

Académie de Montpellier  
Université Montpellier II  
Sciences et Techniques du Languedoc

# MÉMOIRE DE STAGE DE MASTER M2

effectué au Laboratoire d'Informatique de Robotique  
et de Micro-électronique de Montpellier

Spécialité : **Professionnelle et Recherche unifiée en  
Informatique**

## DESCRIPTION DE FORMES DE STRUCTURES ANATOMIQUES 3D À L'AIDE DE MATROÏDES ORIENTÉS

par **Kevin SOL**

Date de soutenance : **19 juin 2009**

Sous la direction de **Emeric GIOAN**  
et **Gérard SUBSOL**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du sujet</b>	<b>1</b>
1.1	Les techniques anthropologiques . . . . .	1
1.2	Les matroïdes orientés . . . . .	4
<b>2</b>	<b>La théorie des matroïdes orientés</b>	<b>6</b>
2.1	Caractérisation d'un matroïde orienté . . . . .	6
2.1.1	les bases . . . . .	8
2.1.2	les cocircuits . . . . .	9
2.1.3	les circuits . . . . .	11
2.1.4	dualité . . . . .	11
2.2	Un exemple de matroïde orienté associé à une configuration de point en 3 dimensions . . . . .	12
2.3	Propriétés géométriques codées par le matroïde orienté . . . .	14
<b>3</b>	<b>Mise en place d'un outil informatique adéquat</b>	<b>17</b>
3.1	Programmation du matroïde orienté associé à une configura- tion de points en dimension quelconque . . . . .	18
3.1.1	Méthodes de calcul des bases, cocircuits et circuits . . .	18
3.1.2	L'exactitude des calculs . . . . .	21
3.1.3	Complexité théorique et temps de calcul . . . . .	22
3.2	Le fichier d'entrée . . . . .	23
3.3	Les fichiers de sortie . . . . .	24
3.4	Visualisation des objets 3D . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Application à l'analyse de la forme 3D du crâne</b>	<b>28</b>
4.1	Présentation des données 3D de crânes . . . . .	28
4.1.1	Les données anthropologiques . . . . .	28
4.1.2	Les données cliniques . . . . .	29
4.2	Introduction d'une distance entre matroïdes orientés . . . . .	30
4.3	Les résultats donnés par le programme . . . . .	33
4.3.1	Les données anthropologiques . . . . .	33

4.3.2	Les données cliniques . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>37</b>
5.1	Bilan et contributions du stage . . . . .	37
5.2	Perspectives . . . . .	37
	<b>Références</b>	<b>i</b>

**Résultats en ligne disponible sur la page**

<http://www.lirmm.fr/~sol/ResultatsM2/ResultatsM2.htm>

## Liste des algorithmes

1	Calcul des chirotopes . . . . .	18
2	Calcul des cocircuits . . . . .	19
3	Calcul du matroïde orienté dual . . . . .	20



# Chapitre 1

## Présentation du sujet

Dans ce chapitre nous évoquerons les techniques utilisées en anthropologie pour l'étude 3D de structures anatomiques puis nous présenterons brièvement ce que sont les matroïdes orientés et enfin nous expliquerons l'apport que peuvent avoir les matroïdes orientés pour la description de formes 3D de structures anatomiques.

### 1.1 Les techniques anthropologiques

Jusqu'au début des années 90, la méthode utilisée pour la comparaison de structures anatomiques était basée sur l'étude statistique de certaines distances et de certains angles entre des points correspondants. A partir des années 1990, il y a eu l'apparition de la Morphométrie Géométrique (Geometric Morphometrics en anglais) qui est expliquée en détail dans l'article [ARS04]. Cette méthode se base sur l'étude globale de la géométrie des structures en utilisant des repères 3D (souvent appelés landmarks) répartis sur toute la structure. Une fois que ces repères sont localisés on va superposer au mieux les structures. Pour cela, on applique la méthode dite de Procrustes qui se passe en 3 temps. Tout d'abord, on aligne les barycentres. Puis, on normalise les structures (pour les mettre à la même échelle) en imposant pour chaque structure, que la somme des distances entre tous les points et l'isobarycentre soit égale à 1. Enfin, à l'aide de rotations centrées sur l'isobarycentre, on vérifie que les points correspondants dans chaque structure sont les plus proches possibles grâce à la méthode des moindres carrés.

Nous allons illustrer cette étape sur un exemple en utilisant Morphologica qui est un logiciel utilisé couramment en anthropologie [OJ98] et disponible sur le site <http://hym.fme.googlepages.com/downloadmorphologica>. Cet exemple est donné par la figure 1.1.

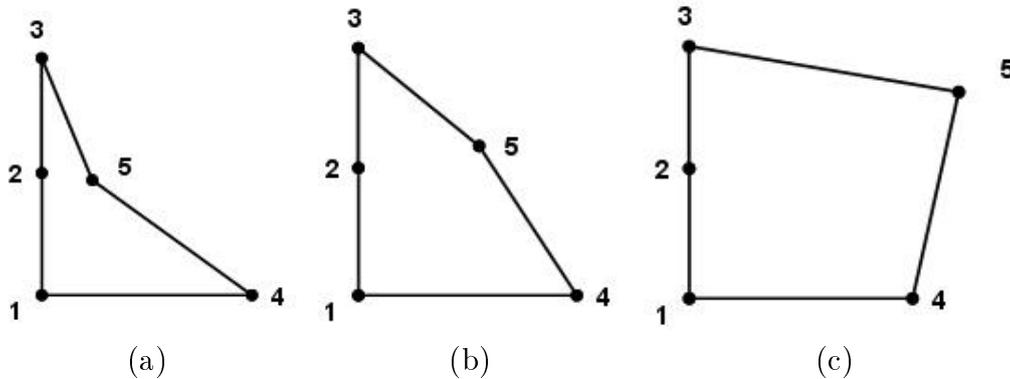


FIGURE 1.1 – Configurations de 5 points en 2 dimensions

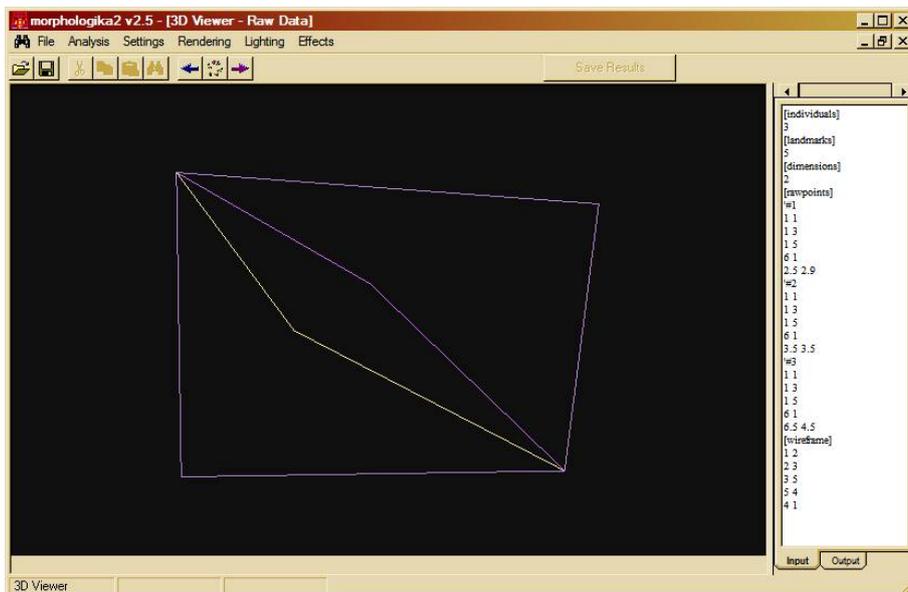


FIGURE 1.2 – Les configurations vues avec Morphologika

Pour passer d'une configuration à une autre, il n'y a que le point 5 qui ait changé. Par contre le résultat de la normalisation est donnée par la figure 1.3. On remarque qu'après la normalisation les positions de tous les points ont été modifiées. La normalisation géométrique ne permet donc pas de mettre en valeur les structures communes.

Une fois la normalisation effectuée, une Analyse en Composantes Principales est souvent utilisée pour comparer les modèles. Cette analyse consiste à trouver les axes suivant lesquels les points ont la plus grande dispersion. Grâce à Morphologika, nous avons pu faire cette analyse sur l'exemple précé-

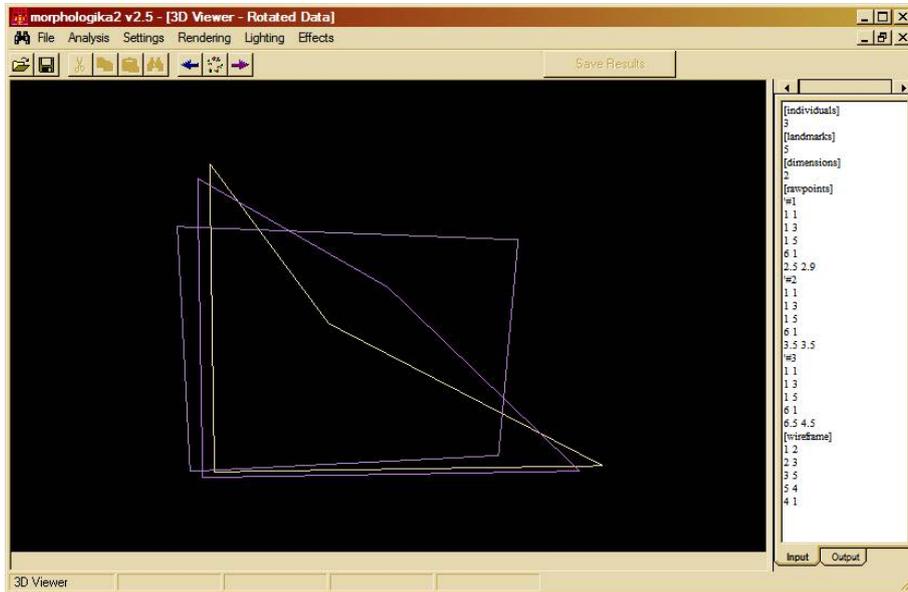


FIGURE 1.3 – Configuration après normalisation par Morphologika

dent et nous avons représenté les 3 configurations de points sur un graphique en ne gardant que les 2 premiers axes principaux qui sont les plus significatifs. Le résultat est visible sur la figure 1.4. Les 3 configurations sont très éloignées les unes des autres alors qu'intuitivement on pourrait vouloir par exemple différencier la configuration (a) des 2 autres. On aimerait dans ce cas avoir une méthode permettant de dire que les configurations (b) et (c) sont proches et que la configuration (a) est plus éloignée.

Ces méthodes étant très *géométriques*, elle ne permettent pas de faire des distinctions au niveau *structurel*. Or, en anthropologie, ce sont souvent les différences structurelles qui caractérisent les différences anatomiques ou évolutives. Par exemple sur la figure 1.5 il apparait que le point le plus haut de la représentation du crâne du singe est le plus à gauche alors que ce n'est pas le cas dans la configuration du crâne humain. Cette différence permet de caractériser la variation de l'angle basicranial qui est très important dans l'étude de l'évolution. Les méthodes de morphologie géométrique ne mettent pas assez l'accent sur de telles différences. Il faudrait donc proposer de nouveaux outils d'analyse fondé sur la structure combinatoire pour observer de tels changements.

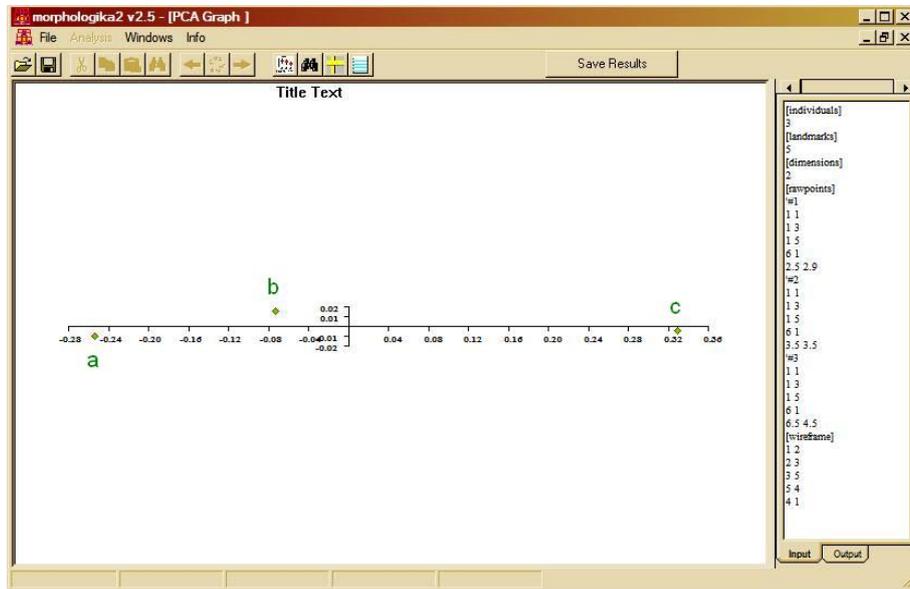


FIGURE 1.4 – Résultat de l'Analyse en Composantes Principales par Morphologika

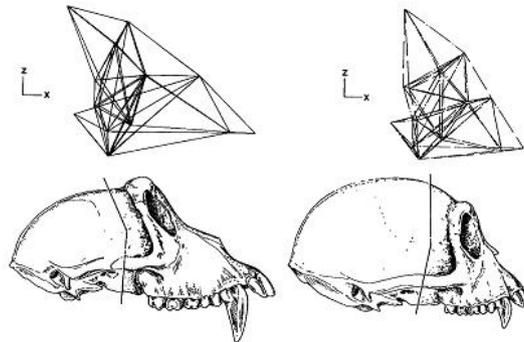


FIGURE 1.5 – Comparaison d'un crâne humain et d'un crâne de singe

## 1.2 Les matroïdes orientés

Les matroïdes orientés sont des outils mathématiques permettant entre autre de décrire les propriétés combinatoires de configurations géométriques. Ces outils ont déjà été étudiés du point de vue théorique et certaines interactions avec des domaines plus appliqués existent, mais on ne peut pas vraiment parler d'applications pratiques.

Par exemple la classification des molécules chimiques à l'aide de matroïdes orientées présenté dans l'article [DDH83] reste très théorique. Les matroïdes

orientées ont également été utilisés pour repérer la position des objets les uns par rapport aux autres dans des vues en 2 dimensions d'objets en 3 dimensions [SGSS05].

Une application plus proche de la nôtre a également été faite pour calculer des triangulations dans des ensembles de points, présenté dans l'article [PR03].

L'utilisation des matroïdes orientés permettrait de décrire les formes des structures anatomiques 2D ou 3D de façon purement combinatoire. Il n'y aurait donc plus de relations métriques entre les points ce qui permettrait de ne plus avoir de problèmes de normalisation.

Dans ce rapport j'introduirai dans la section 2 une partie de la théorie des matroïdes orientés qui nous servira à coder les formes des structures anatomiques, puis je présenterai les programmes informatiques que nous avons créés lors de ce stage dans la section 3. Ensuite je présenterai dans la section 4 les premiers résultats donnés par le programme sur des données anthropologiques et cliniques et pour finir je terminerai dans la section 5 par les perspectives pour le futur.

## Chapitre 2

# La théorie des matroïdes orientés

La théorie des matroïdes orientés est une abstraction combinatoire de l'algèbre linéaire. En particulier ils permettent de décrire et d'analyser les propriétés combinatoires de configurations géométriques. On peut appliquer la théorie des matroïdes orientés à des objets aussi différents que des configurations de points ou de vecteurs, des arrangements d'hyperplans ou de pseudosphères, ou même à des graphes. Il faut noter que la théorie des matroïdes orientés est très vaste et qu'il ne sera question ici que de matroïdes orientés associés aux configurations de points, appelés matroïdes orientés réalisables.

Dans ce chapitre nous allons introduire une partie de la théorie des matroïdes orientés qui va nous être utile dans ce rapport. Cette théorie ayant déjà été étudiée, les personnes intéressées peuvent compléter leur connaissances sur le sujet notamment grâce à l'article [RZ97] ou au livre [BVS<sup>+</sup>99].

Nous verrons tout d'abord plusieurs façons de caractériser un matroïde orienté, puis nous illustrerons cette théorie sur un exemple et enfin nous verrons quelques propriétés géométriques codées par le matroïde orienté.

### 2.1 Caractérisation d'un matroïde orienté

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons l'abus de notation  $abc\dots$  pour désigner le sous-ensemble  $\{a, b, c, \dots\}$  d'un ensemble fini  $E$ . Pour une partie signée de  $E$ , les éléments négatifs seront surlignés, par exemple  $\overline{abcd}$  désignera la partie signée  $A$  telle que  $A^+ = \{a, d\}$  et  $A^- = \{b, c\}$ . Sauf ambiguïté, on pourra utiliser la même notation pour une partie signée  $A = (A_+, A_-)$  et son support  $A = A_+ \cup A_-$ . On notera parfois  $\sigma_A(e)$  le signe de  $e$  appartenant à  $\{+, -, 0\}$  dans la partie signée  $A$  (avec pour convention  $\sigma_A(e) = 0$  si  $e \notin A$ ).

Soit  $E$  un ensemble fini de points dans un espace affine réel de dimension  $d$  (que l'on appellera par abus de langage *dimension affine*). On pose

$\text{Card}(E) = n$ . On associe à  $E$  un ensemble  $V$  de vecteurs de dimension  $d+1$  (que l'on appellera par abus de langage *dimension vectorielle*). L'ensemble  $V$  est obtenu à partir de l'ensemble  $E$  de la manière suivante : pour tout point  $p$  de  $E$  on crée un vecteur  $v$  de  $V$  en rajoutant une  $d+1^{\text{ème}}$  coordonnée égale à 1. Cela revient donc à appliquer la transformation  $f$  à chaque point de  $E$  où

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_d \end{pmatrix} \mapsto v = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc  $\text{Card}(V) = \text{Card}(E) = n$ .

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons plus particulièrement aux cas de points en 2 ou 3 dimensions. Dans le cas de points en 2 dimensions (dimension affine égale à 2), les vecteurs appartiendront donc à  $\mathbb{R}^3$ ; et pour le cas de points en 3 dimensions les vecteurs appartiendront donc à  $\mathbb{R}^4$ .

Pour illustrer la théorie des matroïdes orientés, nous allons nous baser sur un exemple de 5 points en 3 dimensions donnée par la figure 2.1.

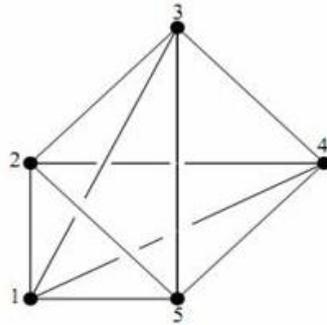


FIGURE 2.1 – Exemple de 5 points en 3 dimensions

La matrice suivante représente donc les coordonnées de ces points.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'ensemble  $V$  se calcule en appliquant la transformation  $f$  à la matrice

précédente. On obtient alors

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matroïde orienté associé à l'ensemble de points  $E$  est en réalité calculé à partir de l'ensemble de vecteurs  $V$ . Il est caractérisé par l'un des ensembles suivants.

### 2.1.1 les bases

L'ensemble des *bases* est un ensemble de parties de  $V$ , chaque base ordonnée étant munie d'un signe appelé *chirotope* et noté  $\chi$ . Une partie de  $V$  est une base si c'est un ensemble linéairement indépendant de cardinal maximal. Les bases ont donc toutes pour cardinal  $d + 1$ . Le chirotope d'une base ordonnée est le signe du déterminant de la matrice  $M$  où  $M$  est la matrice dont les colonnes sont les éléments de cette base écrite sur la base canonique. Si un sous-ensemble de  $V$  de cardinal  $d + 1$  n'est pas linéairement indépendant, alors cette ensemble n'est pas une base et le déterminant sera donc nul. On peut alors étendre la définition de chirotope en incluant le cas où le déterminant est nul.

$$\begin{aligned} \chi & : V^{d+1} & \rightarrow & \{-, 0, +\} \\ & (v_{i_1}, \dots, v_{i_{d+1}}) & \mapsto & \mathbf{sign}(\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_{d+1}})) \end{aligned}$$

Comme les colonnes de la matrice sont écrites sur la base canonique, si le chirotope d'une base ordonnée est positif cela signifie que l'orientation de cette base est la même que l'orientation de la base canonique.

Il est important de noter qu'il y a exactement  $\binom{n}{d+1}$  chirotopes ordonnés conformément à l'ordre de  $E$  (c'est à dire que l'on a tous les chirotopes à permutation près) et ce que les points soient en position générale ou pas. En effet, si les points sont en position générale tous les chirotopes seront non nuls alors que si les points ne sont pas en position générale il y aura des chirotopes égaux à 0.

Dans le cas de points en 2 dimensions les bases sont de cardinal 3, il y a donc exactement  $\binom{n}{3}$  chirotopes alors que dans le cas de points en 3 dimensions les bases sont de cardinal 4. Il y a alors exactement  $\binom{n}{4}$  chirotopes.

On remarque qu'en 3 dimensions, si un chirotope est non nul alors les points correspondants forment un simplexe.

Revenons sur l'exemple de la figure 2.1. Nous avons donc  $\binom{5}{4} = 5$  chirotopes. Comme les points sont en position générale (il n'y a ni 3 points alignés, ni 4 points coplanaires ...) les chirotopes seront donc non nuls. Le calcul des bases nous donne donc le résultat suivant :

$$\begin{array}{lll} \chi(1\ 2\ 3\ 4) = - & \chi(1\ 2\ 3\ 5) = + & \chi(1\ 2\ 4\ 5) = + \\ \chi(1\ 3\ 4\ 5) = + & & \chi(2\ 3\ 4\ 5) = + \end{array}$$

Il y a donc 5 bases dont les 4 dernières ont la même orientation que la base canonique.

### 2.1.2 les cocircuits

L'ensemble des *cocircuits* est un ensemble de parties signées de  $V$ . Une partie de  $V$  est un *hyperplan* si elle engendre un hyperplan de  $\mathbb{R}^{d+1}$  (sous-espace de dimension  $d$ ) et si elle est égale à l'intersection de  $V$  avec cet hyperplan. Les supports des cocircuits sont les complémentaires des hyperplans dans  $V$ . Un hyperplan sépare l'espace en deux demi-espaces, un demi-espace est choisi comme étant positif et l'autre comme étant négatif. Chaque élément du support du cocircuit a donc un signe qui est le signe du demi-espace auquel il appartient. On notera donc le cocircuit  $C^* = (C_+, C_-)$  où  $C_+$  sera l'ensemble des éléments appartenant à un demi-espace et  $C_-$  sera l'ensemble des éléments appartenant à l'autre demi-espace.

Bien sûr, si  $C^*$  est un cocircuit, alors  $-C^*$  est aussi un cocircuit.

Si les points sont en position générale (c'est à dire qu'il n'y a ni 3 points alignés, ni 4 points coplanaires ...) il y a exactement  $2 * \binom{n}{d}$  cocircuits (le facteur 2 venant du fait que  $C^*$  et  $-C^*$  sont des cocircuits). On se contente alors de calculer la moitié des cocircuits (soit  $\binom{n}{d}$  cocircuits) et l'on obtient la totalité des cocircuits en prenant l'opposé de chaque cocircuit calculé. Par contre si les points ne sont pas en position générale, il se peut qu'au moins un  $d$ -uplet de point ne forme pas un hyperplan. Dans ce cas, le complémentaire de ce  $d$ -uplet ne forme donc pas un cocircuit et la moitié des cocircuits sera constituée de moins de  $\binom{n}{d}$  cocircuits.

Dans le cas de points en 2 dimensions les hyperplans seront donc des sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  dimension 2, donc des plans de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi un hyperplan

du matroïde orienté est l'ensemble des vecteurs de  $V$  appartenant au plan défini par 2 vecteurs quelconques de  $V$  non colinéaires. Or les points de  $E$  appartiennent au même plan de  $\mathbb{R}^3$  (le plan d'équation  $z = 1$ ). L'intersection de l'hyperplan avec ce plan forme une droite (passant par les 2 points correspondant aux 2 vecteurs définissant l'hyperplan). Le signe d'un élément du cocircuit indique dans quel demi-espace se trouve le vecteur par rapport à l'hyperplan ; ce qui revient donc à dire dans quelle partie du plan se trouve le point par rapport à la droite. Ainsi les cocircuits indiquent par des  $+$  les points qui sont d'un côté de la droite et par des  $-$  les points qui sont de l'autre côté de la droite (les points appartenant à la droite sont notés par un 0).

De même, dans le cas de points en 3 dimensions, les cocircuits indiqueront la position des points par rapport à un plan. Ce plan sera défini par 3 points quelconques non alignés.

Illustrons la notion de cocircuits sur l'exemple de la figure 2.1. Comme les points sont en position générale, tous les triplets de points définissent un hyperplan. Il y a alors  $\binom{5}{3} = 10$  hyperplans donc  $2 * \binom{5}{3} = 20$  cocircuits. Par exemple, les cocircuits  $0\ 0\ 0\ +\ -$  et  $0\ 0\ 0\ -\ +$  sont opposés et correspondent tous les 2 au plan formé par les points 1 2 et 3. Dans le premier cocircuit, le demi-espace positif est celui dans lequel est situé le point 4 alors que dans le deuxième cocircuit le point 4 est dans le demi-espace négatif. En calculant la moitié des cocircuits nous obtenons le résultat suivant (l'autre moitié est obtenue en changeant tous les signes dans chacun des cocircuits)

$$\begin{aligned}
C^*(1\ 2\ 3) &= 0\ 0\ 0\ +\ - \\
C^*(1\ 2\ 4) &= 0\ 0\ -\ 0\ - \\
C^*(1\ 2\ 5) &= 0\ 0\ +\ +\ 0 \\
C^*(1\ 3\ 4) &= 0\ +\ 0\ 0\ - \\
C^*(1\ 3\ 5) &= 0\ -\ 0\ +\ 0 \\
C^*(1\ 4\ 5) &= 0\ -\ -\ 0\ 0 \\
C^*(2\ 3\ 4) &= -\ 0\ 0\ 0\ - \\
C^*(2\ 3\ 5) &= +\ 0\ 0\ +\ 0 \\
C^*(2\ 4\ 5) &= +\ 0\ -\ 0\ 0 \\
C^*(3\ 4\ 5) &= +\ +\ 0\ 0\ 0
\end{aligned}$$

### 2.1.3 les circuits

L'ensemble des *circuits* est un ensemble de parties signées de  $V$ . Les supports des circuits sont les parties linéairement dépendantes minimales pour l'inclusion. Chaque élément du support du circuit a donc un signe qui est le signe du coefficient dans une relation de dépendance linéaire des éléments de son support  $\underline{C}$ . A l'aide de formules on a donc :

Soit  $\underline{C} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  un support d'un circuit  $C$ . Alors  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_j \lambda_j v_{i_j} = 0$ .

Donc le circuit  $C = (C^+, C^-)$  avec  $C^+ = \{v_{i_j} \mid \lambda_j > 0\}$  et

$C^- = \{v_{i_j} \mid \lambda_j < 0\}$ .

De même que pour les cocircuits, si  $C$  est un circuit, alors  $-C$  est aussi un circuit mais dans le cas de points en position générale il y aura exactement  $2 * \binom{n}{d+2}$  circuits.

Dans le cas de points en 2 dimensions, les circuits sont de cardinal maximal 4. Un circuit de cardinal 2 correspond à des points confondus, un circuit de cardinal 3 correspond à des points alignés et un circuit de cardinal 4 correspond à des points en position générale (c'est à dire des points n'ayant pas de relation affine entre eux).

Dans le cas de points en 3 dimensions, les circuits sont de cardinal maximal 5. Un circuit de cardinal 2 correspond à des points confondus, un circuit de cardinal 3 correspond à des points alignés, un circuit de cardinal 4 correspond à des points coplanaires et un circuit de cardinal 5 correspond à des points en position générale.

Comme les points sont en position générale, les circuits sont de cardinal 5. Il n'y a donc que 2 circuits qui sont opposés. Ces deux circuits sont :

$$- + - + + \quad \text{et} \quad + - + - -$$

### 2.1.4 dualité

La théorie des matroïdes orientés possède la notion de dualité. Cette notion est valide dans les matroïdes orientés généraux mais ici j'expliciterai la dualité dans le cas réalisable. Chaque matroïde orienté possède donc un matroïde orienté dual. Les circuits d'un matroïde orienté sont alors les cocircuits du matroïde orienté dual et inversement. On se servira de cette définition des circuits d'un matroïde orienté pour le calcul de ces circuits.

Nous allons voir comment calculer le matroïde orienté dual. Prenons le matroïde orienté associé à l'ensemble de points  $E$ . Ce matroïde orienté est en fait calculé à partir de la matrice  $(v_1, \dots, v_n)$  qui est la matrice des vecteurs

## 2.2 Un exemple de matroïde orienté associé à une configuration de point en 3 dimensions

associés aux points de  $E$ . Quitte à réordonner les vecteurs, on peut alors changer de base de référence pour écrire la matrice des vecteurs sous la forme  $(I_{d+1}|A)$  où  $I_{d+1}$  est la matrice identité de taille  $(d+1) * (d+1)$  et  $A$  est une matrice de taille  $(d+1) * (n - (d+1))$ . Le matroïde orienté dual est donc le matroïde orienté associé aux vecteurs colonnes de la matrice  $(-{}^tA|I_{n-(d+1)})$  où  $-{}^tA$  est l'opposée de la matrice transposée de  $A$  et  $I_{n-(d+1)}$  est la matrice identité de taille  $(n - (d+1)) * (n - (d+1))$ .

On dispose donc de 3 ensembles différents pour caractériser le même matroïde orienté associé à une configuration de points. Dans la théorie des matroïdes orientés il existe des méthodes qui, à partir d'un de ces ensembles, permettent de déterminer les deux autres ensembles.

## 2.2 Un exemple de matroïde orienté associé à une configuration de point en 3 dimensions

Nous allons illustrer les notions vues précédemment par un exemple. Considérons les configurations de points données dans la figure 2.2.

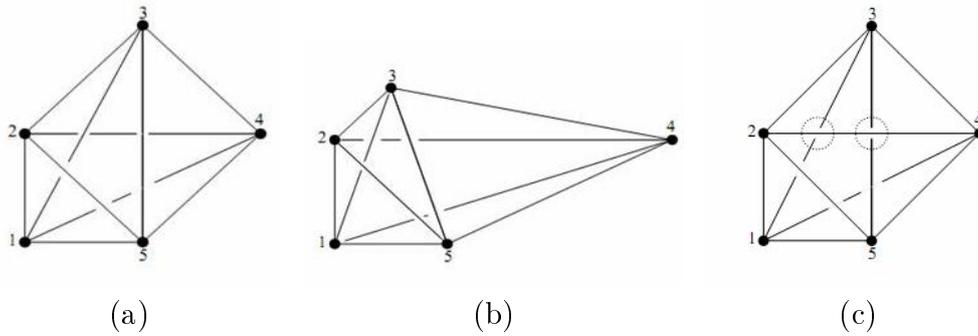


FIGURE 2.2 – Configurations de 5 points en 3 dimensions

Ces représentations correspondent à des points en 3 dimensions dont les coordonnées sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3.25 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme les matroïdes orientés ne traduisent que des propriétés combinatoires, les matroïdes orientés associés aux configurations (a) et (b) seront les

mêmes. En effet, en passant de la configuration (a) à la configuration (b), le point 4 a été déplacé mais sans qu'il n'y ait de changement au niveau des arrangements des droites et des plans. Par contre, en passant de l'une des premières configurations à la configuration (c), il y a bien eu une modification au niveau combinatoire. La droite (2 4) est en dessous des droites (1 3) et (3 5) dans les figures 2.2 (a) et 2.2 (b), mais est au dessus de ces mêmes droites dans la figure 2.2 (c).

On peut alors calculer le matroïde orienté associé aux configurations (a) et (b) ainsi que celui associé à la configuration (c). On obtient alors les bases suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \chi(1\ 2\ 3\ 4) = - & \chi(1\ 2\ 3\ 4) = + \\
 \chi(1\ 2\ 3\ 5) = + & \chi(1\ 2\ 3\ 5) = + \\
 \chi(1\ 2\ 4\ 5) = + & \chi(1\ 2\ 4\ 5) = + \\
 \chi(1\ 3\ 4\ 5) = + & \chi(1\ 3\ 4\ 5) = + \\
 \chi(2\ 3\ 4\ 5) = + & \chi(2\ 3\ 4\ 5) = -
 \end{array}$$

Ainsi on remarque par exemple qu'il y a une différence dans l'orientation de la base formée par les points 1, 2, 3 et 4 entre la configuration (a) et la configuration (c). Cela signifie que le simplexe formé par ces points n'a pas la même orientation c'est à dire par exemple que le point 4 n'est pas du même côté du triangle formé par les points 1, 2 et 3.

Le calcul de la moitié des cocircuits nous donne le résultat suivant (l'autre moitié est obtenue en changeant tous les signes dans chacun des cocircuits)

$$\begin{array}{ll}
 C^*(1\ 2\ 3) = 0\ 0\ 0\ +\ - & C^*(1\ 2\ 3) = 0\ 0\ 0\ -\ - \\
 C^*(1\ 2\ 4) = 0\ 0\ -\ 0\ - & C^*(1\ 2\ 4) = 0\ 0\ +\ 0\ - \\
 C^*(1\ 2\ 5) = 0\ 0\ +\ +\ 0 & C^*(1\ 2\ 5) = 0\ 0\ +\ +\ 0 \\
 C^*(1\ 3\ 4) = 0\ +\ 0\ 0\ - & C^*(1\ 3\ 4) = 0\ -\ 0\ 0\ - \\
 C^*(1\ 3\ 5) = 0\ -\ 0\ +\ 0 & C^*(1\ 3\ 5) = 0\ -\ 0\ +\ 0 \\
 C^*(1\ 4\ 5) = 0\ -\ -\ 0\ 0 & C^*(1\ 4\ 5) = 0\ -\ -\ 0\ 0 \\
 C^*(2\ 3\ 4) = -\ 0\ 0\ 0\ - & C^*(2\ 3\ 4) = +\ 0\ 0\ 0\ + \\
 C^*(2\ 3\ 5) = +\ 0\ 0\ +\ 0 & C^*(2\ 3\ 5) = +\ 0\ 0\ -\ 0 \\
 C^*(2\ 4\ 5) = +\ 0\ -\ 0\ 0 & C^*(2\ 4\ 5) = +\ 0\ +\ 0\ 0 \\
 C^*(3\ 4\ 5) = +\ +\ 0\ 0\ 0 & C^*(3\ 4\ 5) = +\ -\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

En prenant par exemple le cocircuit correspondant aux points 3, 4 et 5, on

remarque que les signes des points 1 et 2 sont les mêmes dans la configuration (a) alors qu'ils sont différents dans la configuration (c). Cette différence vient du fait que les points 1 et 2 sont du même côté du plan formé par les points 3, 4 et 5 dans la configuration (a) alors qu'ils sont chacun d'un côté différent dans la configuration (c).

De même que pour les cocircuits, on peut calculer la moitié des circuits. Le résultat est alors le suivant

$$C(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = -\ +\ -\ +\ + \qquad C(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = -\ -\ +\ -\ +$$

Il est tout à fait normal de n'avoir qu'un seul circuit puisque nous sommes dans le cas de points en positions générales donc nous n'avons ni 3 points alignés, ni 4 points coplanaires. Donc les supports des circuits sont les sous-ensembles à 5 éléments de E.

## 2.3 Propriétés géométriques codées par le matroïde orienté

Maintenant que nous avons vu la définition ainsi que l'application sur un exemple de chacun des 3 ensembles caractérisant un matroïde orienté, il est intéressant de voir quelles informations géométriques nous apporte chaque caractérisation.

### **Orientation des simplexes**

Après avoir calculé toutes les bases du matroïde orienté, le signe des bases nous indique l'orientation du simplexe correspondant aux points de la base. En effet, comme il n'existe que 2 orientations possibles pour les simplexes, toutes les bases qui auront le même signe indiqueront les simplexes ayant la même orientation. En reprenant l'exemple de la figure 2.2, la base 2, 3, 4, 5 est positive pour les configurations (a) et (b), ce qui signifie qu'en se positionnant au point 5 et en regardant la face 2 3 4 dans le sens trigonométrique on voit les points dans cet ordre (le point 2 puis le point 4 et enfin le point 3). Par contre la même base est négative dans la configuration (c). L'ordre des points en regardant la face depuis le point 5 est différent, c'est à dire que l'on verra le point 2 puis le point 3 et enfin le point 4. En changeant la base de référence, on change le signe de toutes les bases mais on ne change pas l'ordre dans

lequel on voit les points, ce qui signifie que le signe ne nous permet pas de savoir dans quel ordre sont vu les points mais un changement de signe nous indique un changement dans l'ordre des des points vus.

**Convexité**

Soit  $conv(E)$  l'enveloppe convexe de  $E$ . Un hyperplan de l'espace contient une face de  $conv(E)$  (i.e. une face extrême de dimension maximale) si et seulement si son complémentaire dans  $E$  induit un cocircuit positif de  $M$ . Un élément  $e$  de  $E$  est un point extrême de  $conv(E)$  si et seulement si il existe un cocircuit  $C^*$  de  $M$  avec  $C_+^* = e$ . Les cocircuits peuvent donc nous permettre de savoir si un point est intérieur ou non à l'ensemble de points. En reprenant l'exemple de la figure 2.2, tous les points appartiennent à l'enveloppe convexe. Donc pour tout point  $e$  de  $E$  il existe un cocircuit tel que le signe de  $e$  soit différent du signe des autres points. De plus, pour les configurations (a) et (b) on a  $C^*(1\ 2\ 4) = 0\ 0\ -\ 0\ -$  ce qui indique que la face 1 2 4 est extrême alors que ce n'est plus le cas dans la configuration (c).

**Point entre 2 autres**

Si un circuit est de cardinal 3 cela signifie que les 3 points sont alignés. Il est alors possible de savoir lequel est entre les deux autres. Pour se faire il faut regarder le signe des éléments du circuit. Les 2 éléments de même signe indiquent les extrémités du triangle et l'élément de signe différent appartient donc au segment.

**Point entre plusieurs autres**

Si dans un circuit il y a un élément qui est de signe différent des autres alors cet élément est à l'intérieur de la figure formée par les autres points. Dans le cas de points en 3 dimensions on peut avoir un point à l'intérieur d'un triangle (circuit de cardinal 4) ou à l'intérieur d'une pyramide formée par 4 points (circuit de cardinal 5).

**Segment coupant un autre segment ou un triangle**

Dans le cas de circuits de cardinal 4, s'il n'y a pas un élément de signe différents des autres on a donc 2 éléments positifs et 2 éléments négatifs. Alors le segment formé par les deux segments positifs coupe le segment formé par les 2 éléments négatifs.

De même, dans le cas de circuits de cardinal 5, s'il n'y a pas un élément de signe différents des autres on a donc 2 éléments d'un signe et 3 éléments d'un autre signe. Alors le segment formé par les deux points de même signe coupe le triangle formé par les 3 éléments de l'autre signe.

**Remarque :** Les 3 points précédents sont des cas particuliers de la partition de Radon. Une partition de Radon est une partition telle que l'enveloppe convexe des 2 parties s'intersectent. Les circuits réalisent une partition de Radon de leurs supports, c'est à dire que pour chaque circuit l'enveloppe convexe des points positifs intersecte l'enveloppe convexe des points négatifs. Inversement, en prenant la partition de Radon d'un support donné, les 2 sous-ensembles donnés par la partition sont les 2 parties signées des 2 circuits correspondants à ce support.

## Chapitre 3

# Mise en place d'un outil informatique adéquat

Pour pouvoir comparer des structures anatomiques à l'aide de matroïdes orientés il faut donc calculer les matroïdes orientés correspondant aux points 2D ou 3D des différentes structures. Le calcul de triangulation dans un ensemble de points [PR03] est réalisé par un programme informatique du nom de TOPCOM disponible librement sur le site <http://www.rambau.wm.uni-bayreuth.de/TOPCOM/>. Comme ce programme est fait pour calculer des triangulations, nous avons décidé de créer nous même un programme calculant les matroïdes orientés pour que ce dernier soit plus proche de notre application. Ce choix a également été fait pour pouvoir modifier plus facilement le programme dans le but entre autre de garantir l'exactitude des calculs.

J'ai donc mis en place dans le cadre de ce stage un programme en C++ qui calcule les bases, les cocircuits ainsi que les circuits d'un ensemble de points 2D ou 3D ou même d'un ensemble de vecteurs de dimension quelconque. On suppose que les points (ou les vecteurs) ont leurs coordonnées écrites sur une base de l'espace qu'ils engendrent, c'est à dire que le nombre de points (ou de vecteurs) est strictement plus grand que la dimension de l'espace auxquels ils appartiennent. Le programme n'est intéressant qu'a cette condition car si cette condition n'est pas respectée alors l'ensemble des circuits est vide et tous les chirotopes sont nuls.

## 3.1 Programmation du matroïde orienté associé à une configuration de points en dimension quelconque

Dans cette partie nous verrons les méthodes utilisées pour calculer les bases, les cocircuits ainsi que les circuits ; ensuite nous verrons comment réaliser ces calculs de manière exacte et enfin nous étudierons la complexité algorithmique de ces méthodes.

### 3.1.1 Méthodes de calcul des bases, cocircuits et circuits

Nous avons vu dans le chapitre 1 que l'on pouvait caractériser les matroïdes orientés par l'ensemble de ses bases, l'ensemble de ses cocircuits ou l'ensemble de ses circuits. Les calculs de ces 3 ensembles sont réalisés à partir des vecteurs associés aux points. La première étape du programme est donc de calculer la matrice des coordonnées des vecteurs à partir de celle des coordonnées des points. Les points étant inscrits en colonne, il suffit juste de rajouter une ligne de 1 à la matrice des coordonnées des points pour obtenir celle des coordonnées des vecteurs. Pour faciliter les explications, nous noterons  $n$  le nombre de points,  $d$  la dimension affine (et donc  $d + 1$  la dimension vectorielle). La matrice des coordonnées des points est donc de dimension  $d * n$  ( $d$  lignes et  $n$  colonnes) et celle des coordonnées des vecteurs est donc de dimension  $(d + 1) * n$ .

les bases

---

**Algorithme 1** Calcul des chirotopes

---

**ENTRÉES:** La matrice des coordonnées des vecteurs de  $V$

**SORTIES:** la liste de tous les chirotopes

Initialiser  $l$  à la liste vide

**pour** tous les  $d + 1$ -uplets  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{d+1}}\}$  de vecteurs de  $V$  **faire**

    Ecrire la matrice  $\text{Mat} = \begin{pmatrix} v_{i_1} & \dots & v_{i_{d+1}} \end{pmatrix}$

    Calculer  $\mathbf{det}(\text{Mat})$

    Ajouter le signe du déterminant à la liste  $l$

**fin pour**

Retourner  $l$ .

---

La définition mathématique des bases d'un matroïde orienté permet, à partir de la matrice des coordonnées des points, de calculer directement l'en-

semble des bases du matroïde orienté associé à cette configuration de point. Comme les bases ont toutes pour cardinal  $d + 1$ , pour calculer cet ensemble il faut donc prendre toutes les parties à  $d + 1$  éléments parmi  $n$ . Le calcul de cet ensemble est détaillé dans l’algorithme 1.

Pour calculer l’ensemble des bases, on utilise l’algorithme 1 en prenant tous les  $d + 1$ -uplets de points par ordre lexicographique.

### les cocircuits

---

**Algorithme 2** Calcul des cocircuits

---

**ENTRÉES:** La matrice des coordonnées des vecteurs de  $V$

**SORTIES:** la liste de tous les cocircuits

Initialiser  $l$  à la liste vide

**pour** tous les  $d$ -uplets  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_d}\}$  de vecteurs de  $V$  **faire**

    Ecrire la matrice  $M = (v_{i_1} \ \dots \ v_{i_d})$

    Calculer **rang**( $M$ )

**si** le rang est égal à  $d$  **alors**

        Initialiser  $C^*$  à la liste vide

**pour** tous les vecteurs  $v_j$  de  $V$  **faire**

            Ecrire la matrice  $\text{Mat} = (v_j \ v_{i_1} \ \dots \ v_{i_d})$

            Calculer **det**( $\text{Mat}$ )

            Ajouter le signe du déterminant à la liste  $C^*$

**fin pour**

**fin si**

    Ajouter  $C^*$  à la liste  $l$

**fin pour**

Retourner  $l$ .

---

Le calcul des cocircuits d’un matroïde orienté est un peu plus délicat. Nous allons donc détailler un peu l’algorithme 2. Pour calculer un cocircuit, on doit trouver un hyperplan (c’est à dire  $d$  vecteurs de  $V$  qui sont linéairement indépendants) avant de regarder dans quel demi-espace se trouve chaque vecteur de  $V$ . Pour savoir si  $d$  vecteurs forment un hyperplan, une méthode est d’écrire la matrice dans laquelle chaque colonne correspond à un des  $d$  vecteurs (la matrice est donc constituée de  $d + 1$  lignes et de  $d$  colonnes) et de calculer son rang. Si le rang de la matrice est égal à  $d$ , les  $d$  vecteurs formeront bien un hyperplan. On va donc prendre tous les sous-ensembles de  $V$  à  $d$  éléments et tester si chaque sous-ensemble constitue une matrice de rang égal à  $d$ . Ensuite si un sous-ensemble forme un hyperplan, pour chaque vecteur  $v_j$  de  $V$  on va calculer le signe du déterminant de la

matrice Mat. Comme le signe du déterminant d'une matrice indique l'orientation des vecteurs par rapport à la base sur laquelle est écrite la matrice ; si les déterminants de deux matrices ont le même signe, alors les vecteurs ont la même orientation. Ainsi si les déterminants des matrices  $M_i$  et  $M_j$  ont le même signe, cela nous indique que les vecteurs  $v_i$  et  $v_j$  sont dans le même demi-espace ; et si le déterminant de la matrice  $M_i$  est nul, alors le vecteur  $v_i$  appartient à l'hyperplan.

**les circuits**

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les circuits d'un matroïde orienté sont les cocircuits du matroïde orienté dual. Pour calculer les circuits du matroïde nous allons donc calculer le matroïde orienté dual puis nous allons utiliser la méthode que nous venons de voir à partir de ce matroïde orienté dual.

---

**Algorithme 3** Calcul du matroïde orienté dual

---

**ENTRÉES:** La matrice  $M$  des coordonnées des vecteurs de  $V$

**SORTIES:** La matrice  $M^*$  correspondant au matroïde orienté dual

*Etape 1* **[Ecriture de la matrice  $M$  sous la forme  $(I_{d+1}|A)$ ]**

Prendre  $d + 1$  premiers vecteurs  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{d+1}}\}$  de  $V$

**tant que**  $\det(v_{i_1} \dots v_{i_{d+1}}) = 0$  **faire**

Prendre un autre  $d + 1$ -uplet de vecteurs

**fin tant que**

Ecrire la matrice  $M$  en commençant par ces  $d + 1$  vecteurs

Ecrire  $M$  sous forme échelonnée réduite (c'est à dire sous la forme  $(I_{d+1}|A)$ )

*Etape 2* **[Calcul de la matrice  $M^*$ ]**

Ecrire la matrice  $M^* = (-^t A | I_{n-(d+1)})$

Retourner  $M^*$ .

---

Pour calculer le matroïde orienté dual, on utilise l'algorithme 3. Cet algorithme se passe en deux étapes. On commence par écrire la matrice  $M$  (qui est la matrice des vecteurs associés aux points de  $E$ ) sous la forme  $(I_{d+1}|A)$  (où  $I_{d+1}$  est la matrice identité de taille  $(d+1)*(d+1)$  et  $A$  est une matrice de taille  $(d+1)*(n-(d+1))$ ). Ensuite, on écrit la matrice  $M^* = (-^t A | I_{n-(d+1)})$  qui nous servira à calculer le matroïde orienté dual. Pour la première étape, il faut commencer par trouver  $d + 1$  vecteurs parmi les  $n$  vecteurs  $v_i$  de sorte que ces  $d + 1$  vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^{d+1}$ . On commence par tester si les vecteurs  $\{v_1, \dots, v_{d+1}\}$  forment une base de  $\mathbb{R}^{d+1}$  ce qui revient à regarder si  $\det(v_1, \dots, v_{d+1}) \neq 0$  (puisque si le déterminant d'une matrice carrée de taille  $k*k$  est non nul, alors les colonnes de cette matrice forment une base de

$\mathbb{R}^k$ ). Si ce déterminant est nul, les vecteurs  $\{v_1, \dots, v_{d+1}\}$  ne forment pas une base de  $\mathbb{R}^{d+1}$  et il faut donc changer au moins l'un de ces vecteurs. Une fois que l'on a les  $d+1$  vecteurs formant une base on réécrit la matrice  $(v_1, \dots, v_n)$  en plaçant en premier ces  $d+1$  vecteurs. Il ne reste alors plus qu'à écrire la matrice sous la forme échelonnée réduite. La méthode usuelle pour écrire la matrice sous cette forme est la méthode du pivot de Gauss, c'est celle que nous utiliserons. Il ne nous reste plus qu'à calculer  ${}^tA$  pour avoir la matrice  $(-{}^tA | I_{n-(d+1)})$  à partir de laquelle nous pouvons calculer le matroïde orienté dual. Il nous suffit alors de calculer les cocircuits à partir de cette matrice pour obtenir les circuits du matroïde orienté associé à l'ensemble de points  $E$ .

### Calcul du déterminant et du rang

Pour réaliser les calculs des bases, cocircuits et circuits du matroïde orienté associé à l'ensemble de points  $E$ , on utilise des calculs de déterminants et de rangs de matrices. Ces deux calculs peuvent notamment être réalisés grâce à la méthode du pivot de Gauss qui est utilisée dans le calcul du matroïde dual. Ainsi, seul la méthode du pivot de Gauss est nécessaire pour calculer les bases, les cocircuits et les circuits puisque pour chacun d'eux on se ramène à des calculs de déterminants et de rangs de matrices. Ainsi pour des questions de simplicité de programmation j'ai décidé de réaliser ces calculs par la méthode du pivot de Gauss même s'il existe des méthodes plus performantes. Il est donc envisageable de changer de méthode pour les calculs du déterminant et du rang. Pour plus de renseignements sur la méthode du pivot de Gauss ou sur les matrices, je recommande le livre [Lay04] dont je me suis servi lors de la programmation.

### 3.1.2 L'exactitude des calculs

Dès le début, l'exactitude des calculs s'est avérée comme étant l'une des premières choses à régler. En effet, le calcul des matroïdes orientés est très sensible aux instabilités au voisinage de zéro. Lors du calcul d'un cocircuit par exemple, le signe d'un point indique si le point est d'un côté ou de l'autre de l'hyperplan ou si il appartient à cet hyperplan. Si le calcul du cocircuit n'est pas exact on pourrait se retrouver avec des points qui sont proches de l'hyperplan pour lesquels le calcul indiquerait que le point appartient à l'hyperplan voir même qu'il est dans l'autre demi-espace. Pour résoudre ce problème, j'ai décidé de travailler avec des fractions. Comme la méthode du pivot de Gauss n'utilise que les 4 opérations de bases, les fractions sont donc bien adaptées à cette méthode. Comme nous l'avons vu précédemment, il

n'est pas du tout exclu que nous changions de méthode pour le calcul du rang et du déterminant. Il faudrait alors voir si les fractions sont toujours adaptées à cette nouvelle méthode.

L'utilisation de fractions à la place de nombres décimaux garantit l'exactitude des calculs mais augmente le nombre de calculs à faire (mise sous le même dénominateur, simplification des fractions ...). De plus la taille des fractions peut varier énormément. Il a fallu trouver une méthode qui garantissait de pouvoir travailler avec des fractions de taille arbitraire tout en ayant des temps de calculs raisonnables. L'arithmétique multiprécision permet de résoudre ces problèmes et le choix s'est porté vers la bibliothèque "GNU Multiple Precision" (disponible sur le site <http://gmplib.org/>) pour ce qui est de garantir une rapidité de calcul. Par contre la taille des fractions augmente avec le nombre de chiffres significatifs pour les coordonnées des points, ce qui entraîne une modification du temps de calcul. Le temps de calcul dépend donc entre autre de ce nombre de chiffres significatifs.

### 3.1.3 Complexité théorique et temps de calcul

Comme nous l'avons vu précédemment, les méthodes de calculs des chirotopes, des cocircuits ainsi que des circuits sont basées sur la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode se passe en 2 temps, la matrice est tout d'abord mise sous forme triangulaire supérieure, puis est mise sous sa forme échelonnée réduite.

Lors de l'utilisation du pivot de Gauss pour le calcul des déterminants et des rangs des matrices, juste la première étape est nécessaire. En notant  $l$  le nombre de lignes de la matrice,  $c$  son nombre de colonnes et  $m$  le minimum des 2, la complexité de cette étape est alors en  $O(m \times l \times c)$ . Les calculs de rang et de déterminant lors de la recherche des chirotopes et des cocircuits se font donc en  $O(d^3)$ . La deuxième étape de la méthode du pivot de Gauss est quand à elle en  $O(l^2 \times c)$ .

Pour le calcul des chirotopes, il faut faire un calcul de déterminant pour tous les  $d + 1$ -uplets de vecteurs de  $V$ . Donc l'algorithme de calcul des chirotopes est en  $O(d^3 \times n^{d+2})$ .

En ce qui concerne le calcul des cocircuits, il faut faire un calcul de rang d'une matrice de taille  $(d + 1) \times d$  puis pour tous les vecteurs de  $V$  il faut calculer le déterminant d'une matrice de taille  $(d + 1) \times (d + 1)$  et ce pour tous les  $d$ -uplets de vecteurs de  $V$ . Donc l'algorithme de calcul des cocircuits est en  $O((d^3 + n \times d^3) \times n^{d+1}) = O(n^{d+2} \times d^3)$ .

Le calcul des circuits est un peu plus délicat. Il faut commencer par calculer le matroïde orienté dual. Dans le pire des cas, pour trouver une base de  $\mathbb{R}^{d+1}$  il faut prendre tous les  $d + 1$ -uplets de vecteurs de  $V$  (ce qui est

très rare en pratique). Puis on utilise les 2 étapes de la méthode du pivot de Gauss. Le calcul du matroïde orienté dual est donc en  $O(n^{d+2})$  dans le pire des cas mais en pratique cet algorithme est en  $O(d^2 \times n)$ . Ensuite pour obtenir les circuits, on utilise le calcul des cocircuits avec cette nouvelle matrice de dimension  $n - (d + 1) \times n$ . Cela revient à calculer le rang d'une matrice taille  $(n - (d + 1)) \times (n - (d + 1) - 1)$  puis pour tous les vecteurs de  $V$  il faut calculer le déterminant d'une matrice de taille  $(n - (d + 1)) \times (n - (d + 1))$  et ce pour tous les  $(n - (d + 1) - 1)$ -uplets de vecteurs de  $V$  (c'est à dire pour tous les  $n - d - 2$ -uplets). Or  $\binom{n}{n-d-2} = \binom{n}{d+2}$ , donc l'algorithme de calcul des circuits est en  $O(((n - d)^3 + n \times (n - d)^3) \times n^{d+3}) \approx O(n^{d+7})$ .

Il faut noter que le programme est fait dans le but de comparer des formes anatomiques 3D. On aura donc  $d = 3$  ce qui revient à dire que les algorithmes de calculs de chirotopes et de cocircuits sont polynomiales en  $n$  (ils sont en  $O(n^5)$ ). Par contre le calcul des circuits s'effectue d'après ce qu'on viens de voir en  $O(n^{10})$ . Le fait que  $\binom{n}{d+2}$  soit très inférieur à  $n^{d+3}$ , ajouté à quelques subtilités pour diminuer le nombre de calculs font que les temps de calculs sont assez faibles. Par exemple, pour un ensemble de 16 points en 3 dimensions dont les coordonnées ont 6 chiffres significatifs, le calcul de l'ensemble des chirotopes ainsi que celui de l'ensemble des cocircuits s'effectuent en environ 1 seconde chacun et le temps de calcul de l'ensemble des circuits est de l'ordre de 50 secondes. Ces faibles temps de calculs font que je n'ai pas cherché à améliorer la complexité des algorithmes puisque ce n'était pas une priorité. Je pense qu'il y a possibilité de diminuer le nombre de calculs, notamment pour le calcul des circuits. Ce serait l'un des points à travailler dans les années à venir.

## 3.2 Le fichier d'entrée

Ce programme étant destiné à comparer des objets (réels ou mathématiques) du point de vue combinatoire, il faut donc définir des points caractéristiques communs à tous ces objets. Une fois que ces points caractéristiques sont définis, il faut récupérer la liste des coordonnées de ces points dans un repère qui devra être le même pour chaque objet (la base devra être prise dans la même orientation puisque les signes des chirotopes dépendent de cette orientation.).

Comme les coordonnées doivent être données au programme sous forme de nombres décimaux, il faudrait fournir au programme l'incertitude sur les données. En effet, nous avons vu dans la partie précédente que les opéra-

tions devaient être exactes pour ne pas avoir de problème dans le calcul du matroïde orienté. L'incertitude sur les données peut amener les mêmes problèmes. Des points alignés sur l'objet peuvent ne plus l'être à cause de cette incertitude et inversement des points qui ne sont pas alignés peuvent le devenir. De plus, le fait de savoir que les données sont précises à  $10^{-6}$  par exemple nous indique que les fractions pour les calculs auront pour dénominateur  $10^6$ .

Pour l'instant le programme ne gère pas encore cette imprécision lors des calculs mais je ferai en sorte que la prochaine version du programme gère cette incertitude lors des calculs pour au moins demander à l'utilisateur si les points posant problème sont alignés ou non.

### 3.3 Les fichiers de sortie

Une fois que le programme aura calculé les matroïdes orientés pour tous les échantillons du fichier d'entrée, nous disposerons d'un certain nombre de fichiers texte. Pour simplifier le traitement des résultats, le programme va créer 4 fichiers texte et un fichier 3D au format PLY (Polygon File Format) [http://fr.wikipedia.org/wiki/Format\\_de\\_fichier\\_de\\_polygones](http://fr.wikipedia.org/wiki/Format_de_fichier_de_polygones) par échantillon. Pour chaque échantillon il y aura donc : le fichier des données, le fichier des bases, le fichier des cocircuits et le fichier des circuits et le fichier au format PLY pour la visualisation 3D de l'objet à l'aide d'un logiciel tel que MeshLab (<http://meshlab.sourceforge.net/>) par exemple.

Le fichier des données d'un échantillon contient les informations du fichier d'entrée concernant uniquement les données utiles au programme et caractérisant cet échantillon. On retrouvera donc dans ce fichier la dimension ainsi que le terme "affine" ou "vectorielle". Il y aura le nombre de points (ou de vecteurs) suivis des coordonnées des points (ou des vecteurs).

Le fichier des bases contient le calcul de tous les  $d+1$ -uplets de points (où  $d+1$  est la dimension vectorielle). Chaque base étant sur une ligne différente il y aura donc  $\binom{n}{d+1}$  lignes dans le fichier. Toutes les lignes auront la même forme, il y a d'abord les indices des  $d+1$  points sur lesquels portent le calcul de bases suivi du chirotope de la base. Dans ce fichier les bases sont ordonnées sous forme lexicographique. Ce qui suit représente les premières lignes d'un fichier des bases, calculé à partir d'une configuration de 16 points en dimension 3.

```
1 2 3 4 +
1 2 3 5 -
1 2 3 6 -
```

```
1 2 3 7 -
1 2 3 8 -
```

Dans le fichier des cocircuits on trouvera l'ensemble des cocircuits du matroïde orienté. Le calcul des cocircuits se fait à partir d'un  $d$ -uplet de points. Ces  $d$ -uplets de points sont pris dans l'ordre lexicographique. Chaque ligne du fichier correspondra à un  $d$ -uplet de points. Si ces points ne forment pas un hyperplan, alors la ligne correspondante du fichier l'indiquera. Par contre, si ces points forment un hyperplan alors le complémentaire de cet hyperplan est un cocircuit. Toutes les lignes correspondant à un cocircuit auront la même forme, il y aura le signe du premier point dans le cocircuit suivi du signe du deuxième point et ainsi de suite jusqu'au signe du dernier point. Prenons par exemple le cas où les points  $1, 2, 3, \dots, d$  forment un hyperplan. La première ligne du fichier sera donc le cocircuit correspondant à cet hyperplan. Cette ligne sera donc constituée de  $d$  fois la valeur 0 suivie des signes des autres points. Une ligne peut se répéter plusieurs fois. En effet prenons l'exemple de points en 2 dimensions tel que les points 1, 2 et 3 soient alignés. Comme nous sommes en 2 dimensions les hyperplans sont les droites de  $\mathbb{R}^2$ . La droite (1 2) est donc la même que la droite (1 3) donc les cocircuits correspondants aux hyperplans formés par les points 1 2 et 1 3 sont donc identiques et le fichier des cocircuits correspondant aura donc la première ligne et la deuxième ligne qui seront identiques. Quel que soit la configuration de points, il y aura toujours  $\binom{n}{d+1}$  lignes dans le fichier. Voici les premières lignes du fichier des cocircuits pris sur la même configuration de points.

```
0 0 0 - + + + + + + + + + + +
0 0 + 0 + + + + + + + + + + +
0 0 - - 0 + + + + + + + + + + +
0 0 - - - 0 + + + + + + + + + +
0 0 - - - - 0 - - - - - + + - -
```

Comme les circuits du matroïde orienté sont les cocircuits du matroïde orienté dual, le fichier des circuits aura donc la même forme que le fichier des cocircuits. Par contre les circuits ne seront pas ordonnés mais il y aura exactement  $\binom{n}{n-d}$  lignes dans le fichier. Les lignes suivantes sont les premières du fichier des circuits pris sur le même exemple que pour les autres fichiers.

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 + + - - +
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 - 0 - + + -
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 - + 0 + + -
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 + - - 0 - +  
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 + - - + 0 +
```

## 3.4 Visualisation des objets 3D

Pour pouvoir travailler sur chaque objet et pour pouvoir les comparer de manière visuelle, nous avons travaillé sur la visualisation des objets 3D à partir des coordonnées des points. Nous avons donc réalisé un programme permettant cette visualisation de 2 manières : la première ne nécessitant pas d'installation de logiciels puisque le fichier retourné est un fichier Postscript (.ps) et la deuxième crée un fichier PLY (Polygon File Format) [http://fr.wikipedia.org/wiki/Format\\_de\\_fichier\\_de\\_polygones](http://fr.wikipedia.org/wiki/Format_de_fichier_de_polygones) nécessitant un logiciel de visualisation 3D tel que MeshLab (<http://meshlab.sourceforge.net/>) par exemple. Le programme propose de tracer tous les segments entre chaque paire de points ou de définir les sommets des segments à tracer.

Pour la visualisation par le biais d'un fichier Postscript, ce fichier sera constitué de 3 vues différentes de l'objet. Ces vues seront en 2 dimensions avec un dégradé du noir au gris jouant le rôle de la troisième dimension. Ces fichiers sont ensuite convertis au format PDF pour pouvoir être vu par tous. La figure 3.1 montre un exemple de fichier Postscript (qui sont visible sur le site <http://www.lirmm.fr/~sol/ResultatsM2/ResultatsM2.htm>).

L'avantage de la visualisation 3D est de pouvoir regarder l'objet de n'importe quel point de vue voir même de superposer des objets. La figure 3.1 montre un exemple de fichier Postscript (qui sont visible sur le site <http://www.lirmm.fr/~sol/ResultatsM2/ResultatsM2.htm>).

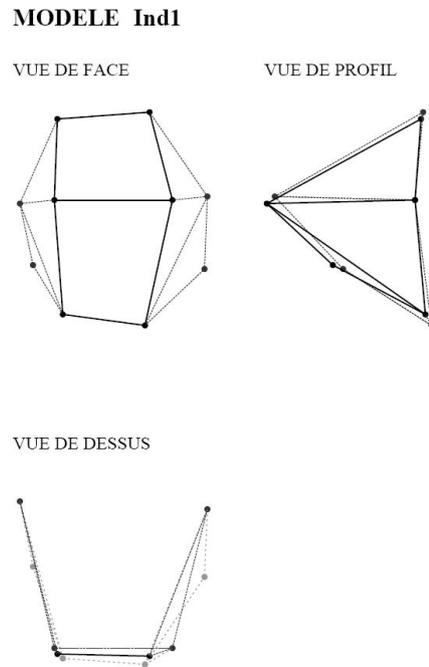


FIGURE 3.1 – Exemple de fichier Postscript

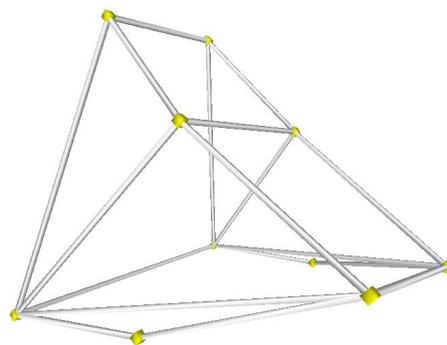


FIGURE 3.2 – Exemple de visualisation en 3D

# Chapitre 4

## Application à l'analyse de la forme 3D du crâne

Après avoir mis en place l'outil informatique, nous avons voulu l'appliquer à des données réelles notamment pour vérifier que le codage combinatoire pouvait bien se faire par le biais de notre méthode. Nous avons donc récupéré grâce à José Braga, qui est professeur à l'université Paul Sabatier de Toulouse en Anthropobiologie et Imagerie Anatomique et chercheur au laboratoire AMIS (Anthropologie Moléculaire et Imagerie de Synthèse), des séries de points pris sur des crânes d'humains et de chimpanzés. De plus, Jacques Treil, neuroradiologue et Chercheur au Laboratoire d'Anthropobiologie de Toulouse, nous a fourni d'autres séries de points pris uniquement sur des humains. Dans ce qui suit nous allons détailler ces deux ensembles de données avant d'étudier les résultats donnés par le programme.

### 4.1 Présentation des données 3D de crânes

Les données que nous avons étudiés lors du sage sont des listes de points 3D de repère anatomiques osseux pris à partir d'images 3D. Les coordonnées de ces points sont obtenues par tomographie à rayon X qui est une technique d'imagerie, très utilisée dans l'imagerie médicale.

#### 4.1.1 Les données anthropologiques

Les données de José Braga sont les coordonnées en 3 dimensions de 16 points repères pris sur des crânes humains, de chimpanzés communs et de bonobos (appelé aussi chimpanzé nain). Les données provenant d'humains ont déjà été étudiés pour estimer l'âge du squelette (voir l'article [BT07]).

Cette technique permet de reconstruire le volume d'un crâne à partir d'une série de mesures effectuées par tranches successives. Pour les humains nous disposons de 68 mesures prises sur des enfants dont les âges vont de quelques jours à 12 ans, 59 mesures prises sur des adolescents qui ont entre 12 ans et 18 ans et 55 mesures prises sur des adultes. En plus de l'âge, nous avons le sexe de chaque individu. Pour ce qui est des singes, nous avons 58 mesures prises sur des bonobos et 50 sur des chimpanzés communs. L'âge de chaque singe a été approximé et séparé en différentes classes : les nouveaux nés (notés NJ), les jeunes (séparés en 3 groupes notés J1 J2 et J3 des plus jeunes aux plus âgés) et les adultes (séparés en 2 groupes notés A1 et A2 représentant les adultes les moins âgés et les adultes les plus âgés). De même nous savons pour la majorité des singes s'il s'agit d'un mâle ou d'une femelle. Les 16 points ont

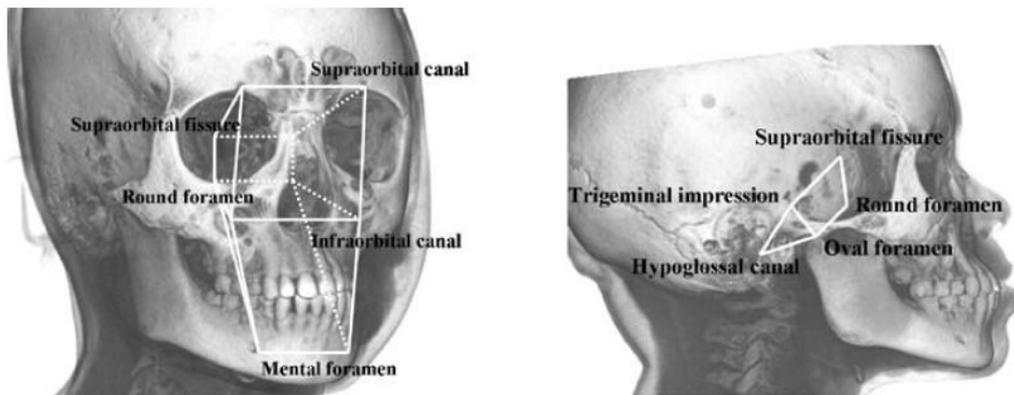


FIGURE 4.1 – Position des 16 points des données de José Braga

été pris sur la face et la base du crâne comme l'indique la figure 4.1. Lors de la mesure des coordonnées, l'origine du repère a été prise pour chaque crâne au milieu des deux points situés au niveau des canaux infraorbitaux (sur la face, voir figure 4.1).

#### 4.1.2 Les données cliniques

En ce qui concerne les données de Jacques Treil, il s'agit de coordonnées en 3 dimensions de 10 points pris sur des crânes de 310 personnes. 6 points ont été pris sur la face, 2 au niveau de la mâchoire et les 2 derniers au niveau de l'oreille interne (voir la figure 4.2). Ces données sont des données orthodontiques qui ont déjà été étudiées. Les recherches effectuées sur ces données sont présentées dans l'article [TBC<sup>+</sup>01]. Les individus ont été triés en 3 classes (classe I, classe II et classe III) correspondant à une classification

de sens antéro-postérieur. Les individus de la classe I n'ont ni concavité ni convexité faciale, les individus de la classe II ont une convexité faciale le plus souvent par rétrognathie (c'est à dire un recul du maxillaire inférieur) tandis que les individus de la classe III ont une concavité faciale le plus souvent par prognathie (avancée du maxillaire inférieur). Chacune des classes a été divisée en 3 sous-classes (normales, hypodivergentes et hyperdivergentes) qui traduit l'écartement des points de la face sur l'axe vertical.

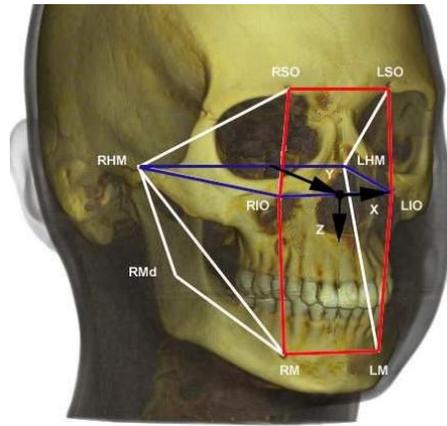


FIGURE 4.2 – Position des 10 points des données de Jacques Treil

## 4.2 Introduction d'une distance entre matroïdes orientés

Que ce soit aussi bien pour l'application à l'étude morphologique de structures anatomiques que pour la théorie purement mathématique, il est intéressant de pouvoir comparer les matroïdes orientés. En effet, pour ce qui est de l'application, il est important de pouvoir repérer les sujets proches les uns des autres ou à l'inverse de mettre en avant les sujets très différents des autres. D'un point de vue théorique, il semblerait que la comparaison de matroïdes orientés n'ait pas encore été étudiée. Pour pouvoir comparer des matroïdes orientés il nous faut donc définir une distance entre 2 matroïdes orientés.

Comme nous l'avons remarqué lors des préliminaires, un même matroïde orienté correspond à plusieurs configurations de points. On peut notamment prendre une configuration de points et regarder comment déplacer l'un de ces points sans changer le matroïde orienté associé. On remarque alors que ce point possède une zone de l'espace dans laquelle ce point peut être déplacer

sans modifier le matroïde. Cette zone est en faite délimitée par les hyperplans formés par les autres points. Cette remarque provient directement de la définition des cocircuits puisque si le point ne passe pas de l'autre côté d'un hyperplan alors les signes correspondant à ce point dans les cocircuits ne changent pas. Il en est de même pour les autres cocircuits (c'est à dire les cocircuits pour lesquels le point appartient à l'hyperplan). En effet, en déplaçant le point dans la zone on ne fait pas passer le point en question de l'autre côté des hyperplans, donc en déplaçant le point les hyperplans auxquels ce point appartient changent sans pour autant faire passer un point de l'autre côté d'un hyperplan.

Nous nous sommes alors intéressé à ce qui se produit comme changement dans le matroïde orienté lorsque le point quitte cette zone. Pour les mêmes raisons que précédemment, plusieurs cocircuits vont être modifiés. Il en est de même pour les circuits (dans le cas bien sûr où il y a assez de points pour avoir plusieurs circuits). Par contre, en position générale, lorsque le point passe de l'autre côté d'un hyperplan il n'y a qu'un seul chirotope de modifié. Ce chirotope correspond à la base formée par les points de l'hyperplan et le point qui a été déplacé. Si nous ne sommes pas en position générale, alors il se peut que plusieurs hyperplans soient confondus (dans le cas où il y a plus de  $d$  points qui appartiennent à l'hyperplan). Dans ce cas il y aura plusieurs chirotopes qui changeront en faisant passer un point d'un côté à l'autre de l'hyperplan.

Comme dans la plupart des cas il n'y aura qu'un chirotope qui change lorsqu'on fait passer un point d'un côté à l'autre d'un hyperplan, il est alors naturel de comparer 2 matroïdes orientés par le nombre de chirotopes différents. Pour que des matroïdes orientés soient comparables il faut que ces matroïdes orientés soient définis sur des configurations de points comparables. Pour cela, les configurations doivent comporter le même nombre de points pris dans un espace de même dimension. Les points devront également être ordonnés de la même façon (c'est à dire qu'il faudra faire une correspondance entre les points lors de leur numérotation) puisque l'on va comparer notamment  $\chi(1\ 2\ \dots\ d+1)$  pour la première configuration avec  $\chi(1\ 2\ \dots\ d+1)$  pour la deuxième configuration. De plus, le chirotope d'une base de référence devra être le même pour toutes les configurations pour que les signes des chirotopes indiquent bien la même orientation. On peut alors se demander si ce nombre de différences est bien une distance au sens mathématique du terme, c'est à dire si cette relation vérifie les propriétés suivantes pour tous matroïdes

orientés  $M_1, M_2, M_3$  définis sur des configurations de points comparables :

$$d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) \quad (4.1)$$

$$d(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2 \quad (4.2)$$

$$d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) \quad (4.3)$$

Nous allons montrer que cette relation est bien une distance. Soient  $M_1, M_2$  et  $M_3$  3 matroïdes orientés définis sur des configurations de points comparables. Notons  $d(M_i, M_j)$  le nombre de chirotopes différents entre les matroïdes  $M_i$  et  $M_j$ . La propriété 4.1 étant triviale, nous allons montrer la propriété 4.2. Il est évident que  $M_i = M_j \implies d(M_i, M_j) = 0$  puisque si les matroïdes orientés sont les mêmes cela signifie qu'ils ont les mêmes bases, les mêmes cocircuits et les mêmes circuits donc les chirotopes sont identiques. De même, si 2 matroïdes orientés ont les mêmes chirotopes, leurs ensembles des bases sont identiques et les matroïdes sont donc égaux ce qui prouve  $d(M_i, M_j) = 0 \implies M_i = M_j$ . La propriété 4.2 est donc vérifiée.

Il ne nous reste plus qu'à montrer l'inégalité triangulaire (la propriété 4.3). Nous allons tout d'abord le montrer pour un chirotope. Notons  $e$  un  $d+1$ -uplet de vecteurs de  $V$  et  $\chi_1(e)$ ,  $\chi_2(e)$  et  $\chi_3(e)$  les chirotopes des matroïdes orientés  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

Posons  $\Delta_e(i, j) = 1$  si  $\chi_i(e) = \chi_j(e)$  et  $\Delta_e(i, j) = 0$  sinon.

Ainsi si  $\Delta_e(1, 3) = 0$  alors  $\Delta_e(1, 3) \leq \Delta_e(1, 2) + \Delta_e(2, 3)$ .

De même, si  $\Delta_e(1, 3) = 1$  alors  $\chi_1(e) \neq \chi_3(e)$ . On a soit  $\chi_1(e) \neq \chi_2(e)$  soit  $\chi_2(e) \neq \chi_3(e)$  (voir les 2) donc on a soit  $\Delta_e(1, 2) = 1$  soit  $\Delta_e(2, 3) = 1$  (voir les 2). Du coup  $\Delta_e(1, 3) \leq \Delta_e(1, 2) + \Delta_e(2, 3)$ .

Or  $d(M_i, M_j) = \sum_e \Delta_e(i, j)$ . On a donc vérifier l'inégalité triangulaire  $d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$  ce qui termine la preuve que le nombre de chirotopes différents entre 2 matroïdes orientés est bien une distance.

L'avantage de cette distance est qu'elle est très facile à programmer. En effet, puisque dans le fichier des bases de chaque matroïde orienté calculé par le programme, chaque ligne correspond à un chirotope, il suffit donc de calculer le nombre de lignes différentes entre chaque fichier. Il faut juste faire attention que les données soient comparables, notamment que l'orientation de la base soit la même pour chaque configuration. Nous avons alors créé un programme qui, à partir des fichiers de bases de tous les matroïdes orientés, retourne une page HTML constituée d'un tableau indiquant les différences entre 2 modèles.

Cette distance que nous venons de définir n'est qu'une distance globale. La prochaine étape serait d'obtenir une caractérisation géométrique des différences entre les modèles en utilisant la partie 2.3.

## 4.3 Les résultats donnés par le programme

La distance qui vient d'être définie a été utilisée pour comparer les données anthropologiques ainsi que les données orthodontiques. Les modèles anthropologiques ont été triés de 2 façons, par âge puis par sexe tandis que les modèles orthodontiques ont été triés par les classes orthodontiques. Les distances entre chaque paire d'individus ainsi que des moyennes sur les types d'individus ont été calculées. Les résultats sont présentés sous forme de tableaux visibles sur la page <http://www.lirmm.fr/~sol/ResultatsM2/ResultatsM2.htm>.

### 4.3.1 Les données anthropologiques

	Humains (182)	Bonobos (58)	Chimpanzes (50)
HUM (182)	5.52 %	9.11 %	10.4 %
BONO (58)	9.11 %	6.63 %	7.57 %
CHIMP (50)	10.4 %	7.57 %	6.09 %

FIGURE 4.3 – Moyenne des différences entre les espèces

Le tableau de la figure 4.3 est un extrait de la page contenant les résultats anthropologiques. Il représente les moyennes des différences entre les individus des espèces. Ainsi on remarque que les moyennes les plus faibles sont entre les individus d'une même espèce et les moyennes les plus fortes sont entre les humains et les singes. Ce premier résultat semble être prometteur puisqu'il montre que cette méthode qui consiste à compter nombre de changement entre les chirotopes de 2 individus permettrait de différencier les espèces de manière automatisée.

Le tableau de la figure 4.4 indique également que les enfants humains et les jeunes chimpanzés sont assez proches et que les différences sont plus marquées au fur et à mesure que l'âge augmente. Ce résultat était déjà connu des anthropologues. Par contre on ne retrouve pas ce résultat entre les humains et les bonobos. Par manque de temps je n'ai malheureusement pas pu étudier en profondeur le tableau de comparaison entre 2 individus. Il faudrait l'étudier d'avantage pour essayer de comprendre pourquoi nous n'avons pas ce résultat.

		Humains			Bonobos			Chimpanzes		
		Enfants (68)	Adolescents (59)	Adultes (55)	NJ (3)	Jeunes (29)	Adultes (26)	NJ (2)	Jeunes (25)	Adultes (23)
HUM	ENF (68)	5.65 %	5.65 %	5.62 %	9.96 %	8.6 %	8.67 %	7.8 %	9.28 %	11 %
	ADO (59)	5.65 %	5.28 %	5.35 %	11 %	9.55 %	9.25 %	8.5 %	10.1 %	11.7 %
	ADU (55)	5.62 %	5.35 %	5.4 %	10.6 %	9.23 %	9.03 %	8.27 %	9.75 %	11.4 %
BONO	NJ (3)	9.96 %	11 %	10.6 %	6.48 %	5.95 %	8.23 %	7.96 %	7.65 %	8.85 %
	J (29)	8.6 %	9.55 %	9.23 %	5.95 %	5.18 %	7.18 %	7.38 %	6.88 %	8.55 %
	A (26)	8.67 %	9.25 %	9.03 %	8.23 %	7.18 %	7 %	7.22 %	7.05 %	7.74 %
CHIMP	NJ (2)	7.8 %	8.5 %	8.27 %	7.96 %	7.38 %	7.22 %	6.43 %	6.42 %	7.43 %
	J (25)	9.28 %	10.1 %	9.75 %	7.65 %	6.88 %	7.05 %	6.42 %	5.94 %	6.27 %
	A (23)	11 %	11.7 %	11.4 %	8.85 %	8.55 %	7.74 %	7.43 %	6.27 %	5.54 %

FIGURE 4.4 – Moyenne des différences entre les espèces classées par âge

Si l'on étudie de la même manière le tableau des comparaisons des modèles triés par sexe, on observe que les individus de sexe féminin sont moins éloignées des autres espèces que les individus de sexe masculin. Ce résultat a un sens puisqu'il est connu que les mâles ont un plus grand développement des caractères propres à leur espèce. Par contre ce résultat n'apparaît pas entre les bonobos et les chimpanzés ni au sein de ces 2 espèces. Ces 2 espèces sont peut-être trop proches pour que les différences entre les sexes se ressentent.

### 4.3.2 Les données cliniques

Les comparaisons des données orthodontiques nous indiquent que la classe II est bien différenciée des autres classes par la méthode que nous utilisons. La convexité faciale est donc repérée par la méthode mais cette dernière ne différencie pas les classes I et III. Ceci est certainement dû au fait que les individus dit normaux (donc appartenant à la classe I) doivent avoir une légère concavité faciale. Du point de vue structurelle il n'y aurait donc pas de différence au niveau structurel entre les points de la face des individus de la classe I et ceux des individus de la classe III.

En étudiant le tableau 4.6, il apparaît que les individus ayant une hyperdivergence se démarquent très légèrement des autres individus par un

	Classe_I (125)	Classe_II (93)	Classe_III (87)
I (125)	5.68 %	8.96 %	5.13 %
II (93)	8.96 %	7.03 %	9.38 %
III (87)	5.13 %	9.38 %	4.4 %

FIGURE 4.5 – Moyenne des différences entre les classes orthodontiques

		Classe_I			Classe_II			Classe_III		
		Norm (69)	Hypo (35)	Hyper (21)	Norm (46)	Hypo (8)	Hyper (39)	Norm (36)	Hypo (41)	Hyper (10)
I	Norm (69)	5.86 %	5.44 %	6 %	8.45 %	8.7 %	9.4 %	5.22 %	5.14 %	5.78 %
	Hypo (35)	5.44 %	4.99 %	5.8 %	8.52 %	8.91 %	9.56 %	4.76 %	4.56 %	5.4 %
	Hyper (21)	6 %	5.8 %	5.96 %	8.89 %	8.89 %	9.64 %	5.27 %	5.5 %	5.71 %
II	Norm (46)	8.45 %	8.52 %	8.89 %	6.91 %	6.87 %	7.14 %	8.97 %	8.76 %	9.19 %
	Hypo (8)	8.7 %	8.91 %	8.89 %	6.87 %	7.43 %	7.26 %	9.1 %	9.01 %	9.21 %
	Hyper (39)	9.4 %	9.56 %	9.64 %	7.14 %	7.26 %	6.92 %	10 %	9.99 %	10.2 %
III	Norm (36)	5.22 %	4.76 %	5.27 %	8.97 %	9.1 %	10 %	4.31 %	4.3 %	4.92 %
	Hypo (41)	5.14 %	4.56 %	5.5 %	8.76 %	9.01 %	9.99 %	4.3 %	4.08 %	5 %
	Hyper (10)	5.78 %	5.4 %	5.71 %	9.19 %	9.21 %	10.2 %	4.92 %	5 %	5.65 %

FIGURE 4.6 – Moyenne des différences entre les sous-classes

nombre de différences plus important. Si cette divergence n'a lieu qu'à cause d'un écartement des points de la face, rien ne devrait permettre de différencier les individus hyperdivergents. Comme vous le remarquerez peut-être en regardant les fichiers de visualisation des données orthodontiques, de nombreux individus souffrent de lourdes déformations crâniennes. Ces déformations expliqueraient peut-être cette différenciation des individus hyperdivergents, pour le vérifier il faudrait étudier le tableau de comparaison entre 2

individus.

Les premiers résultats de l'utilisation de cette méthode semblent être prometteurs mais il faudrait pousser plus loin l'étude des différents tableaux de comparaison entre 2 individus pour confirmer cette première impression. Une étude statistique plus importante avec utilisation d'histogrammes nous en apprendrait certainement plus. De plus, il n'est pas exclu qu'il faille adapter les repères pour que la méthode soit plus efficace (comme par exemple rajouter des points sur la face pour l'étude orthodontique).

Un des grands défis serait de mettre au point une méthode de classification automatisée des données pour tenter de retrouver les mêmes classes que celles déjà définies (espèce, classe d'âge et/ou sexe pour les données anthropologiques ; classes orthodontiques et/ou divergence pour les données cliniques).

# Chapitre 5

## Bilan et perspectives

### 5.1 Bilan et contributions du stage

Lors de ce stage je me suis familiarisé avec la théorie des matroïdes orientés pour que nous puissions extraire et synthétiser les résultats les plus appropriés à notre application. Nous avons programmé des algorithmes de calcul des chirotopes, des cocircuits ainsi que les circuits tout en tenant compte de la complexité et de l'exactitude des calculs. Pour pouvoir comparer les formes de structures anatomiques nous avons défini une distance entre matroïdes orientés que nous avons programmé. Il a également fallu programmer la visualisation des données et des résultats sous forme de tableaux sur des pages html. Une fois les programmes opérationnels, nous les avons appliqué à l'étude de données anthropologiques et cliniques en collaboration avec des cliniciens et des anthropologues.

Enfin ceci nous a permis de définir de nouvelles perspectives.

### 5.2 Perspectives

Les premiers résultats semblent indiquer que la méthode que nous utilisons permet de différencier de façon combinatoire des formes de structures anatomiques 3D. Dans le but d'améliorer cette différenciation, il faudrait réaliser les perspectives suivantes :

- Définir de nouvelles distances entre matroïdes orientés (voir partie 4.2) qui tiennent compte de certaines configurations locales particulières.
- Détecter certaines configurations géométriques en fonction de leurs représentations par matroïdes orientés
- Optimiser les calculs de déterminant, de rang, et le calcul des circuits (voir parties 3.1.1 et 3.1.3) en utilisant d'autres algorithmes que Gauss.

- 
- Gérer les incertitudes des données dans le programme calculant les matroïdes orientés (voir partie 3.2) en introduisant par exemple le calcul par intervalles
  - Adapter la liste des repères à notre méthode (voir partie 4.3)
  - Mener une étude statistique plus poussée des données 3D avec notamment l'utilisation des histogrammes des distances inter-individus (voir partie 4.3)
  - Classifier les individus en fonction des distances et détecter des individus "anormaux".

## Références

- [ARS04] Dean C. Adams, F. James Rohlf, and Dennis E. Slice. Geometric morphometrics : Ten years of progress following the "revolution". *Ital. J. Zool.*, 71 :5–16, 2004.
- [BT07] José Braga and Jacques Treil. Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes. *International Journal of Legal Medicine*, 121(6) :439–443, November 2007.
- [BVS<sup>+</sup>99] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented matroids*. Cambridge University Press, 2nd ed. edition, 1999. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 46, Cambridge, UK.
- [DDH83] Andreas Dress, Andre Dreiding, and Hans Haegi. *Classification of Mobile Molecules by Category Theory*, volume 23, pages 39–58. 1983.
- [Lay04] David C. Lay. *Algèbre linéaire : Théorie, exercices & applications*. 2004.
- [OJ98] PAUL O’HIGGINS and NICHOLAS JONES. Facial growth in cercocebus torquatus : an application of three-dimensional geometric morphometric techniques to the study of morphological variation. *Journal of Anatomy*, 193(Pt 2) :251–272, August 1998. PMC1467845.
- [PR03] Julian Pfeifle and Jorg Rambau. *Computing Triangulations Using Oriented Matroids*, pages 49–76. 2003.
- [RZ97] Jürgen Richter-Gebert and Günter M. Ziegler. *ORIENTED MATROIDS*. 1997.
- [SGSS05] Ernesto Staffetti, Antoni Grau, Francesc Serratosà, and Alberto Sanfeliu. Object and image indexing based on region connection calculus and oriented matroid theory. *Discrete Appl. Math.*, 147(2-3) :345–361, 2005.

- [TBC<sup>+</sup>01] J. Treil, P. Borianne, J. Casteigt, J. Faure, and A.J. Horn. The human face as a 3-dimensional model : The future in orthodontics. *World Journal of Orthodontics*, pages 253–257, 2001.