématiques de S , $\mathbb{E}_P\{S\}$, induite par une probabilité P , on considère une capacité ν concave sur l'ensemble des parties de $\{s_1, \dots, s_N\}$. $\mathcal{M}(\nu)$ est l'ensemble des probabilités P dominées par ν et les intervalles réels sont notés : $[\underline{a}, \bar{a}]$ où \underline{a} et \bar{a} sont deux réels tels que $\underline{a} \leq \bar{a}$.

Pour tout vecteur S , $\check{C}_{\nu^c}(S) \leq \check{C}_{\nu}(S)$ où \check{C}_{ν} est l'intégrale de Choquet asymétrique par rapport à la capacité ν [9, 4]. Une première généralisation pour l'espérance mathématiques est l'opérateur $\underline{\mathbb{E}}_{\nu}(S) = [\check{C}_{\nu^c}(S), \check{C}_{\nu}(S)]$ (pour plus de détails, voir [8]) qui vérifie :

$$\forall P \in \mathcal{M}(\nu), \mathbb{E}_P(S) \in \underline{\mathbb{E}}_{\nu}(S).$$

Considérons maintenant un vecteur d'intervalles noté $[\mathbf{S}] = ([\underline{s}_1, \bar{s}_1], \dots, [\underline{s}_N, \bar{s}_N])^T$ avec $\forall i, [\underline{s}_i, \bar{s}_i]$ des intervalles réels. Deux vecteurs \underline{S} et \bar{S} peuvent être associés : $\underline{S} = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_N)^T$ et $\bar{S} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_N)^T$. L'intégrale de Choquet asymétrique est une fonction croissante et ν est concave, donc $\underline{S} \leq \bar{S}$ entraîne que $\check{C}_{\nu^c}(\underline{S}) \leq \check{C}_{\nu}(\bar{S})$. L'espérance mathématique intervalliste est l'union de toutes les espérances des vecteurs compris entre \underline{S} et \bar{S} , d'où : $\underline{\mathbb{E}}_{\nu}([\mathbf{S}]) = [\check{C}_{\nu^c}(\underline{S}), \check{C}_{\nu}(\bar{S})]$.

2.3 Quelques rappels sur l'arithmétique d'intervalle

L'addition de Minkowski est l'extension naturelle de l'addition des vecteurs réels aux vecteurs intervalles. Soient $[\mathbf{X}] = [\underline{X}, \bar{X}]$ et $[\mathbf{Y}] = [\underline{Y}, \bar{Y}]$ deux vecteurs d'intervalles, leur addition de Minkowski est définie par :

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{X}] \oplus [\mathbf{Y}] = [\underline{X} + \underline{Y}, \bar{X} + \bar{Y}],$$

et leur addition de Minkowski duale est définie

par :

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{X}] \boxplus [\mathbf{Y}] = [\min(\underline{X} + \overline{Y}, \overline{X} + \underline{Y}), \max(\underline{X} + \overline{Y}, \overline{X} + \underline{Y})],$$

où l'opérateur min (resp. max) est le minimum (resp. maximum) de deux vecteurs coordonnées par coordonnées. $[\mathbf{Z}]$ est alors un vecteur dont les coordonnées sont solution de l'une des deux équations suivantes : $[x_k] = [z_k] \oplus [-y_k]$ ou $[y_k] = [z_k] \oplus [-x_k]$, où $[x_k]$ désigne la $k^{\text{ème}}$ coordonnée d'un vecteur X . Notons que une seule de ces deux équations a une solution. Plus précisément, si la première équation n'a pas de solution car les bornes de l'intervalle trouvé ne sont pas dans le bon sens, alors en permutant ces deux bornes, l'intervalle obtenu est solution de la deuxième équation et réciproquement.

2.4 Moindres carrés : la procédure de Schultz

Comme précisé dans l'introduction, l'inversion de l'équation (4) au sens des moindres carrés peut être résolue par le calcul de A^+ , la pseudo inverse de A . $\hat{S} = A^+M$ est solution de l'équation régularisée : $(A^T A)S = A^T M$.

Si la matrice $A^T A$ est bien conditionnée et de dimension raisonnable, on peut calculer A^+ par : $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$. On peut aussi utiliser des techniques récursives comme celle de Gréville. Mais elles ne peuvent raisonnablement être employées lorsque A est de grande dimension ou si elle est mal conditionnée.

Pour pallier ce problème, certaines solutions itératives existent pour, partant d'une solution approximative de A^+ , converger vers une solution plus précise. Nous nous intéressons à la solution de Schultz [1] (plus souvent appelée méthode de Hotelling). On en retrouve des traces dans de nombreux problèmes inverses comme, par exemple, en reconstruction tomographique [2]. Cette procédure s'écrit :

$$S^{i+1} = S^i + R(M - AS^i), \quad (11)$$

où S^i est l'estimée de S à l'itération i et R est une estimation initiale de A^+ . Dans les cas où toute procédure d'inversion approximative est bannie on peut poser : $R = DA^T$, D étant la matrice diagonale des inverses des éléments de $(A^T A)$. La convergence de cette méthode est lente mais garantie [3].

2.5 Matrice A et réponse impulsionnelle h : relation discret-continu

En théorie, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure au double de la fréquence la plus élevée du signal à reconstruire, alors la matrice A ne dépend que de la valeur de h aux instants d'échantillonnage. Dans ce cas, soit T la période d'échantillonnage, la matrice A intervenant dans l'équation (4) s'écrit :

$$A = \sigma_h A_P \quad (12)$$

avec $\sigma_h = \sum_{i=1}^p h(iT)$, et $\forall i \quad \rho_i = \sigma_h^{-1} h(iT)$, P étant la mesure de probabilité associée à $(\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Cependant, cet échantillonnage idéal est souvent loin de la réalité et la relation continu-échantillonné fait généralement intervenir un noyau de convolution κ . Les valeurs $h(iT)$ de l'expression (12) doivent alors être remplacées par $(h \otimes \kappa^{iT})(0)$, κ^{iT} , étant le translaté de κ en iT défini par $\kappa^{iT}(t) = \kappa(iT - t)$ [7]. Enfin, la matrice D permettant de définir une solution approximative de la matrice R de l'équation (11) peut toujours être approximée par $\sigma_h^{-1} Id_N$ où Id_N est la matrice identité $N \times N$. La matrice R s'écrit alors : $R = \sigma_h^{-2} A^T$.

Une interprétation simplifiée de la formule (11) est qu'à l'itération $(i + 1)$, la meilleure estimation de Δ^i , la correction à apporter à S^i pour se rapprocher de \hat{S} , est donnée par :

$$\Delta^i = R(M - AS^i) = S^{i+1} - S^i. \quad (13)$$

Autrement dit S^{i+1} est solution de l'équation (13). On a, par construction, $A = \sigma_h A_P$, donc :

$$\Delta^i = \sigma_h^{-2} A_P^T (M - \sigma_h A_P S^i). \quad (14)$$

2.6 Domination des opérations de filtrage

Comme nous l'avons exposé précédemment, la convolution d'un signal avec un filtre de réponse impulsionnelle positive peut être vue comme une opération d'agrégation linéaire. Cette agrégation prend la forme de l'équation (9). Comme dans la section 2.1, ν étant une capacité concave dominant la mesure de probabilité induite par ρ et ν_k , la capacité concave translatée de ν et dominant la mesure de probabilité induite ρ^k , alors la simple substitution de $\underline{\mathbb{E}}_{\nu_k}$ à \mathbb{E}_{P_k} dans l'équation (9) permet de définir une opération de filtrage impécis :

$$[\underline{m}_k, \overline{m}_k] = \sigma \underline{\mathbb{E}}_{\nu_k} \{S\}, \quad (15)$$

qui vérifie $m_k = \sigma \mathbb{E}_{P_k} \{S\} \in [\underline{m}_k, \overline{m}_k]$. Soit $[\mathbf{M}]$, le vecteur d'intervalles défini par : $[\mathbf{M}] = ([\underline{m}_1, \overline{m}_1], \dots, [\underline{m}_N, \overline{m}_N])$, l'ensemble des opérations permettant de le définir est noté :

$$[\mathbf{M}] = \sigma \mathcal{A}_\nu(S). \quad (16)$$

Cette opération peut facilement être étendue au cas où S est un vecteur intervalliste et prendre la forme $[\mathbf{M}] = \sigma \mathcal{A}_\nu([\mathbf{S}])$, l'intégrale de Choquet étant croissante.

De la même façon qu'on peut définir $\mathcal{M}(\nu)$ on peut définir $\mathcal{M}(\mathcal{A}_\nu)$, l'ensemble des opérateurs linéaires définis par une matrice A_P (équation (10)) où $P \in \mathcal{M}(\nu)$. Nous définissons alors ν^T de la manière suivante : soit ρ^T la distribution de probabilité associée à A_P^T ($\rho_i^T = \rho_{-i}$), on appellera ν^T la capacité concave dominant la mesure de probabilité définie par ρ^T .

Dans cet article, la capacité concave définie domine une mesure de probabilité connue comme dans [8] en considérant que ρ est issue de l'échantillonnage d'une distribution continue via un noyau d'échantillonnage mal connu. D'autres méthodes existent comme la domination par une distribution de possibilités [7].

3 Déconvolution intervalliste

La méthode que nous proposons consiste à créer un processus d'inversion non-linéaire par extension du processus linéaire de l'expression (11). Soit h , ρ et σ_h définis au paragraphe précédent et ν une capacité concave dominant P , la mesure de probabilité associée à ρ .

Soit $[S^i]$ l'intervalle d'estimation de \hat{S} obtenu à l'itération i . D'après la section précédente, $[\underline{M}^i, \overline{M}^i] = \sigma_h \cdot \mathcal{A}_\nu([S^i])$ donc $[\underline{M}^i, \overline{M}^i]$ est l'ensemble des mesures $\hat{M} = \sigma_h \cdot A_P S$ obtenues pour $P \in \mathcal{M}(\nu)$ et $S \in [S^i]$.

Le but est que l'intervalle estimé $[\underline{M}^i, \overline{M}^i]$ se rapproche le plus possible du vecteur mesuré M , tout en étant le plus spécifique possible. Par analogie avec le cas ponctuel, les corrections à apporter à $[S^i]$ sont données par :

$$[\Delta^i] = \sigma_h^{-2} \mathcal{A}_{\nu^T}(M - \sigma_h \mathcal{A}_\nu([S^i])).$$

Cette équation généralise l'équation (14) au sens où, par construction, $\forall P \in \mathcal{M}(\nu)$ et $\forall S \in [S^i]$, $\exists \Delta \in [\Delta^i]$ tel que $\Delta = R(M - A_P S)$. On peut aussi dire que $[\Delta^i]$ est l'ensemble des vecteurs de correction que l'on peut appliquer à l'ensemble des solutions provisoires proposées à l'itération i et représentées par le vecteur intervalliste $[S^i]$. Dans le cas ponctuel, le chaque élément s_k^{i+1} du vecteur de solution à l'itération $i + 1$ peut être déduit de chaque élément s_k^i du vecteur de solution à l'itération i parce que S^{i+1} est solution de l'équation (13). La généralisation intervalliste de ce principe est : chaque élément $[s_k^{i+1}]$ du vecteur de solution à l'itération $i + 1$ peut être déduit de chaque élément $[s_k^i]$ du vecteur de solution à l'itération i parce qu'il est solution d'une des deux équations :

$$[\delta_k^i] = [s_k^{i+1}] \oplus [-s_k^i] \text{ ou } [s_k^i] = [s_k^{i+1}] \oplus [-\delta_k^i].$$

Ce qui peut être résumé par (voir section 2.3) :

$$[S^{i+1}] = [S^i] \boxplus [\Delta^i].$$

Notre inversion itératives a un critère d'arrêt simple : le moment à partir duquel la mesure M appartient complètement à l'intervalle $[\underline{M}^i, \overline{M}^i]$, ce qui revient à estimer à quelle itération l'équation (7) est vérifiée. Nous appellerons ce critère, la *convergence d'adéquation*.

4 Expérimentation

Pour expérimenter notre technique nous considérons un signal d'amplitude variable représenté sur la Figure 1. La mesure de

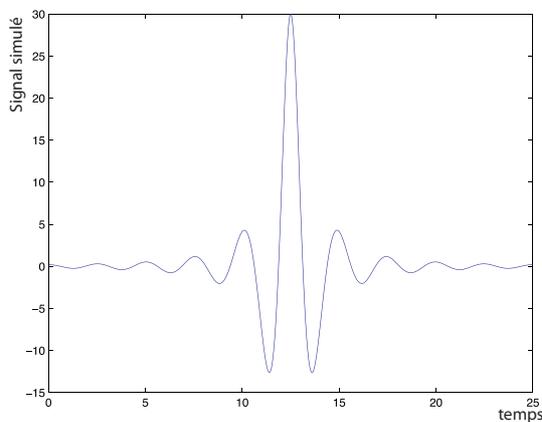


Figure 1 – Signal de test

ce signal est simulée en le convoluant avec la réponse impulsionnelle d'un filtre positif représentée sur la Figure 2. Ce filtre étant causal, la mesure (signal filtré) est en retard par rapport au signal incident (Figure 3).

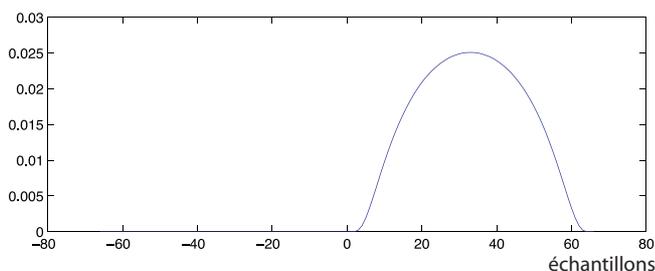


Figure 2 – Réponse impulsionnelle du filtre

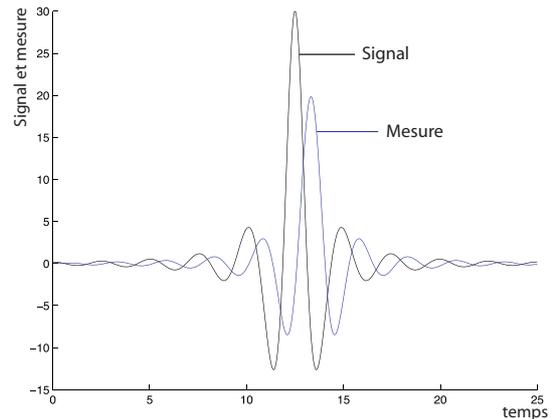


Figure 3 – Superposition signal et mesure

Dans une première expérience, la mesure n'est bruitée que par l'échantillonnage. La capacité dominant le noyau de la Figure 2 est définie par la procédure décrite dans [8]. Nous effectuons 200 itérations pour reconstruire le signal. La Figure 4 présente l'évolution du taux d'échantillons de la mesure M appartenant à l'intervalle $[\underline{M}^i, \overline{M}^i]$ à chaque itération i . On peut constater qu'on obtient la convergence d'adéquation dès 20 itérations. L'évolution de

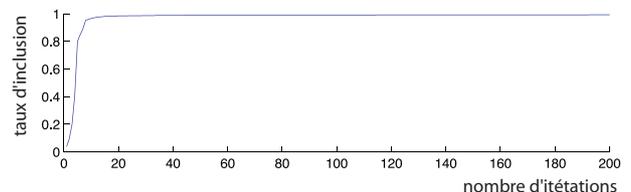


Figure 4 – Convergence faible

la largeur moyenne de l'intervalle de reconstruction est représentée sur la Figure 5. On peut constater que cette largeur se stabilise lorsqu'on obtient la convergence d'adéquation. La Figure 6 présente la superposition du signal reconstruit et du signal simulé. Le bruit de mesure étant uniquement dû à l'échantillonnage (et ce défaut étant modélisé par la capacité utilisée), le signal simulé est presque entièrement inclus dans le signal intervalliste reconstruit. Cette inclusion est complète pour les échantillons de mesure (voir Figure 4).

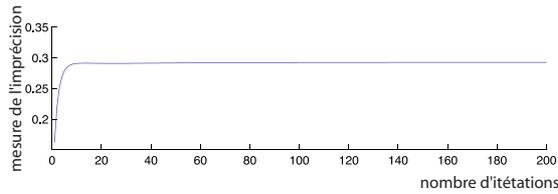


Figure 5 – Largeur moyenne du signal reconstruit

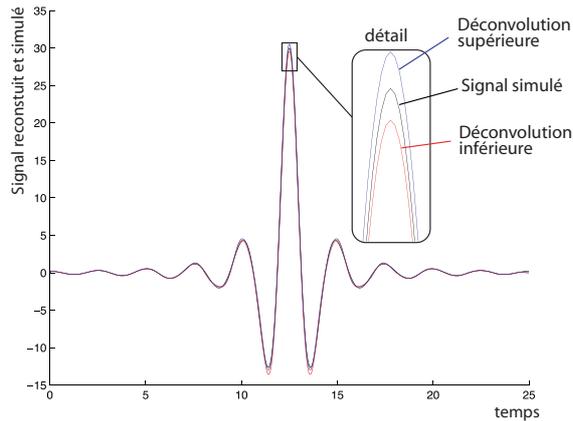


Figure 6 – Signal original et signal reconstruit

Pour la seconde expérience, nous avons ajouté un bruit aléatoire centré sur la mesure pour un rapport signal sur bruit d'environ 40 dB. La Figure 7 présente la superposition de la mesure bruitée et du signal simulé. Dans ce cas, les équations d'inversion n'étant pas régularisées, le bruit de mesure est répercuté sur le signal reconstruit, créant ainsi des artéfacts de reconstruction. La Figure 8 illustre ce fait : le signal original n'est pas inclus dans le signal intervalliste reconstruit. En arrêtant la reconstruction avant la convergence, on régularise partiellement en ce sens que, dans ce type de reconstructions itératives, ce sont toujours les fréquences du signal les plus basses qui sont reconstruites en premier. Par contre, plusieurs propriétés intéressantes apparaissent : La convergence d'adéquation et la stabilisation de la largeur moyenne de l'intervalle de reconstruction (Figure 10) sont très longues à obtenir (Figure 9). Ces deux comportements peuvent être considérés comme des indices de mauvais conditionnement du problème inverse.

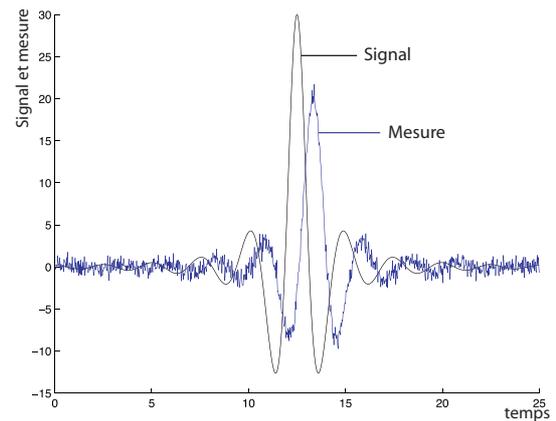


Figure 7 – Superposition signal et mesure bruitée

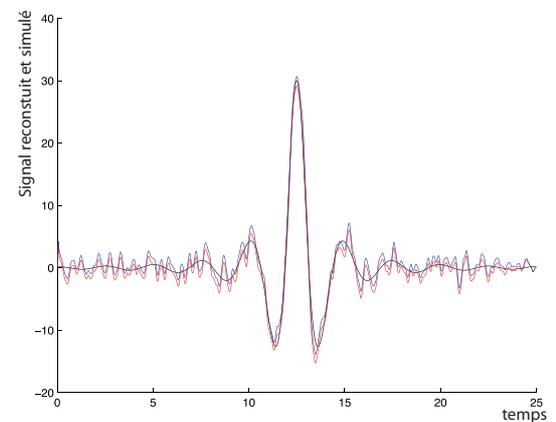


Figure 8 – Signal original et signal reconstruit

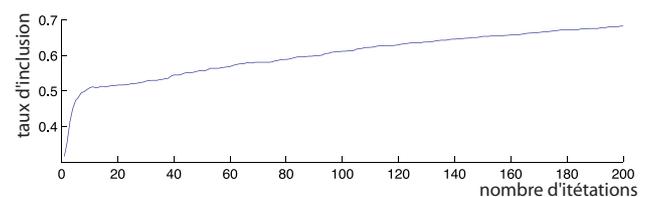


Figure 9 – Convergence faible

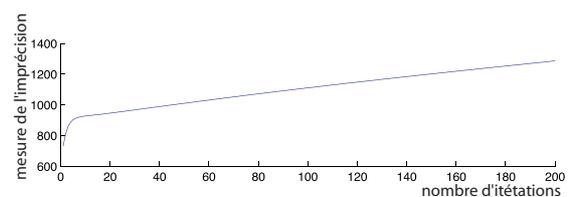


Figure 10 – Largeur moyenne du signal reconstruit

Enfin, cette méthode semble apte à quantifier l'erreur de reconstruction. Pour l'illustrer cette aptitude, nous avons utilisé la procédure de Schultz pour reconstruire le signal en utilisant 50 filtres dont les réponses impulsionnelles sont très proches de la réponse impulsionnelle du filtre de départ. Ces reconstructions sont superposées à la reconstruction imprécise (Figure 11). On peut voir qu'il y a une bonne cohérence entre ces représentations.

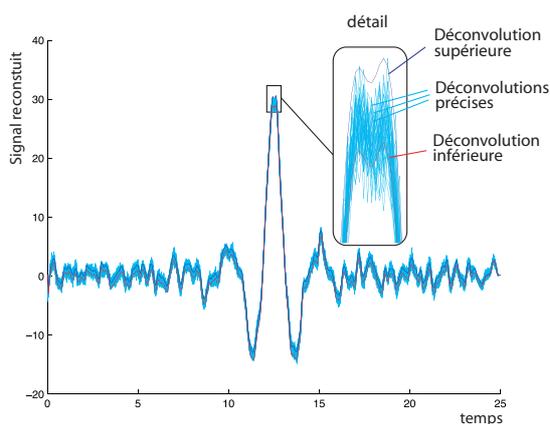


Figure 11 – Superposition de la reconstruction oimprécise avec 50 reconstructions précises

5 Conclusion

La nouvelle technique de déconvolution discrète que nous présentons s'appuie sur une représentation imprécise de la réponse impulsionnelle, permettant d'en modéliser une méconnaissance partielle. Le résultat est un ensemble d'intervalles de signaux échantillonnés reconstruits dont les mesures sont cohérentes avec la représentation imprécise proposée. Ce travail est une première tentative d'inversion du modèle de mesure imprécise proposé dans [8]. Un certain nombre de questions restent en suspend ouvrant vers de nombreuses voies de recherche. Le vecteur intervalliste reconstruit est-il le plus spécifique vérifiant cette propriété? Sinon, est-il possible d'imposer cette spécificité dans la procédure itérative? Peut-on étendre cette approche aux réponses impul-

sionnelles non-positives? Peut-on prendre en compte une imprécision du gain du filtre (σ_h)? Cette technique fonctionne-t-elle avec tout type de capacité concave? Peut-on étendre les techniques usuelles de régularisation à cette représentation imprécise et donc réduire l'apparition d'artefacts (imprécis) sur les signaux reconstruits? Enfin, il serait important de tester cette procédure dans des applications classiques de traitement du signal, et surtout évaluer l'apport cette information intervalliste.

Références

- [1] J. Herzberger, L. Petkovi, Efficient iterative algorithms for bounding the inverse of a matrix, *Computing*, 44(1990), 237-244.
- [2] R. Gordon, R. Bender, G. Herman, Algebraic reconstruction techniques (ART) for three dimensional electron microscopy and x-ray photography., *J. Theor. Bio.* 36 (1970), 105-117.
- [3] P. Eggermont, G. Herman, Iterative Algorithms for Large Partitioned Linear Systems with Applications to Image Reconstruction, *Linear algebra and its applications*, 40 (1981) 37-67.
- [4] M. Grabisch and Ch. Labreuche. The symmetric and asymmetric Choquet integrals on finite spaces for decision making. *Statistical Papers*, 43(2002) 37-52.
- [5] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. Applied Interval Analysis with Exemples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics. *Springer*, 2001.
- [6] A. Rico, O. Strauss and D. Mariano-Goulart. Choquet integrals as projection operators for quantified tomographic reconstruction. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2) : 198-211 (2009).
- [7] K. Loquin, De l'utilisation des noyaux maxitifs en traitement de l'information, *PhD report*, LIRMM, Université Montpellier II, 2008.
- [8] A. Rico, O. Strauss, Imprecise expectations for imprecise linear filtering, *Rapport interne*, LIRMM RR-09011, Université Montpellier II, 2008.
- [9] D. Denneberg. Non-Additive Measure and Integral. *Kluwer*