

La transformation floue imprécise : une façon de gérer les aspects discret-continu en traitement numérique

Imprecise fuzzy transform or how to handle properly discrete representation of continuous problems

O. Strauss

LIRMM, Université Montpellier II, 61 rue Ada, 34095 Montpellier cedex 5, France, e-mail : Olivier.Strauss@lirmm.fr

Résumé :

Dans cet article, nous nous interrogeons sur la différence entre la transformation floue et les techniques de traitement du signal classiques permettant de transférer, dans le domaine discret, un problème défini dans le domaine continu. Nous proposons d'utiliser la représentation de l'échantillonnage par noyaux maxitifs pour justifier de l'utilisation de la théorie des sous-ensembles flous dans ce contexte.

Mots-clés :

Transformation floue, échantillonnage, noyaux sommatifs et maxitifs, théorie des possibilités.

Abstract:

This article proposes a constructive comparison between the so-called fuzzy transform and the classical signal processing method that allows to handle continuous problems with discrete operations. We introduce an imprecise fuzzy transform based on a maxitive kernel based approach.

Keywords:

Fuzzy transform, sampling, summative and maxitive kernels, possibility theory.

1 Introduction

En traitement du signal et de l'information il est souvent nécessaire de passer d'une représentation continue à une représentation discrète pour des raisons calculatoires – par exemple résoudre des équations différentielles, inverser des modèles, réaliser analyses, filtres, etc. La transformation floue [1] semble avoir le même objectif et utiliser les mêmes outils. Ne serait-elle pas, alors, une simple réécriture des transformations discret-continu utilisées en traitement du signal ? Si oui, quel pourrait-être l'apport de ce formalisme, et plus particulièrement de l'utilisation des sous-ensembles flous, dans un tel contexte ? Irina Perfilieva a proposé une réponse intéressante à cette interrogation en développant une trans-

formation floue basée sur les treillis résiduels [1] et aboutissant à un couple de transformations supérieures et inférieures. Nous tentons ici d'aller un peu plus loin dans cette voie en réinterprétant le formalisme de la transformation floue.

2 Rappels, définitions et notations

2.1 Notations

Dans cet article, nous nous intéressons fonctions réelles à une dimension. L'extension des concepts que nous manipulons à des espaces de dimension supérieure est relativement triviale.

Nous notons \mathbb{R} l'ensemble des réels et \mathbb{IR} l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} . Pour ce qui concerne le domaine continu, nous considérons un intervalle réel $\Omega = [\omega_{min}, \omega_{max}] \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ la collection de tous les sous-ensemble mesurables de Ω . Pour ce qui concerne le domaine discret, nous considérons un intervalle de p entiers $\Theta = \{0, \dots, p-1\} \subset \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\Theta)$ la collection de tous les sous-ensemble de Θ .

2.2 Noyaux sommatifs, noyaux maxitifs

Les noyaux sont utilisés en traitement du signal pour définir un voisinage autour d'un élément de Ω . Ce voisinage permet de réaliser des agrégations linéaires.

On appelle **noyau sommatif continu** [2] une fonction continue $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\Omega} \kappa(x) dx = 1$. Une telle fonction définit une mesure de probabilité notée P_{κ} par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P_{\kappa}(A) = \int_A \kappa(x) dx$. On notera $\mathcal{K}(\Omega)$ l'ensemble de tous les noyaux sommatifs sur Ω .

On appelle **noyau maxitif continu** [2] une fonction continue $\pi : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\sup_{\Omega} \pi(x) = 1$. Une telle fonction définit deux mesures de confiance duales sur Ω appelées possibilité (Π_{π}) et nécessité (N_{π}) par : $\Pi_{\pi}(A) = \sup_{x \in A} \pi(x)$ et $N_{\pi}(A) = 1 - \sup_{x \notin A} \pi(x)$. Comme indiqué dans [2], un noyau maxitif continu π définit un sous-ensemble convexe $\mathcal{M}(\pi)$ de noyaux sommatifs continus par : $\mathcal{M}(\pi) = \{\kappa \in \mathcal{K}(\Omega) / \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), N_{\pi}(A) \leq P_{\kappa}(A) \leq \Pi_{\pi}(A)\}$. $\mathcal{M}(\pi)$ est appelé le *cœur*¹ de π .

Ces définitions peuvent aisément être étendues à l'espace discret [2].

On appelle **noyau sommatif discret** une fonction discrète $\eta : \Theta \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{k \in \Theta} \eta(k) = 1$. Une telle fonction définit une mesure de probabilité notée P_{η} par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Theta), P_{\eta}(A) = \sum_{k \in A} \eta(k)$. On notera $\mathcal{K}(\Theta)$ l'ensemble de tous les noyaux sommatifs sur Θ .

On appelle **noyau maxitif discret** une fonction discrète $\pi : \Theta \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\sup_{k \in \Theta} \pi(k) = 1$. Une telle fonction définit deux mesures de confiance duales sur Θ appelées possibilité (Π_{π}) et nécessité (N_{π}) par : $\Pi_{\pi}(A) = \sup_{k \in A} \pi(k)$ et $N_{\pi}(A) = 1 - \sup_{k \notin A} \pi(k)$. De façon analogue au cas continu, un noyau maxitif discret π définit un sous-ensemble convexe $\mathcal{M}(\pi)$ de noyaux sommatifs discrets.

2.3 Les noyaux en traitement des signaux discrets

En traitement du signal, les noyaux sommatifs sont souvent utilisés pour réaliser des opérations discrètes sur des données discrètes équivalentes à des opérations continues sur des données continues [3]. Dans cette approche, on modélise l'échantillonnage d'une fonction (par exemple la fonction de luminance dans le cas d'une image numérique) par la convolution de la fonction continue avec un noyau sommatif. Ce dernier modélise la réponse impulsionnelle du capteur utilisé. L'échantillonnage est illustré par la Figure 1. Il fait intervenir $\kappa \in \mathcal{K}(\Omega)$,

un noyau sommatif d'échantillonnage, et produit $\{F_k\}_{k \in \Theta}$, la représentation échantillonnée de la fonction continue f , par :

$$\forall k \in \Theta, F_k = \int_{\Omega} f(x) \kappa(\omega_k - x) dx, \quad (1)$$

avec $\omega_k = \omega_{min} + k\Delta$ et Δ étant le pas d'échantillonnage (voir Figure 1). L'échantillonnage est dit *parfait* lorsque $F_k = f(\omega_k)$, ce qui n'est obtenu que lorsque le noyau d'échantillonnage est δ la fonction associée à la distribution de Dirac. Sinon, F_k est une version *lissée* de cet échantillonnage parfait : $F_k = g(\omega_k)$, avec $g = f \otimes \kappa$, \otimes symbolisant le produit de convolution².

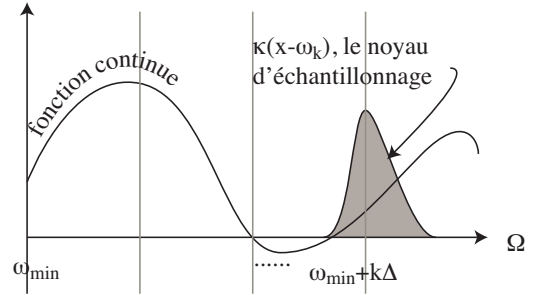


Figure 1 – Échantillonnage.

Dû à l'échantillonnage, une partie de l'information disparaît. On admet généralement que f est connue au travers de sa version échantillonnée f^* (ou g^*) = $\sum_{k \in \Theta} F_k \delta(x - \omega_k)$. La reconstruction de \hat{f} , une estimation de f , n'est possible que si l'échantillonnage respecte les conditions de Shannon qui imposent à la période d'échantillonnage Δ d'être inférieure à $\frac{1}{2\nu_{max}}$, ν_{max} étant la plus haute fréquence du signal f . Elle impose aussi au noyau d'échantillonnage κ d'avoir un support **au plus** égal à 2Δ . Cette reconstruction est alors obtenue en convoluant f^* avec la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas (voir Figure 2). Ce filtrage revient à interpoler F , en chaque $x \in \Omega$, à l'aide d'un noyau d'interpolation η^x qui, contrairement au noyau d'échantillonnage, n'est pas invariant par trans-

1. Traduction approximative du terme *core*

2. $\forall x \in \Omega, (f \otimes \kappa)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \kappa(x - u) du$

lation. Cette interpolation s'écrit :

$$\forall x \in \Omega, \hat{f}(x) = \sum_{k \in \Theta} F_k \eta^x(k). \quad (2)$$

On rajoute généralement des contraintes supplémentaires sur le noyau d'interpolation de façon à ce que \hat{f} soit le plus proche possible de $g = f \otimes \kappa$ au sens de la norme L_2 , ou pour réaliser un compromis entre temps de calcul et optimisation de la reconstruction. Unser [3] a

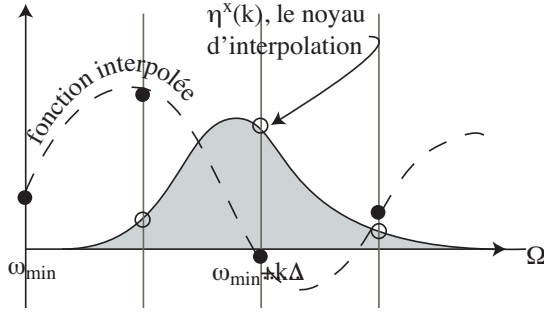


Figure 2 – Interpolation d'une fonction discrète.

proposé d'utiliser les noyaux splines (sommatis) pour réaliser cette paire échantillonnage / interpolation. L'idée sous-jacente à ce qu'il appelle l'*adéquation parfaite* est de proposer un couple (κ, η) tel qu'il y ait identité entre f et \hat{f} en chaque position d'échantillonnage : $\hat{f}(\omega_k) = f(\omega_k)$. Une telle contrainte aboutit à définir le noyau d'interpolation comme échantillonnage de l'inverse de la transformée de Laplace inverse du noyau d'échantillonnage, ce qui se définit très simplement avec des noyaux splines. Cette technique nécessite la connaissance du noyau d'échantillonnage. Sinon le couple (κ, η) est arbitrairement choisi pour réaliser le compromis sus-cité.

Le couple échantillonnage / interpolation est un approximateur universel au sens où il existe toujours un triplet (Δ, κ, η) permettant de rendre la distance entre f et \hat{f} inférieure à une borne prédéfinie.

2.4 Espérance précise, espérance imprécise

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée L_1 de Ω dans \mathbb{R} et κ un noyau sommatif de $\mathcal{K}(\Omega)$, on

appelle espérance de f dans le voisinage défini par κ la valeur $\mathbb{E}_\kappa(f)$ définie par :

$$\mathbb{E}_\kappa(f) = \int_0^\infty f dP_\kappa = \int_\Omega f(x) \kappa(x) dx. \quad (3)$$

Cette notion d'espérance peut aisément être étendue aux noyaux maxitif. Soit π un noyau maxitif de Ω dans $[0, 1]$, on appelle espérance imprécise de f dans le voisinage défini par π l'intervalle $\overline{\mathbb{E}}_\pi(f)$ définie par :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}_\pi(f) &= [\underline{\mathbb{E}}_\pi(f), \overline{\mathbb{E}}_\pi(f)] \\ &= [\mathbb{C}_{N_\pi}(f), \mathbb{C}_{\Pi_\pi}(f)], \end{aligned} \quad (4)$$

\mathbb{C}_ν étant l'intégrale asymétrique de Choquet définie par rapport à la capacité ν [4]. Une propriété issue des travaux de Denneberg [5] relie l'espérance précise à l'espérance imprécise.

Propriété 1 Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée L_1 de Ω dans \mathbb{R} et π un noyau maxitif de Ω , $\forall \kappa \in \mathcal{M}(\pi)$, $\mathbb{E}_\kappa(f) \in \overline{\mathbb{E}}_\pi(f)$ et $\forall y \in \overline{\mathbb{E}}_\pi(f)$, $\exists \kappa \in \mathcal{M}(\pi)$ tel que $y = \mathbb{E}_\kappa(f)$.

On peut aussi définir l'opérateur espérance dans l'espace discret. Soit $F : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée de Θ dans \mathbb{R} . Soit η un noyau sommatif de $\mathcal{K}(\Theta)$, l'espérance de F dans le voisinage défini par η est $\mathbb{E}_\eta(F)$ définie par :

$$\mathbb{E}_\eta(F) = \sum_{k \in \Theta} F_k \eta(k). \quad (5)$$

Soit π un noyau maxitif de Θ dans $[0, 1]$, on appelle espérance imprécise de F dans le voisinage défini par π l'intervalle $\overline{\mathbb{E}}_\pi(F)$ définie par :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}_\pi(F) &= [\underline{\mathbb{E}}_\pi(F), \overline{\mathbb{E}}_\pi(F)] \\ &= [\mathbb{C}_{N_\pi}(F), \mathbb{C}_{\Pi_\pi}(F)], \end{aligned} \quad (6)$$

\mathbb{C}_ν étant l'intégrale asymétrique de Choquet discrète définie par rapport à la capacité discrète ν . La propriété 1 est vraie aussi dans le cas discret.

L'échantillonnage comme l'interpolation peuvent être réécrits comme des espérances. En effet, en posant κ^k comme étant le noyau κ translaté en ω_k , alors l'échantillonnage de f par κ s'écrit : $F_k = \mathbb{E}_{\kappa^k}(f)$. De même, en considérant le noyau η^x défini en section 2.3, la reconstruction de f s'écrit : $\hat{f}(x) = \mathbb{E}_{\eta^x}(F)$

3 Transformation floue

La transformation floue (ou F-transform) a été fortement théorisée par Irina Perfilieva. Elle peut être vue comme la décomposition d'une fonction connue sur une partition floue de son ensemble de définition. Le calcul arithmétique sur les nombres flous peut alors être utilisé pour réaliser des opérations approximatives sur la (ou les) fonction(s) décomposée(s) aboutissant à leur modification ou à leur analyse. La transformation inverse permet alors de recomposer la fonction originale après manipulation.

3.1 Transformation directe

Soit une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\{C_k\}_{k \in \Theta}$ une partition floue de p cellules sur Ω , i.e. un ensemble d'intervalles flous monomodaux et symétriques vérifiant [1, 6] $\forall x \in \Omega$:

- $\sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) = 1$,
- $\exists ! k \in \Theta, \mu_{C_k}(x) > 0, \mu_{C_{k+1}}(x) \geq 0$,
- $\forall k \in \Theta, \mu_{C_k}$ est continue.

Une des façons les plus simple d'obtenir une partition floue *régulière* est de définir un sous-ensemble flou monomodal centré E de support borné $[-\Delta, \Delta]$ avec $\Delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{p}$, et d'en déduire les cellules C_k par $\forall x \in \Omega, \mu_{C_k}(x) = \mu_E(x - \omega_k)$, en posant $\omega_k = \omega_{min} + k\Delta$. Pour que $\{C_k\}_{k \in \Theta}$ soit une partition floue, le sous-ensemble flou E doit vérifier $\forall x \in [0, \frac{\Delta}{2}]$, $\mu_E(x) = 1 - \mu_E(\Delta - x)$.

Propriété 2 La granularité³ [2] du sous-ensemble flou E , définie par $\gamma(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu_E(x) dx$, est égale à Δ .

Preuve Du à la symétrie de E , $\int_{\mathbb{R}} \mu_E(x) dx = \int_{-\Delta}^{\Delta} \mu_E(x) dx = 2 \int_0^{\Delta} \mu_E(x) dx$. Or $\int_0^{\Delta} \mu_E(x) dx = \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \mu_E(x) dx + \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} \mu_E(x) dx = \int_0^{\frac{\Delta}{2}} 1 - \mu_E(\Delta - x) dx + \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} \mu_E(x) dx = \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} 1 - \mu_E(x) dx + \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} \mu_E(x) dx = \frac{\Delta}{2}$
□

La transformation floue de la fonction f est alors définie comme l'ensemble $\{F_k\}_{k \in \Theta}$ ob-

tenu en décomposant f sur la partition floue :

$$\forall k \in \Theta, F_k = \frac{\int_{\Omega} f(x) \mu_{C_k}(x) dx}{\int_{\Omega} \mu_{C_k}(x) dx}. \quad (7)$$

Les utilisateurs de la transformation floue vont souvent jusqu'à considérer toute suite $\{F_k\}_{k \in \Theta}$ comme une transformation floue [1]. Ce n'est pas tout à fait faux car, à première vue, l'équation (7) ressemble beaucoup à l'équation d'échantillonnage d'une fonction réelle définie en section 2.3. En fait, une transformation floue n'est autre qu'un échantillonnage sur p valeurs à l'aide d'un noyau κ défini par $\forall x \in [-\Delta, \Delta], \kappa(x) = \mu_E(-x) / \int_{-\Delta}^{\Delta} \mu_E(x) dx$. Ce noyau est sommatif continu car il est positif et $\int_{\mathbb{R}} \kappa(x) dx = 1$ par construction. Il y a alors identité des expressions (1) et (7).

3.2 Transformation inverse

Comme son nom l'indique, la transformation floue inverse doit être perçue comme l'inversion de l'équation (7). Elle consiste en fait à obtenir une estimation \hat{f} la fonction f , dont la transformation floue est F , par :

$$\forall x \in \Omega, \hat{f}(x) = \sum_{k \in \Theta} F_k \mu_{C_k}(x). \quad (8)$$

L'expression (8) coïncide avec l'expression (2) en posant simplement $\eta^x(k) = \mu_{C_k}(x)$. Par construction η^x est un noyau sommatif discret vérifiant les propriétés nécessaires. Mieux encore, en considérant la deuxième partie de la définition de la partition floue, on se rend compte que c'est une interpolation linéaire : en posant $k(x)$ l'entier tel que $x - \Delta < k(x)\Delta + \omega_{min} \leq x$ on a :

$$\forall x \in \Omega, \hat{f}(x) = \alpha F_{k(x)} + (1 - \alpha) F_{k(x)+1}, \quad (9)$$

avec $\alpha = \mu_{C_{k(x)}}(x)$.

Cette interpolation fait intervenir un noyau d'interpolation η^x défini pour chaque $x \in \Omega$ par $\eta^x(k(x)) = \alpha, \eta^x(k(x) + 1) = 1 - \alpha$, et $\eta^x(k) = 0$ si $k \in \mathbb{N} / \{k(x), k(x) + 1\}$.

3. mesure de non-spécificité d'un sous-ensemble flou qui influence la granularité du partitionnement

Propriété 3 La transformation floue munie de la transformation floue inverse est un approximateur universel [1] au sens où, quelle que soit la précision demandée, il existe un sous-ensemble $\Theta \in \mathbb{N}$ et une partition floue décomposant f en $\{F_k\}_{k \in \Theta}$ telle que $\|f - \hat{f}\|$ soit inférieure à la précision souhaitée.

Propriété 4 Soit E un sous-ensemble flou permettant de générer une partition floue $\{C_k\}_{k \in \Theta}$ comme indiqué en section 3.1. Soient f une fonction de Ω dans \mathbb{R} , F sa décomposition sur la partition floue (7) et \hat{f} l'interpolation de F sur Ω (8), alors \hat{f} est la convolution de f par le noyau sommatif φ^x défini en chaque $x \in \Omega$ par : $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi^x(u) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) \mu_{C_k}(u)$.

Preuve L'expression de φ^x découle de (7) et (8) : $\forall x \in \Omega, \hat{f}(x) = \sum_{k \in \Theta} F_k \mu_{C_k}(x)$, or $F_k = \frac{1}{\Delta} \int_{\Omega} f(u) \mu_{C_k}(u) du$, d'où $\hat{f}(x) = \int_{\Omega} f(u) \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) \mu_{C_k}(u) \right) du = \int_{\Omega} f(u) \varphi^x(u) du$. Le noyau φ^x est positif par construction. D'autre part $\int_{\Omega} \varphi^x(u) du = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) \mu_{C_k}(u) \right) du = \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) \left(\int_{\Omega} \mu_{C_k}(u) du \right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) \Delta = \sum_{k \in \Theta} \mu_{C_k}(x) = 1$. φ^x est donc un noyau sommatif. \square

L'approximation de f par \hat{f} est fonction de la spécificité de φ^x qui dépend directement de Δ , la granularité de la partition.

3.3 Discussion

Le terme de *transformation floue* est un peu trompeur et la comparaison qui en est faite avec les transformations de Laplace, de Fourier, de Radon ou les ondelettes [1] peut sembler exagérée. En effet, dans ces dernières, la transformation inverse est une inversion de la transformation au sens où, si F est la transformation directe de f alors f est la transformation inverse de F . Ce n'est pas vrai pour la transformation floue parce que c'est un échantillonnage et que l'échantillonnage fait perdre de l'information. Tout au mieux peut-on minimiser la distance entre la fonction reconstruite \hat{f} et la fonction

originale f moyennant la connaissance a-priori des conditions d'échantillonnage (κ et Δ).

Le couple transformation floue / transformation floue inverse revient à définir un couple de noyaux d'échantillonnage et d'interpolation définis à partir du même sous ensemble flou E . Ce choix est justifié par Perfilieva [1] en montrant que le noyau interpolateur défini par E est l'interpolateur linéaire qui minimise la distance entre f et \hat{f} . Ce choix de reconstruire avec une interpolation linéaire ne peut être justifié (au sens du traitement du signal classique) que par une volonté de réduction du temps de calcul ou une minimisation du risque de se tromper d'interpolateur (au cas où le noyau d'échantillonnage serait mal connu).

Enfin, la seule différence existant entre la transformation floue et le schéma classique échantillonnage / interpolation est la contrainte supplémentaire imposée au couple de noyaux (κ, η). Ainsi, si la théorie classique de l'échantillonnage préconise un noyau de spécificité la plus grande possible (au sens de l'entropie), au contraire la transformation floue impose un noyau dont la spécificité est la plus petite possible (i.e. $[-\Delta, \Delta]$). On peut alors se poser légitimement la question de *l'apport du flou* dans ce contexte. L'argument d'approximateur universel n'est pas suffisant puisque cette propriété est déjà acquise dans le schéma classique interpolation / échantillonnage.

Nous proposons dans cet article de revisiter la transformation floue, justifiant ainsi l'utilisation de la théorie des sous-ensembles flous dans l'approche classique.

4 Transformation imprécise

La nouvelle approche que nous proposons s'appuie sur l'extension de la convolution proposée dans [7]. Dans cette approche, nous considérons le sous-ensemble flou E , permettant de générer la partition floue $\{C_k\}_{k \in \Theta}$, comme un noyau maxitif [2].

4.1 Transformation imprécise directe

Soit E un sous ensemble flou symétrique permettant de définir une partition floue par $\mu_{C_k}(x) = \mu_E(x - \omega_k)$, comme défini en section 3.1, la transformation floue imprécise est définie par :

$$\underline{F}_k = [\underline{F}_k, \overline{F}_k] = \underline{E}_{\pi^k}(f) = [\underline{E}_{\pi^k}(f), \overline{E}_{\pi^k}(f)], \quad (10)$$

en posant $\pi = \mu_E$ et $\pi^k = \mu_{C_k}$.

Propriété 5 Soit π un noyau maxitif, soit f une fonction de Ω dans \mathbb{R} , $\forall \kappa \in \mathcal{M}(\pi)$, la fonction discrète précise F de Θ dans \mathbb{R} obtenue par échantillonnage de f via κ (1) est incluse dans l'intervalle \underline{F} obtenu par transformation floue imprécise de f via π (10). De même soit \overline{F} de Θ dans \mathbb{R} la transformation floue imprécise de f via π (10), $\forall F \in \overline{F}^4$, $\exists \kappa \in \mathcal{M}(\pi)$, tel que F soit obtenue par échantillonnage de f via κ (1).

Preuve Il suffit de remarquer que si κ est un noyau sommatif, alors l'échantillonnage de f via κ peut s'écrire $\forall k \in \Theta$, $F_k = \mathbb{E}_{\kappa^k}(f)$, κ^k étant le noyau κ translaté en ω_k . La transformation floue de f sur Θ via la partition $\{C_k\}_{k \in \Theta}$ étant définie en translatant le sous ensemble flou E en chaque ω_k , elle peut s'écrire comme une espérance imprécise : $\forall k \in \Theta$, $\underline{F}_k = \underline{E}_{\pi^k}(f)$ avec $\pi^k = \mu_{C_k}$. La propriété 1 induit alors la double inclusion. \square

Remarque 1 Comme montré dans [2] en s'appuyant sur [8], les noyaux maxitifs symétriques triangulaires de support $[-\Delta, \Delta]$ sont les plus spécifiques contenant tous les noyaux sommatifs symétriques de support $[-\delta, \delta] \subseteq [-\Delta, \Delta]$. De cette propriété, ainsi que des deux propriétés précédentes, découle qu'une transformation floue imprécise définie sur Ω utilisant une partition générée par un sous-ensemble flous triangulaire de support $[-\Delta, \Delta]$ contient toute fonction échantillonnée avec un noyau sommatif d'échantillonnage de support $[-\delta, \delta] \subseteq [-\Delta, \Delta]$ en chaque position ω_k ($k \in \Theta$).

4. c'est à dire que $\forall k \in \Theta$, $F_k \in \underline{F}_k$

Remarque 2 La transformation floue étant un cas particulier d'échantillonnage avec un noyau sommatif de support égal à $[-\Delta, \Delta]$, toute transformation floue tel que définie par (7) utilisant un noyau maxitif triangulaire symétrique est incluse dans la transformation floue imprécise tel que définie par (10).

4.2 Transformation imprécise inverse

Soit π^x une distribution de possibilité définie sur Θ pour tout $x \in \Omega$ telle que, en posant en posant $k(x)$ l'entier tel que $\omega_{k(x)} < x \leq \omega_{k(x)+1}$, π^x est une fonction qui décroît avec $|k - k(x)|$, on définit la transformation floue imprécise inverse par :

$$\underline{f}(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)] = \underline{E}_{\pi^x}(F), \quad (11)$$

la distribution de possibilité π^x ainsi définie est appelée noyau maxitif d'interpolation en x .

Propriété 6 $\forall x \in \Omega$, π^x étant un noyau d'interpolation maxitif permettant de reconstruire $\underline{f}(x) \in \mathbb{R}$ à partir de $F : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ (11), quelque soit η^x un noyau d'interpolation sommatif de $\mathcal{M}(\pi^x)$ permettant de reconstruire $\hat{f}(x) \in \mathbb{R}$ à partir de F (8), on a $\hat{f}(x) \in \underline{f}(x)$. Inversement, $\forall y \in \underline{f}(x)$, $\exists \eta^x \in \mathcal{M}(\pi^x)$ tel que $y = \hat{f}(x)$, $\hat{f}(x)$ étant l'interpolation de F par η^x (8).

Preuve La preuve de la propriété 6 est triviale. Il suffit de remarquer que $\hat{f}(x) = \mathbb{E}_{\eta^x}(F)$ et $\underline{f}(x) = \underline{E}_{\pi^x}(F)$ et d'utiliser la propriété 1. \square

Remarque 3 La transformation floue inverse, dans sa version imprécise, revêt alors un grand intérêt dans les applications nécessitant du calcul garanti [9] à partir de la reconstruction d'un signal lorsque le noyau d'échantillonnage est mal connu. En effet, dans ce cas, en utilisant un noyau maxitif approprié dominant avec certitude le noyau d'interpolation nécessaire, il est possible de garantir l'inclusion du signal vrai dans le signal intervalliste reconstruit. Reste maintenant à définir des règles de construction de tels noyaux maxitifs. Un

bon candidat pourrait être le noyau $\pi^x : \Theta \rightarrow [0, 1]$ défini par $\forall k \in \Theta, \pi^x(k) = \int_0^1 \sup_{u \in \Omega} \{\mu_{C_k}(u) : \mu_E(x - u) \geq \alpha\} d\alpha$.

Remarque 4 Si la fonction F_k est imprécise car issue de la transformation floue imprécise proposée en section 4.1, l'approximation inférieure est obtenue par estimation inférieure de la transformation inférieure : $\underline{f}(x) = \underline{E}_{\pi^x}(F)$ et l'approximation supérieure est obtenue par estimation supérieure de la transformation supérieure : $\overline{f}(x) = \overline{E}_{\pi^x}(F)$. Cette propriété est due au fait que l'intégrale de Choquet est un opérateur croissant [11].

4.3 Discussion

Cette étude est préliminaire. Encore beaucoup de travail est nécessaire pour terminer la construction complète de cette transformation floue. Le but ultime de ce travail serait de définir un couple de transformations, directe et inverse, telles que la fonction précise f soit incluse dans la fonction imprécise \overline{f} recomposée. Il serait bien sûr souhaitable que la fonction imprécise recomposée soit la plus spécifique possible.

Dans l'espace binaire une telle transformation est très simple à définir. Soit $\{B_k\}_{k \in \Theta}$ une partition binaire de p cellules définies par $B_k = [\omega_k - \frac{\Delta}{2}, \omega_k + \frac{\Delta}{2}[$ et $\omega_k = \omega_{min} + k\Delta$. La décomposition imprécise de f sur la partition binaire est alors donnée par $\forall k \in \Theta$:

$$\overline{F}_k = [\underline{F}_k, \overline{F}_k] = [\inf_{x \in B_k} f(x), \sup_{x \in B_k} f(x)]. \quad (12)$$

La transformation imprécise inverse est alors donnée par $\forall x \in \Omega$:

$$\overline{f}(x) = [\underline{\mathbb{E}}_{\pi^x}(F), \overline{\mathbb{E}}_{\pi^x}(F)], \quad (13)$$

$\pi^x = \chi_{I^x}$ étant le noyau maxitif binaire défini par l'intervalle $I^x = [x - \frac{\Delta}{2}, x + \frac{\Delta}{2}[_{B_k}$. Par construction, on vérifie aisément la propriété d'inclusion souhaitée. La fonction intervalliste ainsi reconstruite n'est pas très spécifique et n'est pas stable par translation du domaine de définition. Elle est cependant plus spécifique

que l'approche par treillis résiduels proposée par Perfilieva dans [1].

Dans la remarque 3, nous proposons un noyau d'interpolation maxitif. Ce noyau n'est autre que l'échantillonnage du noyau continu $\pi^x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\forall \omega \in \Omega, \pi^x(\omega) = \int_0^1 \sup_{u \in \Omega} \{\mu_E(u - \omega) : \mu_E(x - u) \geq \alpha\} d\alpha$ qui est le plus spécifique dominant le noyau φ^x défini dans la propriété 4 [12].

5 Expérimentation

Nous proposons d'illustrer notre propos en reprenant l'expérience d'Irina Perfilieva [1]. Elle consiste à échantillonner puis reconstruire un signal donné par $\forall x \in \Omega = [0, 1], f(x) = |\sin 2\pi x|$. Dans l'approche de Perfilieva, le signal doit être ramené à un intervalle $[0, 1]$ pour être compatibles avec des opérations de logique floue qu'elle utilise. Les trois expériences utilisent une partition de 21 cellules de Ω . Sur les figures 3, 4 et 5 sont représentées la fonction f (en gras) son approximation supérieure \overline{f} et son approximation inférieure \underline{f} . La figure (3) présente la reconstruction de la fonction f par l'approche utilisant les treillis résiduels ([1] p. 1018). La figure (4) présente la reconstruction de f après décomposition et recomposition binaire comme proposé dans la section 4.3. Enfin la figure (5) présente une reconstruction de f basée sur sa décomposition imprécise sur une partition floue triangulaire et un noyau maxitif d'interpolation tel que défini dans la remarque 3.

Dans l'approche binaire (figure (4)) la fonction f est entièrement incluse dans son approximation imprécise. Elle n'est pas très spécifique. Par contre, la distance de $\overline{f}(x)$ et de $f(x)$ est très dépendante de la position de x avec les points d'échantillonnage, ce qu'on retrouve dans l'approche par treillis résiduels (figure (3)). Dans l'approche imprécise floue (figure (5)), comme dans l'approche par treillis résiduels (figure (3)) f sort des bornes d'estimation imprécise lorsque la fonction n'est pas suffisamment lisse, ce qui est le cas en $x = 0.5$ où la fonction n'est pas dérivable. Avec la transformation

imprécise, la reconstruction imprécise est beaucoup plus spécifique que dans les deux autres cas. Dans l'approche par treillis résiduels, la fonction f doit être normalisée pour être à valeur dans $[0, 1]$ ce qui interdit toute récursivité. Ce n'est pas le cas dans les approches que nous proposons.

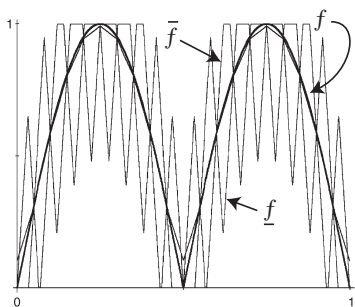


Figure 3 – Reconstruction par la méthode des treillis résiduels (figure extraite de [1])

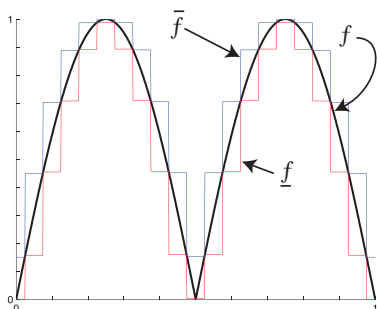


Figure 4 – Reconstruction par la méthode binaire discutée dans la section 4.3

6 Conclusion

Nous avons proposé, dans cet article, de redéfinir la transformation floue comme une transformation imprécise permettant de gérer l'erreur d'approximation induite par l'échantillonnage d'un problème continu. Beaucoup de travail reste à faire pour parvenir à un couple de transformations garantissant l'inclusion de la fonction continue originale dans la fonction imprécise recomposée. Actuellement, tout au plus, peut on garantir l'inclusion de tout échantillonnage d'une fonction dans sa transformation floue imprécise. Il serait intéressant

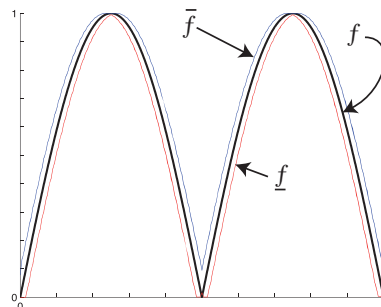


Figure 5 – Reconstruction par la méthode possibiliste utilisant un noyau maxitif triangulaire

de pouvoir inverser cette propriété et de trouver un noyau maxitif discret permettant d'obtenir, à partir d'une fonction discrète, l'intervalle le plus spécifique possible contenant la fonction originale.

Références

- [1] I. Perfilieva. Fuzzy transforms : Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (2006), 993-1023.
- [2] K. Loquin, O. Strauss, On the granularity of summative kernels, *Fuzzy Sets and Systems* 159 (2008), 1952-1972.
- [3] M. Unser, A. Aldroubi. B-Spline Signal processing : Part I-Theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41 (1993), 821-833.
- [4] M. Grabisch, C. Labreuche. The symmetric and asymmetric Choquet integrals on finite spaces for decision making. *Statistical Papers*, 43 (2002), 37-52.
- [5] D. Denneberg. Non-Additive Measure and Integral. *Kluwer* 1994.
- [6] E. Ruspini. New Experimental Results in Fuzzy. *Information Sciences*, 6 (1973), 273-284.
- [7] K. Loquin, O. Strauss, Linear filtering and mathematical morphology on an image : a bridge, *IEEE International Conference on Image Processing, ICIP 2009 Le Caire, Égypte* (2009), 3965-3968.
- [8] D. Dubois, H. Prade, L. Foulloy and G. Mauris. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets, and Probabilistic Inequalities, *Reliable Computing*, 10(2004) 273-297.
- [9] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, E. Walter. Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, *Springer*, 2001.
- [10] D. Dubois. Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2006) 47-69.
- [11] A. Rico, O. Strauss, Imprecise expectations for imprecise linear filtering, *Rapport interne*, LIRMM RR-09011, Université Montpellier II, 2008.
- [12] O. Strauss. Quasi-continuous histograms. *Fuzzy Sets and Systems*, 160 (2009), 2442-2465.