

Etude de la robustesse des arbres couvrant de poids minimum dans le cadre du tatouage 3D

N. Tournier^{1,2}, W. Puech¹, G. Subsol¹ et J-P. Pedeboy²

¹ LIRMM, Univ. Montpellier II, CNRS
161 rue Ada, 34392 Montpellier, FRANCE ;

² Strategies S.A., 41-43 rue de Villeneuve, Parc des Affaires SILIC - BP 80429
94583 Rungis, FRANCE.

Abstract

En stéganographie et tatouage 3D, la synchronisation des données à cacher est l'un des principaux problèmes. Nous devons savoir où se trouve le message que nous avons dissimulé dans le médium pour pouvoir l'extraire correctement. De nombreux algorithmes de tatouage 3D ont été proposés ces dernières années. Dans cet article, nous nous intéressons particulièrement à une méthode de synchronisation basée sur le calcul d'arbre couvrant euclidien de poids minimum (EMST : Euclidean minimum spanning tree) sur un nuage de points. Dans notre approche, nous analysons la stabilité des EMST, et nous proposons une méthode théorique de mesure. A partir de cette analyse, nous présentons des résultats sur la localisation et la visualisation de zones robustes utilisables pour une méthode de synchronisation par EMST.

In 3D steganography and watermarking, the synchronization of the hidden data is a major problem. We need to know where the message is embedded in order to extract the correct information. Various algorithms have been proposed for the last couple of years and we focused on a method based on Euclidean minimum spanning tree (EMST) for the mesh vertices. In this paper we analyze the sensitivity of the EMST structure in order to propose a new method more robust. We present and demonstrate the theoretical analysis and we propose our first techniques to predict the robustness of the EMST. Moreover, we can apply this analysis to various applications that can be useful in 3D steganography such fragile area detection and prediction of the 3D object robustness during transmission on a noisy channel.

1. Introduction

De nos jours, Internet est indispensable pour la diffusion de données multimédia. De plus en plus d'objets 3D sont transmis en infographie ou CAO par exemple. Il est important d'une part, de protéger ces données et d'autre part, de pouvoir y associer des informations supplémentaires. L'insertion de données cachées peut répondre à ces attentes.

La stéganographie et le tatouage sont deux domaines de dissimulation de contenu, dont une récente étude a été proposée pour la 3D par Wang *et al.* [WLDB08]. L'objectif est de transmettre un message m dissimulé dans un signal hôte c_0 (image, vidéo, objet 3D). Le message m est codé en prenant en compte les caractéristiques du signal hôte c_0 . Nous obtenons une marque w_a qui est ajoutée au signal c_0

pour obtenir le signal tatoué c_w qui est transmis sur le canal. A la réception, à partir du signal tatoué transmis c'_w , le message m' est extrait et décodé.

Lors de l'insertion du message nous devons savoir où se sont réparties les informations binaires dans le maillage afin de pouvoir les extraire. Il s'agit du processus de synchronisation des données, un des problèmes majeurs du tatouage et de la stéganographie 3D.

De nombreuses méthodes ont été proposées, et nous nous intéressons à la synchronisation par le calcul d'un EMST proposé par Amat *et al.* [APDP08]. Un EMST $T = (V, E_T)$ est un arbre couvrant de poids minimum (MST : Minimum spanning tree), c'est-à-dire un arbre qui relie tous les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ en utilisant les arêtes $e_i =$

$\{v_s, v_t\} \in E$ de poids $\omega(e_i) \in \mathbb{R}^+$ qui minimise le poids total de toutes les arêtes $e_j \in E_T$.

L'originalité de la méthode proposée par Amat *et al.* est de ne déplacer aucun sommet lors du tatouage et de synchroniser le message à l'aide d'un EMST afin de parcourir les sommets du maillage de manière unique. Nous illustrons, Figure 1.a, un maillage et l'EMST correspondant en Figure 1.b.

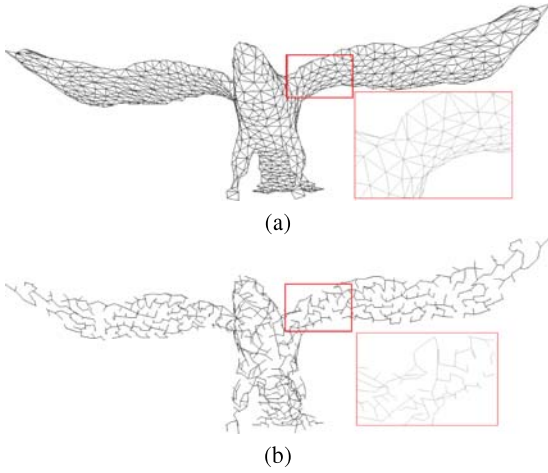


Figure 1: Illustration 3D: a) Maillage 3D, b) EMST correspondant calculé par l'algorithme de Prim [Pri57].

Afin de dissimuler un message dans un maillage, Amat *et al.* analysent dans l'EMST l'ensemble des quadruples qui vérifient différentes conditions de coplanarité, convexité et chevauchement. Ces quadruples sont utilisés pour le tatouage, et restent détectables après l'insertion du message. Néanmoins, cette méthode est très fragile à toute modification de la position des sommets. C'est pourquoi nous nous intéressons à la sensibilité des EMST dans le but de localiser les zones les plus robustes pour ce genre de synchronisation.

Pour chaque sommet, nous proposons de calculer son déplacement possible tout en gardant les mêmes connexions dans l'arbre final. Le problème étant très difficile, nous ajoutons quelques hypothèses afin de se simplifier les conditions d'étude.

Nous présentons, en section 2, un état de l'art sur la sensibilité des EMST. En section 3, nous proposons notre analyse théorique de la sensibilité des EMST. En section 4, nous montrons des résultats expérimentaux de notre approche. Enfin, nous concluons et présentons des perspectives en section 5.

2. Sensibilité des MST

Selon Gordeev [Gor99, Gor01] la sensibilité des MST est un problème d'optimisation basé sur des représentations mathématiques appelées matroïdes. Soit un graphe $G = (V, E)$ avec

n sommets et m arêtes. Gordeev considère le modèle suivant. Soient $D_m = \{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ avec ($q > 1$), une partie de E appelée trajectoires ; un vecteur $A = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que $\forall i a_i = \omega(e_i)$ correspondant aux poids des arêtes du graphe et $\tau(A)$ la longueur de la trajectoire pour un vecteur A avec $\tau(A) = \sum_{e_i \in \tau} a_i$.

Le problème combinatoire est défini par la paire (E, D_m) où A est la variable à optimiser pour minimiser la fonction $\tau(A)$. Avec ce modèle, Gordeev fait l'analogie avec le problème de calcul d'un MST avec D_m qui est l'ensemble des arbres couvrants de G dans lequel le MST minimise la fonction $\tau(A)$.

Soit $\Psi(A)$ l'ensemble des indices i des trajectoires optimales τ_i du problème donné pour un vecteur A , et $B \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|B\| < \epsilon$ un vecteur perturbateur. Gordeev parle de ϵ -stabilité lorsque $\Psi(A+B) \subset \Psi(A)$.

En ce qui concerne le problème du calcul d'un MST, pour un bruit d'une intensité donnée ϵ , il existe quelques arbres qui sont toujours solution du problème après la perturbation. Il en déduit alors un rayon de stabilité $\rho(A) = \sup \epsilon$ tel que A est ϵ -stable pour le problème. Ce rayon est calculable avec une complexité de $O(n^3 m \log(\frac{n^2}{m}))$, soit pour un graphe complet $O(n^5)$ ($m = O(n^2)$).

Dans Dixon *et al.* [DRT92], l'analyse de la sensibilité du MST revient à calculer pour toutes les arêtes e_i du maillage, de combien on peut augmenter ou diminuer le poids de l'arête $\omega(e_i)$ sans modifier les connexions dans le MST $T = (V, E_T)$. Ce problème est divisé en deux parties.

Tout d'abord pour les arêtes e_i qui n'appartiennent pas à l'arbre, ils calculent la diminution possible du poids de ces arêtes sans affecter la minimalité de l'arbre T . Puis, pour toutes les arêtes e_i qui sont dans l'arbre, ils augmentent le poids de ces dernières sans modifier les connexions du MST. Ces calculs sont faisables en un temps linéaire en fonction du nombre d'arêtes.

Dans cette section, nous avons montré deux approches analysant la sensibilité des MST. Nous rappelons que nous traitons des données géométriques donc :

- $G = (V, E)$ est un graphe complet, chaque sommet est lié aux autres. Donc $m = n(n-1)$, ce qui maximise la complexité des algorithmes classiques de la théorie des graphes ;
- les poids des arêtes $\omega(e_i)$ ne sont pas indépendants. Si $\omega(e_i)$ est modifié, cela implique qu'au moins un des deux sommets composant l'arête $e_i = \{v_s, v_t\}$ est déplacé. Dès qu'on déplace un sommet du graphe, les poids des $(n-1)$ arêtes le reliant aux autres vont également être modifiés.

Pour Gordeev et Dixon *et al.* les poids des arêtes $\omega(e_i)$ sont indépendants, c'est pourquoi leurs approches ne sont pas applicables dans notre cas. Nous proposons, en section 3, une nouvelle analyse de la sensibilité des EMST.

3. Analyse théorique de la sensibilité des EMST

Soit $G = (V, E)$ un graphe complet valué avec V l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes tel que :

- chaque sommet du maillage est un sommet du graphe $v_i \in V$;
- $\forall v_s, v_t \in V ; v_s \neq v_t ; \exists e_i = \{v_s, v_t\} \in E$ et $\omega(e_i) = d(v_s, v_t)$, la distance euclidienne entre deux sommets du maillage.

3.1. Calcul des MST : rappels et notations

Pour un graphe valué connexe $G = (V, E)$, nous proposons de calculer son EMST $T = (V, E_T)$. Le calcul des MST est un problème algorithmique bien connu. Pour nos travaux, nous avons choisi d'utiliser l'algorithme de Prim [Pri57] car c'est un algorithme qui permet de construire incrémentalement l'EMST en ajoutant à chaque étape une arête dans l'arbre. Nous avons donc à chaque étape l'EMST d'un sous ensemble de V .

L'algorithme commence à partir d'un sommet initial $v_0 \in V$. A l'étape i de l'algorithme, est ajouté à l'arbre courant $T_i = (V_i, E_i)$ le sommet le plus proche v_i de l'ensemble V_{i-1} . Nous construisons ainsi une suite d'arbres $(T_i)_{0 < i < n} = (V_i, E_i)_{0 < i < n}$ dépendant du sommet source v_0 tel que $(V_i)_{0 < i < n}$ soit une suite d'ensembles de sommets et $(E_i)_{0 < i < n}$ une suite d'ensembles d'arêtes :

- $V_0 = \{v_0\}$;
- $E_0 = \emptyset$;
- $V_i = V_{i-1} \cup \{v_i\}$ ($\forall i < n$), avec $v_i \in \overline{V_{i-1}} = V \setminus V_{i-1}$ le sommet le plus proche de V_{i-1} , défini par l'équation (1) ;
- $E_i = E_{i-1} \cup \{v_i, f(v_i)\}$ ($\forall i < n$), avec $f : V_i \rightarrow V_{i-1}$ une fonction qui donne le sommet le plus proche de v_i dans V_{i-1} (le "père" de v_i), défini par l'équation (2).

$$v_i = \underset{v_j \in \overline{V_{i-1}} ; v_k \in V_{i-1}}{\text{Argmin}} \quad \omega(v_j, v_k); \quad (1)$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \underset{v_j \in V_{i-1} ; v_k \in \overline{V_{i-1}}}{\text{Argmin}} \quad \omega(v_j, v_k), & i > 0 \\ v_0, & i = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Avec ces notations, l'ESMT de G est l'arbre $T = T_{n-1}$ dont nous étudions la sensibilité. Nous voulons savoir pour tous les sommets v_i de T comment les déplacer dans l'espace en modifiant leurs coordonnées $\{x_i, y_i, z_i\}$, tout en gardant les mêmes connexions dans l'arbre.

3.2. Analyse de la sensibilité des EMST et simplifications du problème

Etant donné $G = (V, E)$, nous calculons son EMST et à chaque étape de l'algorithme de Prim nous avons $T_i =$

(V_i, E_i) . Nous fixons une étape i , nous déplaçons le sommet v_i et notons v^* le nouveau sommet. Soit G^* le graphe dont le sommet v_i a été déplacé en v^* . Ainsi $\forall i$, on note $T_i^* = (V_i^*, E_i^*)$ l'EMST calculé par l'algorithme de Prim sur le graphe G^* .

Comme il est difficile d'analyser la sensibilité d'un EMST en considérant que la totalité des sommets peut être perturbée, nous posons des simplifications sur la perturbation des sommets afin de rendre le problème plus abordable :

- à l'étape i de l'algorithme de Prim, seul le sommet v_i est perturbé en v^* ;
- la perturbation est restreinte à la demi-droite $]f(v_i); v_i)$.

Le long de cette demi-droite $]f(v_i); v_i)$, nous voulons connaître de combien il est possible de rapprocher et d'éloigner v_i de son "père" $f(v_i)$ sans changer les connexions dans l'arbre à l'étape i .

Avec les notations précédentes, on suppose que T_i^* vérifie l'hypothèse suivante : $\forall k, k < i ; T_k = T_k^*$, c'est-à-dire que les connexions dans l'arbre ne sont pas modifiées jusqu'à l'étape $(i-1)$. Et nous voulons qu'à l'étape i :

- $v^* = v_i^*$, le sommet déplacé à l'étape i est toujours sélectionné à cette étape après le déplacement ;
- $f(v^*) = f(v_i)$, le "père" du sommet sélectionné à l'étape i reste le même.

3.2.1. Distance limite minimum (d^-)

Soient $f(v_i)$, le père de v_i et V_k ($k < i$) le plus petit ensemble au sens de l'inclusion qui contient $f(v_i)$, $f(v_i) \in V_k$ et $f(v_i) \notin V_{k-1}$ (cf. Figure 2). Par construction, à l'aide de l'algorithme de Prim, nous montrons que : pour toutes les arêtes de l'EMST $e_j \in E_{i-1} \setminus E_k$ de poids $\omega(e_j)$ vérifient :

$$\forall e_j = \{v_s, v_t\} \in E_{i-1} \setminus E_k ; \omega(e_j) < \omega(f(v_i), v_i). \quad (3)$$

A partir de cette remarque, nous pouvons déduire la limite de la distance minimum d_i^- entre v^* et $f(v_i)$ afin de respecter les hypothèses de stabilité de l'EMST :

$$d_i^- = \max_{e_j \in E_{i-1} \setminus E_k} \omega(e_j). \quad (4)$$

Donc pour garder les mêmes connexions dans l'EMST à l'étape i , v^* doit vérifier :

$$\omega(f(v^*), v^*) > d_i^-. \quad (5)$$

L'équation (5) est démontrée en annexe A :

3.2.2. Distance limite maximum (d^+)

Le calcul de la distance limite maximum se divise en deux parties. Tout d'abord, pour sélectionner le sommet v^* à

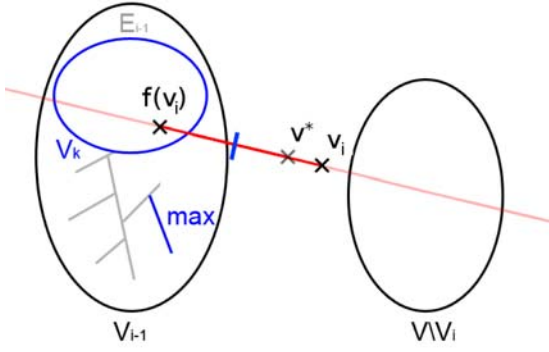


Figure 2: Schéma du calcul de la distance limite minimum (d^-).

l'étape i dans l'algorithme de Prim, nous devons chercher le deuxième sommet le plus proche de l'ensemble V_{i-1} que nous noterons $s(v_i)$ (cf. équation (6)). Ceci nous permet d'obtenir une première limite candidate. Trivialement, si v_i s'éloigne trop de l'ensemble V_{i-1} (tel qu'il soit plus loin que $s(v_i)$) alors c'est le sommet $s(v_i)$ qui est le plus proche de V_{i-1} . La Figure 3.a illustre ce premier calcul.

$$s : V_i \rightarrow \bar{V}_i.$$

$$s(v_i) = \begin{cases} \operatorname{Argmin}_{v_j \in \bar{V}_i; v_k \in V_{i-1}} \omega(v_j, v_k), & i < n-1 \\ v_{n-1}, & i = n-1. \end{cases} \quad (6)$$

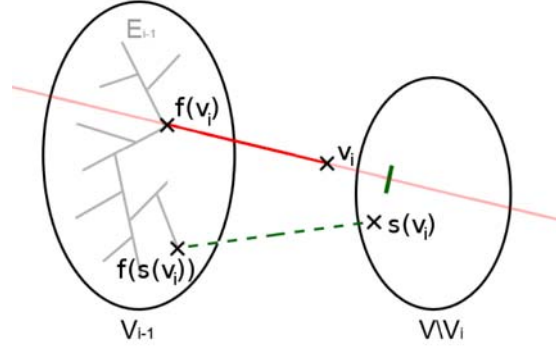
Ainsi, $\omega(f(s(v_i)), s(v_i))$ est la première distance candidate à la distance limite maximale. Nous la notons d_i^1 :

$$d_i^1 = \omega(s(v_i), (f \circ s)(v_i)). \quad (7)$$

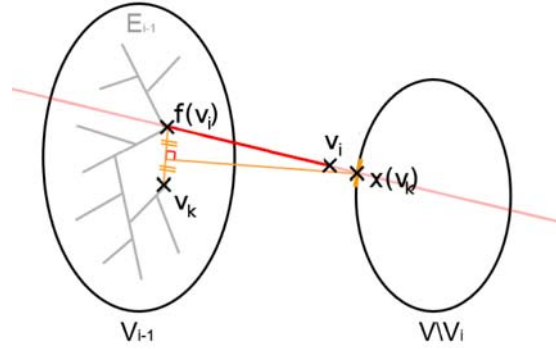
Nous devons avoir $f(v_i) = f(v^*)$ pour considérer que notre EMST est stable, $f(v_i)$ doit rester le sommet le plus proche de v^* . Donc pour chaque sommet $v_k \in V_{i-1}$ nous calculons $x(v_k) \in \mathbb{R}^3$ l'intersection entre la demi-droite $]f(v_i); v_i]$ et la médiatrice du segment $[f(v_i); v_k]$ illustrée en Figure 3.b.

Il est évident que nous avons : $d(f(v_i), x(v_k)) = d(v_k, x(v_k))$ et si $\omega(f(v_i), v^*) > d(f(v_i), x(v_k))$ alors v_i^* est plus proche de v_k que de $f(v_i)$. Donc, v^* doit vérifier, pour chaque $v_k \in V_{i-1}$ $\omega(f(v_i), v^*) < d(f(v_i), x(v_k))$. Ainsi, l'autre candidat à la distance limite maximum, notée d_i^2 s'exprime de la façon suivante :

$$d_i^2 = \min_{v_k \in V_{i-1}} \omega(p(v_i), x(v_k)). \quad (8)$$



(a)



(b)

Figure 3: Schéma du calcul de la distance limite maximum (d^+) : a) Recherche du second sommet le plus proche de V_{i-1} , b) Intersection entre les médiatrices et la demi-droite $]f(v_i); v_i]$.

Ces deux calculs de limite maximum ont pour but de sélectionner v^* à l'étape i de l'algorithme de Prim et de ne pas changer de "père", c'est-à-dire $f(v_i) = f(v^*)$. Nous devons vérifier ces deux conditions, nous prenons le minimum de ces deux distances :

$$d_i^+ = \min\{d_i^1, d_i^2\}. \quad (9)$$

Afin de ne pas modifier l'EMST à l'étape i , v^* doit vérifier :

$$\omega(f(v^*), v^*) < d_i^+. \quad (10)$$

L'équation (10) est démontrée en section B.

4. Resultats expérimentaux

Dans cette section, nous proposons une analyse statistique des distances limites minimum et maximum présentées en section 3.2. En section 4.1 nous décrivons les conditions expérimentales, puis en section 4.2 nous présentons un objet 3D en exemple pour faire un commentaire complet de nos résultats. Nous introduisons ensuite en section 4.3 des résultats de visualisation de zones robustes des EMST. Nous terminons en section 4.4 sur un comparatif entre deux normalisations et leurs impacts sur les mesures.

4.1. Conditions expérimentales

Pour la phase expérimentale, nous avons utilisé une base de données composée de 14 objets 3D issus de différentes sources (Stanford University Graphics Laboratory[†], le projet MADRAS[‡], Strategies S.A.[§] et Aimasharpe[¶]). Nous constatons, Figure 4, que ces objets sont de forme variée et sont utilisés dans de nombreux champs d'application tels que la CAO, la médecine, la manufacture et le divertissement.

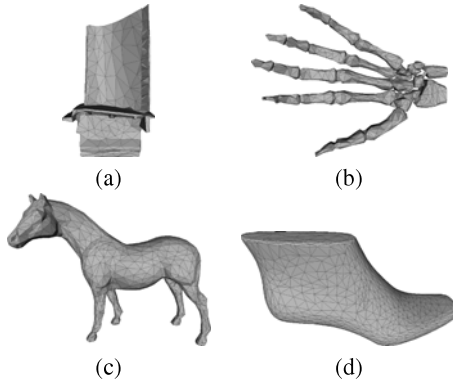


Figure 4: Sélection d'objet 3D : a) Blade, b) Skeleton, c) Horse, d) Shoe.

Afin de comparer ces maillages, nous les avons sous-échantillonnés de manière à avoir un nombre de sommets approximativement identique pour chacun d'eux. Pour des raisons pratiques nous prenons des objets d'environ 1000 sommets.

Pour pouvoir comparer les distributions des distances de déplacement, nous normalisons les objets avec deux méthodes :

[†] <http://www-graphics.stanford.edu/>

[‡] <http://www-rech.telecom-lille1.eu/madras/>

[§] <http://www.cadwin.com/>

[¶] <http://dsw.aimatshape.net/>

1. la taille de la boîte englobante (normalisation (1));
2. la distance moyenne entre deux sommets (normalisation (2)).

Puis en chaque sommet, nous calculons le rayon supérieur r_i^+ et le rayon inférieur r_i^- :

$$r_i^+ = d_i^+ - \omega(f(v_i), v_i); \quad (11)$$

$$r_i^- = \omega(f(v_i), v_i) - d_i^-. \quad (12)$$

4.2. Un exemple complet : Horse

Prenons en exemple le maillage *Horse* illustré Figure 6.a normalisé en fonction de la taille de la boîte englobante. Les résultats des distributions de r^+ et r^- sont illustrés respectivement en Figure 5.a et 5.b.

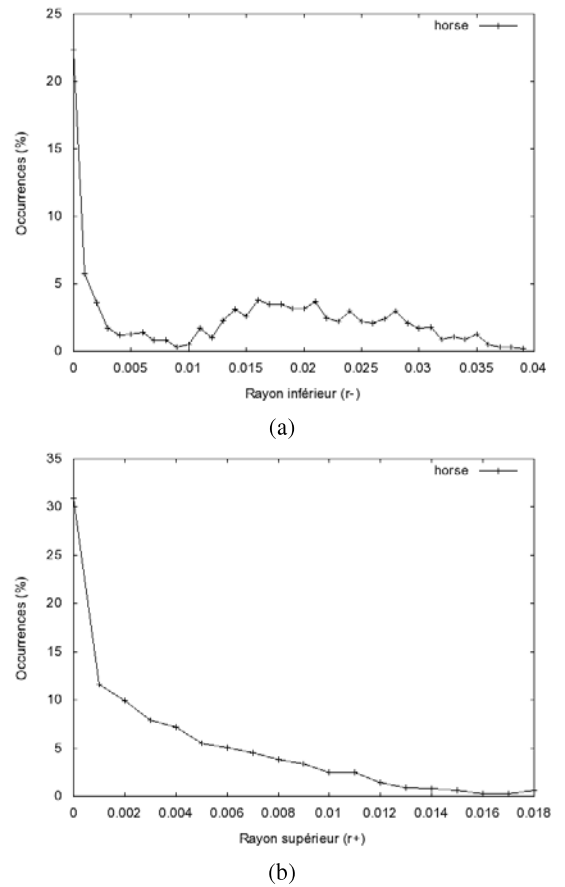


Figure 5: a) Distribution de r^- , b) Distribution de r^+ (pas d'échantillonnage : 0.001).

Pour chaque rayon calculé, plus la grandeur est importante, plus le sommet est robuste. Autrement dit, plus

r^+ (respectivement r^-) est grand, plus le sommet v_i peut s'éloigner (respectivement se rapprocher) du "père" $f(v_i)$. Nous remarquons qu'un grand nombre de sommets ne peut absolument pas être déplacé soit en se rapprochant du "père" (22%), soit en s'éloignant (30%). Ces résultats ne sont pas étonnants, ils révèlent la fragilité de la structure.

Pour le rayon supérieur r^+ , le nombre de sommets décroît rapidement lorsque le rayon augmente. La grande majorité des sommets ne peut pas être éloignée. De plus, notons que pour les sommets les plus robustes, le maximum des rayons inférieurs r^- est deux fois supérieur à celui des rayons supérieurs r^+ . Ce qui montre que le déplacement du sommet vers son "père" est privilégié.

Pour le rayon inférieur r^- , nous remarquons que la courbe décroît brutalement, puis croît jusqu'à atteindre un maximum local autour d'une valeur comprise entre 0,015 et 0,02. Ce maximum local est très intéressant. Comme nous l'avons dit précédemment, le déplacement vers le "père" est favorisé de telle sorte qu'on peut déplacer fortement certains sommets.

Cette première analyse nous permet de considérer que, dans les hypothèses de travail, soit on ne peut pas (ou très peu) déplacer le sommet, soit on peut le rapprocher de son "père" et dans certain cas très fortement.

4.3. Visualisation de zones robustes

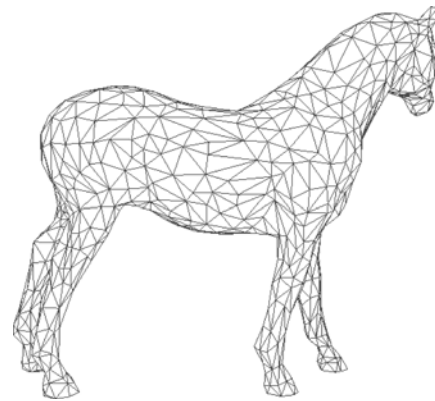
A la vue des résultats précédents, nous proposons de visualiser les zones les plus robustes d'un maillage lors d'une synchronisation par calcul d'EMST. Nous avons choisi de représenter Figure 6.b les sommets les plus robustes pour le rayon supérieur r_i^+ . Plus les couleurs sont claires, plus les zones sont robustes car r^+ est grand.

Sans surprise, nous nous apercevons que beaucoup de zones sont considérées comme fragiles (zones sombres de l'image). Nous remarquons que pour la plupart des sommets robustes, les distances entre lui-même et ses voisins immédiats dans le maillage sont très variables, contrairement à la plupart des sommets fragiles où l'espacement entre lui-même et ses voisins est quasi-régulier. Ceci pourrait être une piste en vue d'un critère de robustesse géométrique.

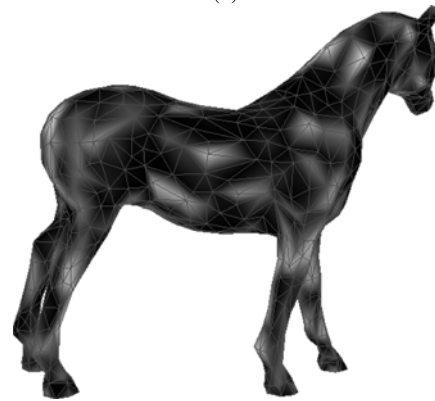
4.4. Influence de la normalisation

Nous nous intéressons ici à l'influence de la normalisation. La Figure 7 présente les distributions pour le rayon inférieur r^- et pour tous les objets de notre base de données. La courbe de la Figure 7.a correspond aux maillages normalisés par la normalisation (1) et la Figure 7.b par la normalisation (2).

L'allure des tracés est globalement la même. Pour la normalisation (2), les maxima locaux sont détectés autour d'une même valeur. Pour la normalisation (1), ces maxima locaux



(a)



(b)

Figure 6: Visualisation de Horse: a) Vue de face, b) Zones robustes en vue de face.

ne sont pas positionnés autour de la même valeur, ce qui suggère que la distance moyenne entre deux sommets est fonction de la distance de rapprochement. En effet, nous savons qu'il existe certains sommets v_i que l'on peut fortement rapprocher de leur "père" $f(v_i)$. De plus, nous savons qu'il y a plus de chance pour un sommet v_i de se rapprocher que de s'éloigner de son "père" $f(v_i)$. Ce qui explique cette observation.

Ainsi, suivant les applications et notre domaine d'étude, une normalisation peut être préférable à une autre. Ici, la normalisation (1) discrimine plus facilement les objets et permet de les classer plus facilement par niveau de robustesse.

Enfin, la Figure 8 illustre les distributions des rayons supérieurs r^+ , pour les objets normalisés par la normalisation (1) en Figure 8.a et pour la normalisation (2) en Figure 8.b. Outre le fait que les valeurs maximales soient différentes, ceci étant dû à la différence des normalisations, les allures des courbes sont très similaires à un facteur multiplicatif près.

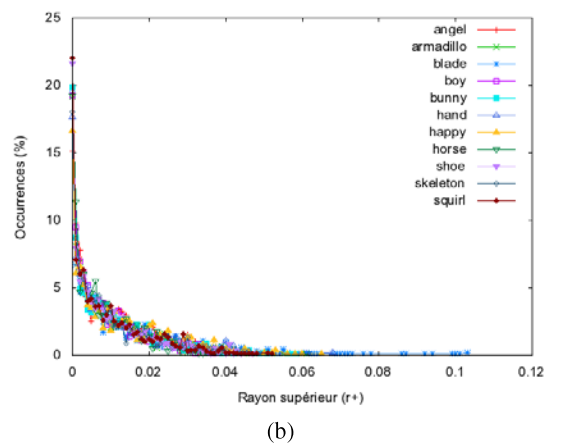
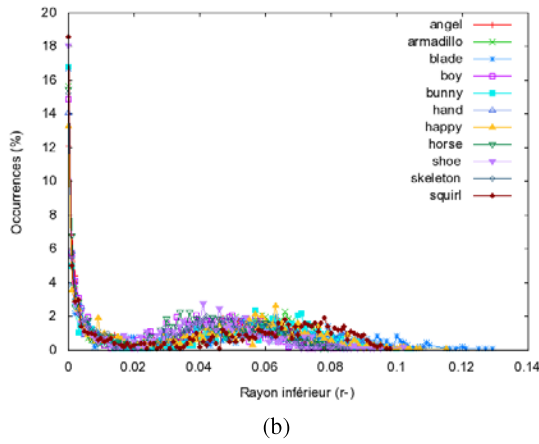
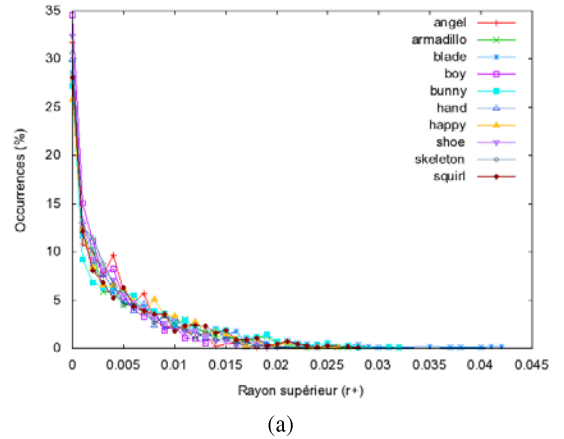
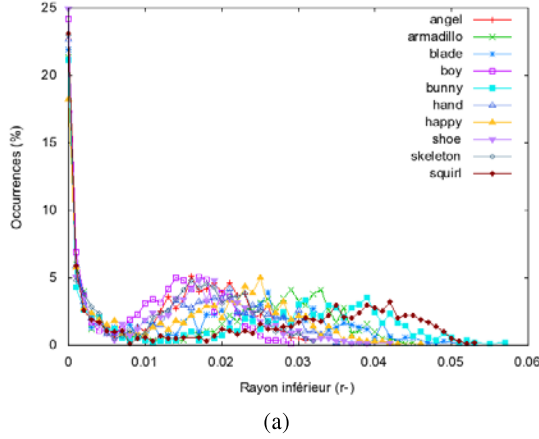


Figure 7: Distribution de r^- pour la normalisation : a) En fonction de la taille de la boîte englobante, b) En fonction de la distance moyenne entre deux sommets.

Figure 8: Distribution de r^+ pour la normalisation : a) En fonction de la taille de la boîte englobante, b) En fonction de la distance moyenne entre deux sommets.

5. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle analyse de la sensibilité des EMST. Nous avons proposé des simplifications afin de rendre le problème plus abordable. Pour chaque sommet v_i , nous nous sommes intéressés au déplacement de ce sommet le long de la demi-droite $]f(v_i), v_i)$, avec $f(v_i)$, le "père" du sommet v_i obtenu par l'algorithme de Prim. Nous calculons pour chaque sommet v_i de combien il est possible de se rapprocher ou de s'éloigner de $f(v_i)$, et nous obtenons respectivement les distances r^- et r^+ .

Cette méthode nous permet de visualiser les zones robustes d'un objet qui pourront être tatouées par synchronisation avec le calcul d'un EMST. L'objectif est d'améliorer cette analyse afin de prédire la robustesse du message au sein de l'objet 3D avant même de l'avoir insérer.

De plus, lorsqu'un objet 3D tatoué est transmis sur un canal bruité, certains sommets sont perturbés. C'est pourquoi nous nous intéresserons à la corrélation entre ces

critères (r^+ , r^-) et le déplacement des sommets subit par un bruit par exemple.

Appendix A: Démonstration : Calcul de d_i^- , distance de rapprochement limite

Rappelons l'hypothèse de notre problème simplifié, pour l'analyse de la stabilité des EMST : $\forall k < i \ T_k = T_k^*$, les connexions dans l'arbre ne sont pas modifiées jusqu'à l'étape i . A l'étape i , nous souhaitons que :

1. $v^* = v_i^*$, le sommet déplacé à l'étape i est toujours sélectionné à cette étape après le déplacement;
2. $f(v_i) = f(v_i^*)$, le "père" du sommet sélectionné à l'étape i reste le même.

Nous devons démontrer que v^* doit vérifier la relation suivante pour conserver la même connexion à l'étape i dans l'EMST :

$$\omega(f(v^*), v^*) > d_i^-.$$

Étape 1

Soit $e_l = \{f(v_l), v_l\}$ l'arête telle que si elle existe $e_l = \max_{e_j \in E_{i-1} \setminus E_k} \omega(e_j)$. Si cette arête n'existe pas alors $E_{i-1} \setminus E_k$ est vide, donc $f(v_i) = v_{i-1}$, dans ce cas là le sommet v_i peut se déplacer aussi prêt que l'on souhaite de $f(v_i)$.

Supposons que $e_l = \{f(v_l), v_l\}$ existe alors $d_i^- = \omega(f(v_l), v_l)$.

Notons que $k \leq l < i$, donc l'algorithme de Prim ajoute dans l'arbre T^* d'abord v_k^* , puis plus tard v_l^* et à l'étape i qui nous intéresse v_i^* . Avec ces notations, démontrons par l'absurde que l'équation (4) doit être vérifiée pour que $v_i^* = v^*$.

Supposons $\omega(f(v^*), v^*) \leq \omega(f(v_l^*), v_l^*)$. En se plaçant à l'étape l de l'algorithme de Prim, on sait que $f(v_i^*) \in V_k \subset V_{l-1}$ et $f(v_l^*) \in V_{l-1}$ par définition. A l'étape l on choisit le sommet le plus proche de l'ensemble V_{l-1} , or $\omega(f(v^*), v^*) \leq \omega(f(v_l^*), v_l^*)$ donc $v^* = v_l^*$ ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Étape 2

Il est évident que si v_i est le sommet le plus proche de $f(v_i)$ dans $V \setminus V_i$, si v^* est un sommet appartenant au segment $]f(v_i), v_i[$ alors il reste le plus proche sommet de $f(v_i)$ dans $V \setminus V_i$. Le "père" de v_i est le "père" de v^* qui est sélectionné à l'étape i . \square

Appendix B: Démonstration : Calcul de d_i^+ , distance d'éloignement limite

Nous devons démontrer que v^* doit vérifier la relation suivante pour conserver la même connexion à l'étape i dans l'EMST :

$$\omega(f(v^*), v^*) < d_i^+.$$

Étape 1

Tout d'abord montrons que $\omega(f(v^*), v^*) < d_i^1$.

Ceci est assez trivial, v_i étant le sommet le plus proche de V_{i-1} situé à distance $\omega(f(v_i), v_i)$ et $s(v_i)$ le deuxième sommet le plus proche de V_{i-1} situé à distance $\omega(f(s(v_i)), s(v_i))$. Supposons par l'absurde que $\omega(f(v^*), v^*) \geq d_i^1$, alors $s(v_i)$ est le sommet le plus proche de V_{i-1} , ce qui est contradictoire. \square

Étape 2

Pour finir, montrons que $\omega(f(v^*), v^*) < d_i^2$.

Il est trivial que le long de la demi-droite $]f(v_i), v_i)$, les sommets $\{f(v_i), v_i, x(v_k)\}$ sont alignés dans cet ordre. De plus, $x(v_k)$ est le point à égale distance des sommets $f(v_i) \in V_{i-1}^*$ et $v_k \in V_{i-1}^*$. Ainsi $x(v_k)$ sépare la demi-droite $]v_i; \infty)$ en deux parties :

- $\forall v^* \in]v_i; x(v_k)[$, $\omega(f(v_i), v^*) < d(f(v_i), x(v_k))$, où v^* est plus proche de $f(v_i)$ que de v_k ;
- $\forall v^* \in]x(v_k); \infty[$, $\omega(f(v_i), v^*) > d(f(v_i), x(v_k))$, où v^* est plus proche de v_k que de $f(v_i)$.

Ainsi, la propriété est démontrée. \square

References

- [APDP08] AMAT P., PUECH W., DRUON S., PEDEBOY J.: Lossless Data Hiding Method Based on MST and Topology Changes of 3D Triangular Mesh. In *EU-SIPCO'08: 16th European Signal Processing Conference, Lausanne, Switzerland* (2008).
- [DRT92] DIXON B., RAUCH M., TARJAN R.: Verification and Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees in Linear Time. *SIAM Journal on Computing* 21 (1992), 1184–1992.
- [Gor99] GORDEEV E.: Stability Analysis of the Minimum Spanning Tree Problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 39, 5 (1999), 738–746.
- [Gor01] GORDEEV E.: Stability Analysis in Optimization Problems on Matroids in the Metric II. *Cybernetics and Systems Analysis* 37 (2001), 251–259.
- [Pri57] PRIM R.: Shortest Connection Networks and Some Generalizations. *Bell System Technical Journal* 36 (1957), 1389–1401.
- [WLDB08] WANG K., LAVOUÉ G., DENIS F., BASKURT A.: A Comprehensive Survey on Three-Dimensional Mesh Watermarking. *IEEE Transactions on Multimedia* 10 (2008), 1513–1527.