

Une approche combinatoire novatrice fondée sur les matroïdes orientés pour la caractérisation de la morphologie 3D des structures anatomiques

Kevin Sol

Encadrants : Emeric Gioan et Gérard Subsol

5 décembre 2013



Plan

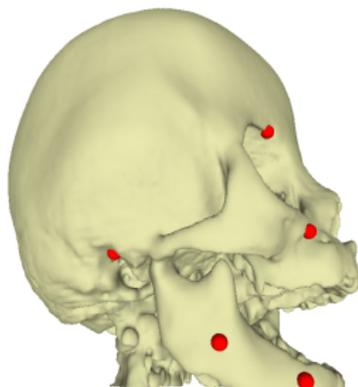
- ① Contexte
- ② Codage de formes par matroïdes orientés
- ③ Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- ④ Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes
- ⑤ Application à des déformations cranio-faciales
- ⑥ Conclusion

Plan

- 1 Contexte
- 2 Codage de formes par matroïdes orientés
- 3 Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- 4 Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes
- 5 Application à des déformations cranio-faciales
- 6 Conclusion

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite **analyser** des formes 3D, les **classer** et **caractériser** ces classes.

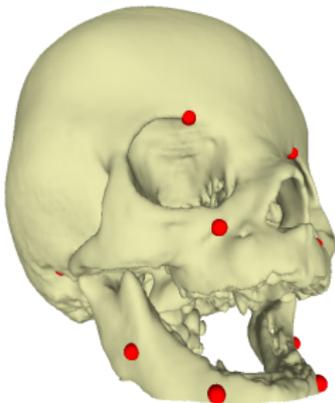


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

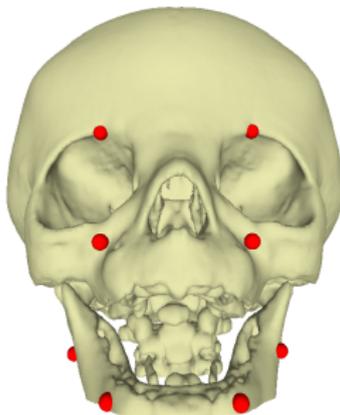


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

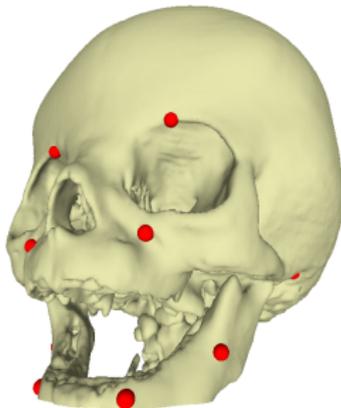


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

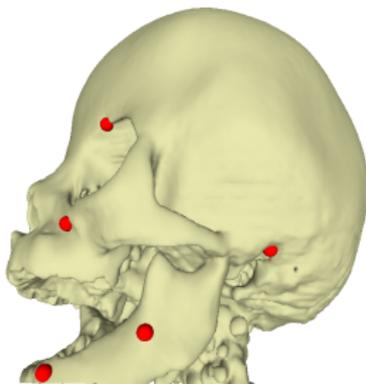


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

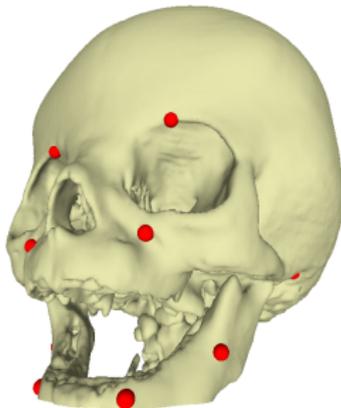


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

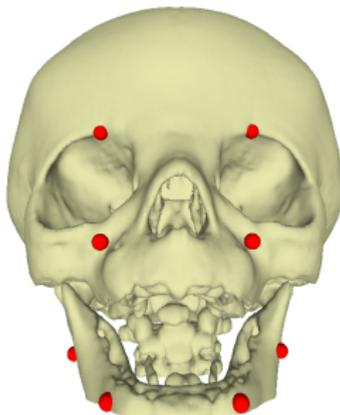


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

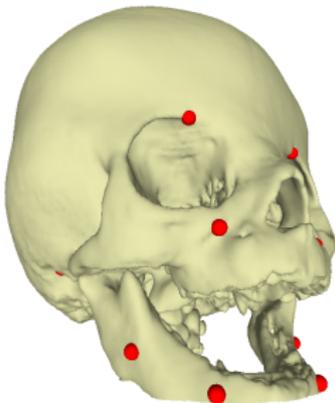


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Etude de la forme 3D de structures anatomiques

A partir des points de repère (*landmarks*)^{1 2} on souhaite analyser des formes 3D, les classer et caractériser ces classes.

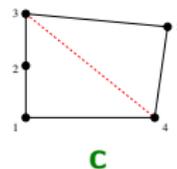
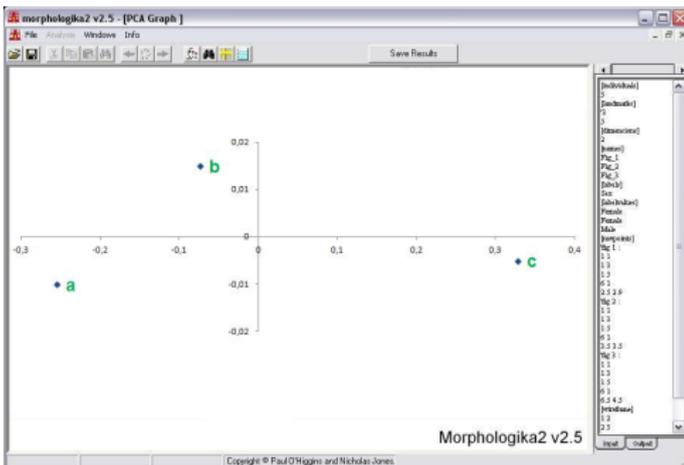
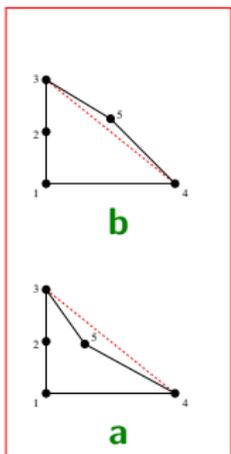


¹F. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*. 1997

²D.C. Adams et al. *Geometric morphometrics: ten years of progress following the "revolution"*. 2004

Méthodes par superposition⁴

② Analyse en Composantes Principales



⁴P. Mitteroecker et P. Gunz. *Advances in geometric morphometrics*. 2009

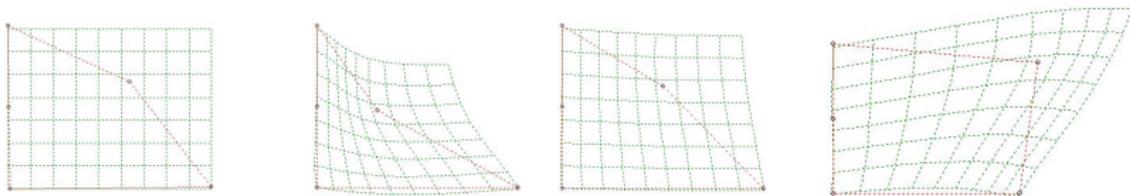
Méthodes par déformation⁵

- ① Alignement et normalisation géométrique
- ② Calcul d'un échantillon moyen
- ③ Etude des déformations par rapport à l'échantillon moyen

⁵F. Bookstein. *Principal warps : Thin-plate splines and the decomposition of deformations*. 1989

Méthodes par déformation⁵

- 1 Alignement et normalisation géométrique
- 2 Calcul d'un échantillon moyen
- 3 Etude des déformations par rapport à l'échantillon moyen



Echantillon
moyen

a

b

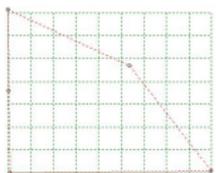
c



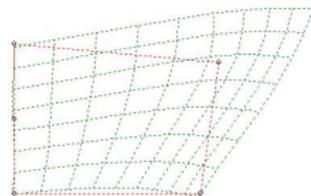
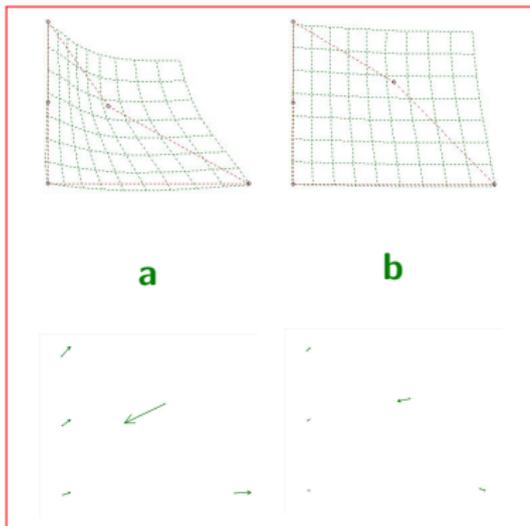
⁵F. Bookstein. *Principal warps : Thin-plate splines and the decomposition of deformations*. 1989

Méthodes par déformation⁵

- 1 Alignement et normalisation géométrique
- 2 Calcul d'un échantillon moyen
- 3 Etude des déformations par rapport à l'échantillon moyen



Echantillon
moyen



⁵F. Bookstein. *Principal warps : Thin-plate splines and the decomposition of deformations*. 1989

Méthode Euclidean Distance Matrix Analysis⁶

- ① Pour chaque échantillon e , calcul de la matrice $FM(e)$ des distances inter-landmarks

⁶S. Lele and J.T. Richtsmeier. *Euclidean distance matrix analysis : a coordinate-free approach for comparing biological shapes using landmark data*. 1991

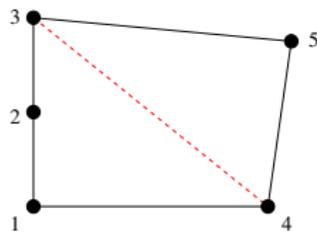
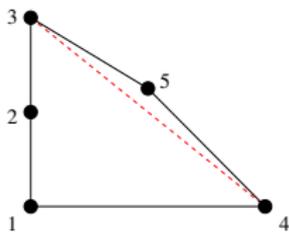
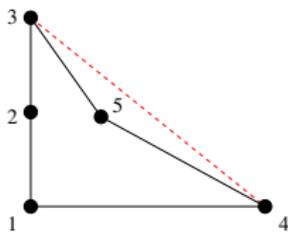
Méthode Euclidean Distance Matrix Analysis⁶

- 1 Pour chaque échantillon e , calcul de la matrice $FM(e)$ des distances inter-landmarks
- 2 Pour toute paire (e, f) d'échantillons, calcul de $t(e, f)$: rapport max entre $FM(e)$ et $FM(f)$

⁶S. Lele and J.T. Richtsmeier. *Euclidean distance matrix analysis : a coordinate-free approach for comparing biological shapes using landmark data*. 1991

Méthode Euclidean Distance Matrix Analysis⁶

- 1 Pour chaque échantillon e , calcul de la matrice $FM(e)$ des distances inter-landmarks
- 2 Pour toute paire (e, f) d'échantillons, calcul de $t(e, f)$: rapport max entre $FM(e)$ et $FM(f)$

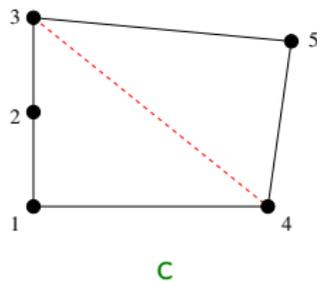
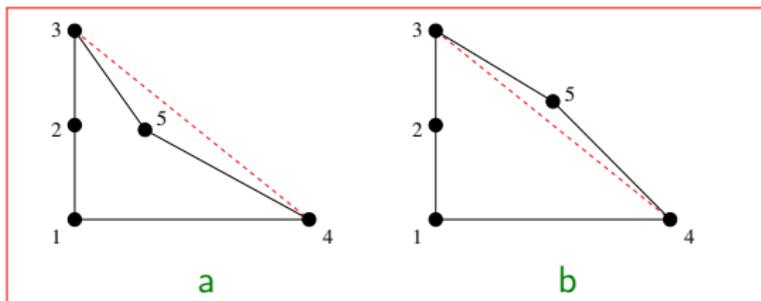


$$t(a, b) = 1,91, \quad t(a, c) = 4,27 \text{ et } t(b, c) = 2,24$$

⁶S. Lele and J.T. Richtsmeier. *Euclidean distance matrix analysis : a coordinate-free approach for comparing biological shapes using landmark data*. 1991

Méthode Euclidean Distance Matrix Analysis⁶

- 1 Pour chaque échantillon e , calcul de la matrice $FM(e)$ des distances inter-landmarks
- 2 Pour toute paire (e, f) d'échantillons, calcul de $t(e, f)$: rapport max entre $FM(e)$ et $FM(f)$



$$t(a, b) = 1,91, t(a, c) = 4,27 \text{ et } t(b, c) = 2,24$$

⁶S. Lele and J.T. Richtsmeier. *Euclidean distance matrix analysis : a coordinate-free approach for comparing biological shapes using landmark data*. 1991

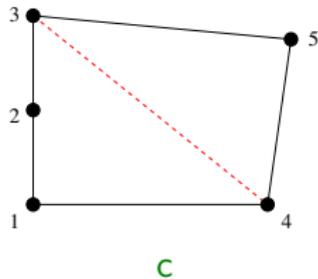
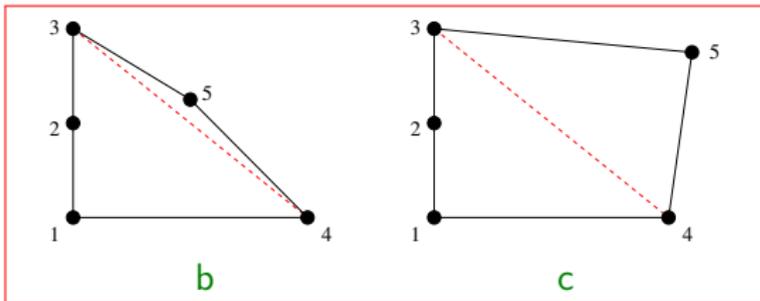
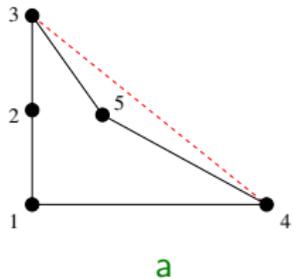
Bilan

Superposition	<ul style="list-style-type: none"> ● alignement et normalisation
Déformation	<ul style="list-style-type: none"> ● alignement et normalisation ● interprétation des paramètres
Euclidean Distance Matrix Analysis	<ul style="list-style-type: none"> ● caractérisation des différences

Bilan

On voudrait :

- s'affranchir de l'alignement et de la normalisation géométrique.
- mettre en valeur les différences "structurelles" (et non plus "métriques") et les caractériser



Plan

- 1 Contexte
- 2 Codage de formes par matroïdes orientés
- 3 Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- 4 Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes
- 5 Application à des déformations cranio-faciales
- 6 Conclusion

La théorie des matroïdes orientés

Abstraction combinatoire de l'algèbre linéaire

- Modélise les **positions relatives** de points dans l'espace **sans tenir compte des distances** (convexité, incidence. . .)



La théorie des matroïdes orientés

Abstraction combinatoire de l'algèbre linéaire

- Modélise les **positions relatives** de points dans l'espace **sans tenir compte des distances** (convexité, incidence. . .)
- Théorie riche (sous-section AMS 52C40 depuis 2000) ⁷ ⁸

⁷A. Björner et al. *Oriented Matroids*. 1993

⁸J. Richter-Gebert et G.M. Ziegler. *Oriented matroids*. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 1997

La théorie des matroïdes orientés

Abstraction combinatoire de l'algèbre linéaire

- Modélise les **positions relatives** de points dans l'espace **sans tenir compte des distances** (convexité, incidence. . .)
- Théorie riche (sous-section AMS 52C40 depuis 2000) ^{7 8}
- Appliqué à de nombreux domaines théoriques (graphes, programmation linéaire, arrangements de pseudo-droites. . .)
- Mais peu d'applications en dehors des mathématiques⁹

⁷A. Björner et al. *Oriented Matroids*. 1993

⁸J. Richter-Gebert et G.M. Ziegler. *Oriented matroids*. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 1997

⁹A. Dress et al. *Classification of mobile molecules by category theory*. 1983

Chirotope

Définition

Le *chirotope* χ d'un ensemble de n points en dimension d est l'application qui à chaque $(d+1)$ -uplet de points (P_1, \dots, P_{d+1}) associe un signe appartenant à $\{-, 0, +\}$:

$$\chi(P_1, \dots, P_{d+1}) = \operatorname{sgn} \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ P_{1,1} & P_{2,1} & \dots & P_{d+1,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & \dots & P_{d+1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1,d} & P_{2,d} & \dots & P_{d+1,d} \end{pmatrix} \right)$$

Chirotope

Définition

Le *chirotope* χ d'un ensemble de n points en dimension d est l'application qui à chaque $(d+1)$ -uplet de points (P_1, \dots, P_{d+1}) associe un signe appartenant à $\{-, 0, +\}$:

$$\chi(P_1, \dots, P_{d+1}) = \operatorname{sgn} \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ P_{1,1} & P_{2,1} & \dots & P_{d+1,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & \dots & P_{d+1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1,d} & P_{2,d} & \dots & P_{d+1,d} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{orientation de } (P_1, \dots, P_{d+1})$$

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

Définition

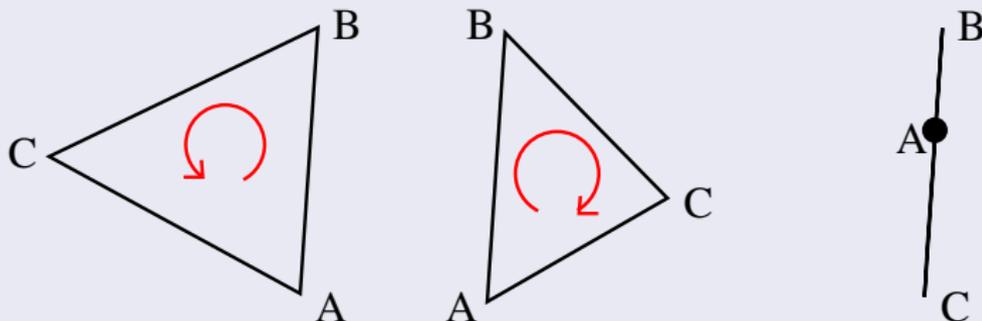
Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

Définition

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Triplet (A, B, C) :

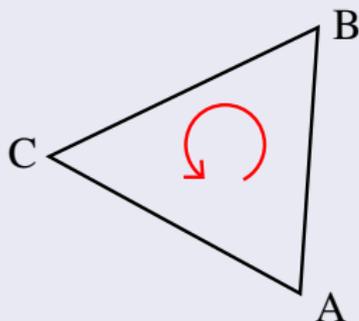


Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

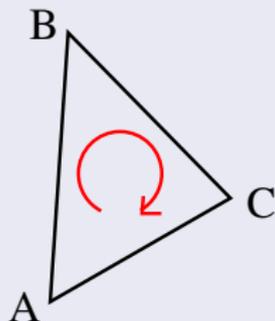
Définition

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Triplet (A, B, C) :



+



-



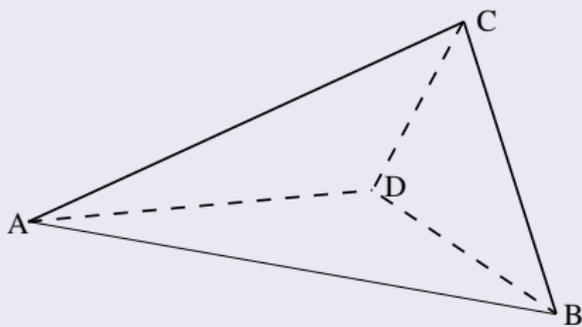
0

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

Définition

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :

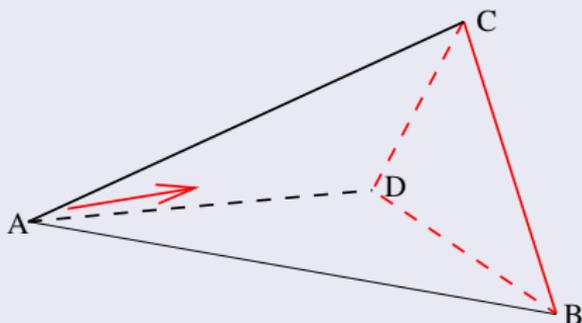


Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

Définition

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :

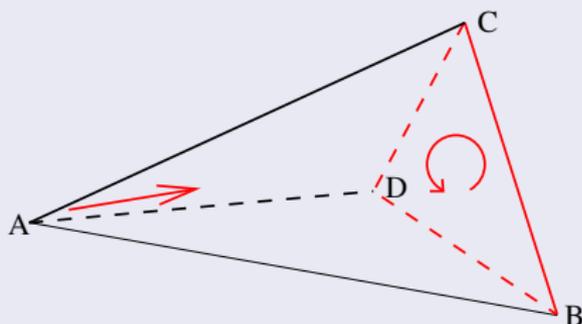


Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

Définition

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :

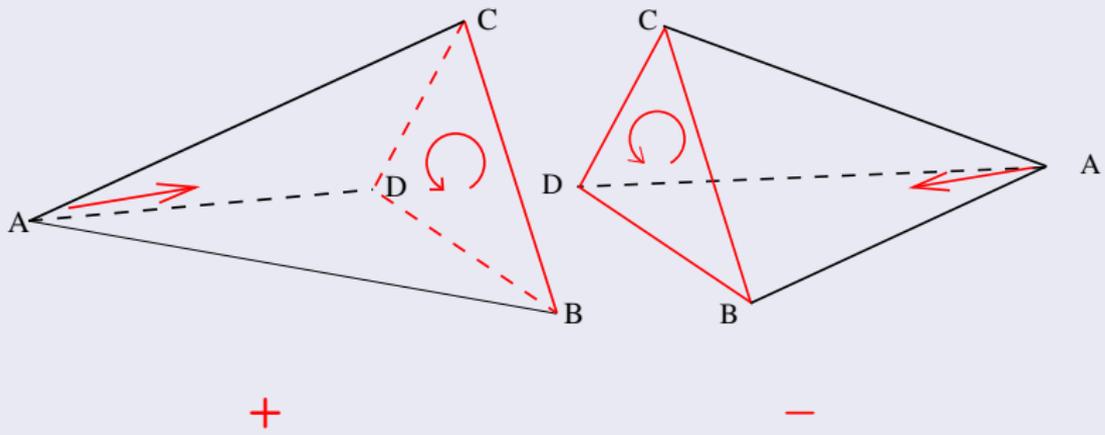


Orientation du triplet (B, C, D)

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet

Définition

Orientation d'un $(d+1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:
 Quadruplet (A, B, C, D) :



Spécificité de notre codage

Notre codage : le chirotope associé à l'ensemble des landmarks

Spécificité de notre codage

Notre codage : le chirotope associé à l'ensemble des landmarks

Avantages

- Combinatoire (écriture en machine)
- Pas besoin de l'étape d'alignement et de normalisation
- Invariant aux transformations linéaires sur les landmarks

Spécificité de notre codage

Notre codage : le chirotope associé à l'ensemble des landmarks

Avantages

- Combinatoire (écriture en machine)
- Pas besoin de l'étape d'alignement et de normalisation
- Invariant aux transformations linéaires sur les landmarks

Inconvénient

- Temps de calcul : $O(n^4)$ par chirotope

Uplets fixes

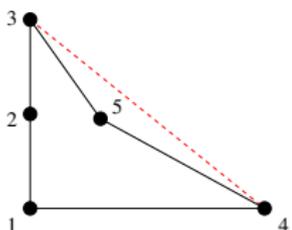
Soit \mathcal{M} un ensemble de chirotopes et b un $(d+1)$ -uplet.

Définition

On dit que b est *fixe* pour \mathcal{M} si le signe de b est le même pour tout chirotope de \mathcal{M} .

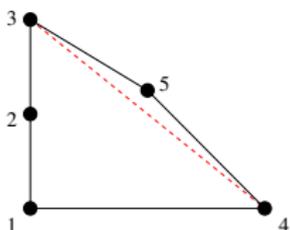
(sinon on dit que b est *non-fixe*)

Retour sur l'exemple en 2D



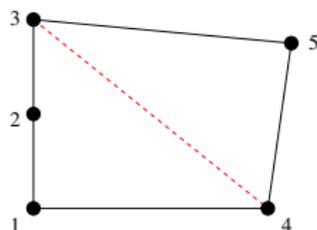
a

1 2 3	0
1 2 4	-
1 2 5	-
1 3 4	-
1 3 5	-
1 4 5	+
2 3 4	-
2 3 5	-
2 4 5	+
3 4 5	-



b

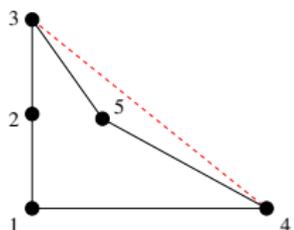
1 2 3	0
1 2 4	-
1 2 5	-
1 3 4	-
1 3 5	-
1 4 5	+
2 3 4	-
2 3 5	-
2 4 5	+
3 4 5	+



c

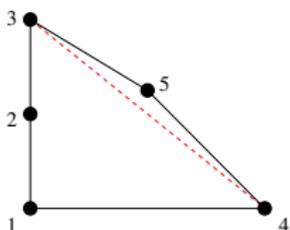
1 2 3	0
1 2 4	-
1 2 5	-
1 3 4	-
1 3 5	-
1 4 5	+
2 3 4	-
2 3 5	-
2 4 5	+
3 4 5	+

Retour sur l'exemple en 2D



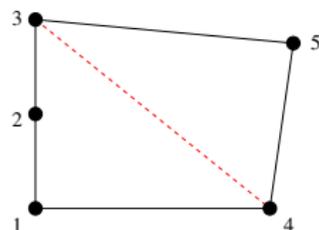
a

1 2 3	0
1 2 4	-
1 2 5	-
1 3 4	-
1 3 5	-
1 4 5	+
2 3 4	-
2 3 5	-
2 4 5	+
3 4 5	-



b

1 2 3	0
1 2 4	-
1 2 5	-
1 3 4	-
1 3 5	-
1 4 5	+
2 3 4	-
2 3 5	-
2 4 5	+
3 4 5	+



c

1 2 3	0
1 2 4	-
1 2 5	-
1 3 4	-
1 3 5	-
1 4 5	+
2 3 4	-
2 3 5	-
2 4 5	+
3 4 5	+

Uplet fixe

Uplet non-fixe

Plan

- ① Contexte
- ② Codage de formes par matroïdes orientés
- ③ Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- ④ Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes
- ⑤ Application à des déformations cranio-faciales
- ⑥ Conclusion

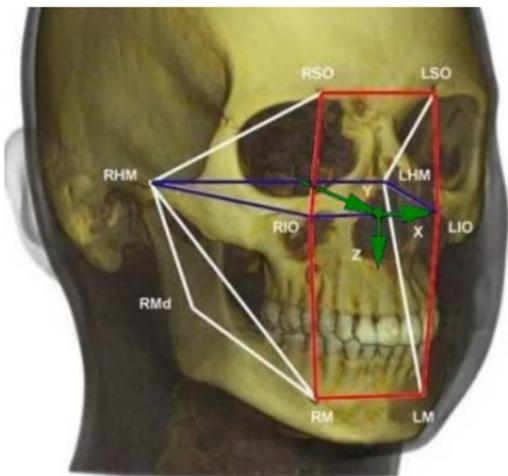
Problématique

Dans toutes nos expérimentations :
entre 70% et 80% de $(d+1)$ -uplets fixes.

Problématique

Dans toutes nos expérimentations :
entre 70% et 80% de $(d+1)$ -uplets fixes.

Etant donnée une structure anatomique, on peut définir des relations d'ordres implicites entre les coordonnées des landmarks ;

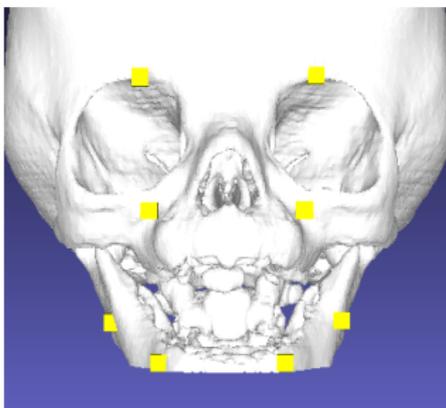


Repère intrinsèque

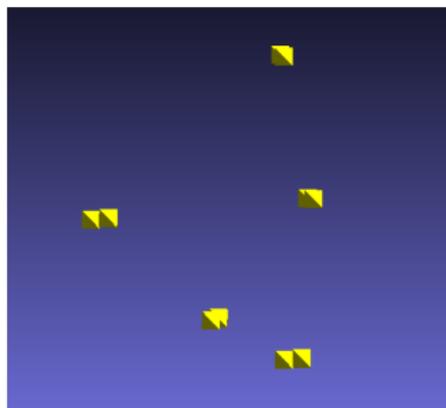
Problématique

Dans toutes nos expérimentations :
entre 70% et 80% de $(d+1)$ -uplets fixes.

Etant donnée une structure anatomique, on peut définir des relations d'ordres implicites entre les coordonnées des landmarks ;
Oreille D $<_x$ Œil D $<_x$ Œil G $<_x$ Oreille G



Vue de face

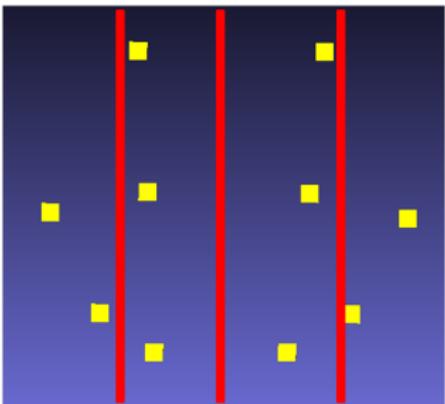


Vue de la droite

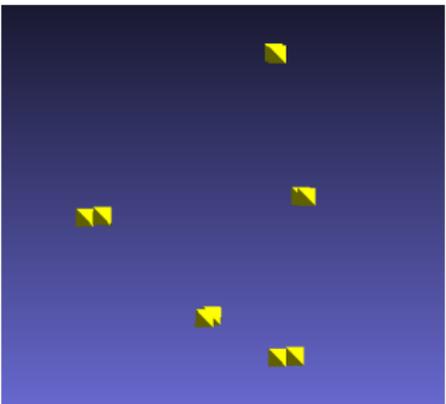
Problématique

Dans toutes nos expérimentations :
 entre 70% et 80% de $(d+1)$ -uplets fixes.

Etant donnée une structure anatomique, on peut définir des relations d'ordres implicites entre les coordonnées des landmarks ;
 Oreille D $<_x$ Œil D $<_x$ Œil G $<_x$ Oreille G



Vue de face

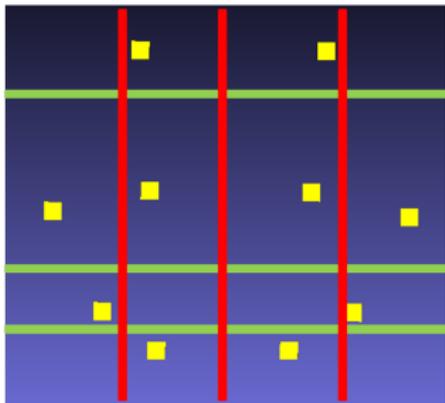


Vue de droite

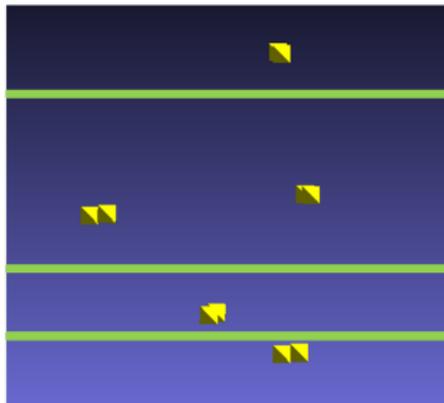
Problématique

Dans toutes nos expérimentations :
 entre 70% et 80% de $(d+1)$ -uplets fixes.

Etant donnée une structure anatomique, on peut définir des relations d'ordres implicites entre les coordonnées des landmarks ;



Vue de face

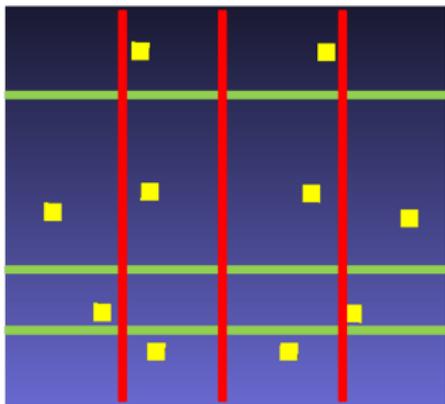


Vue de droite

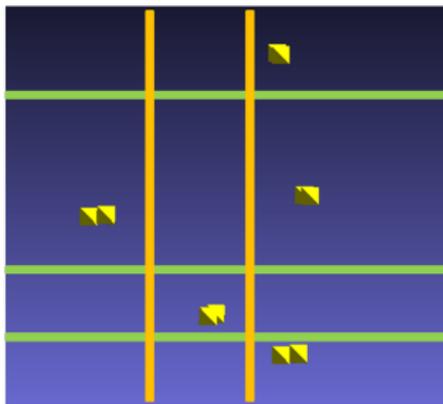
Problématique

Dans toutes nos expérimentations :
entre 70% et 80% de $(d+1)$ -uplets fixes.

Etant donnée une structure anatomique, on peut définir des relations d'ordres implicites entre les coordonnées des landmarks ;



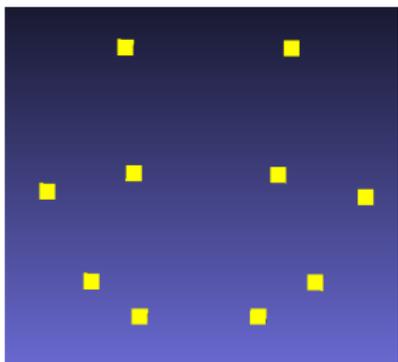
Vue de face



Vue de droite

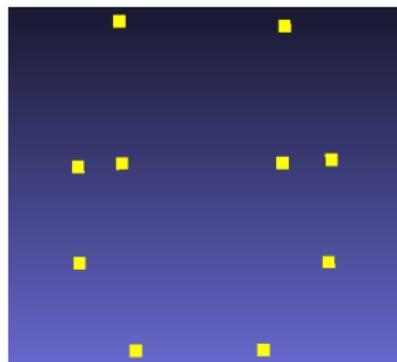
Problématique

La position des landmarks change en fonction de la variabilité morphologique...



Crâne 1

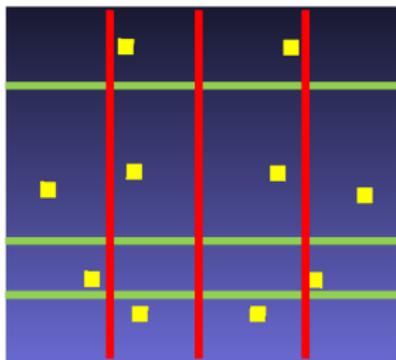
...



Crâne k

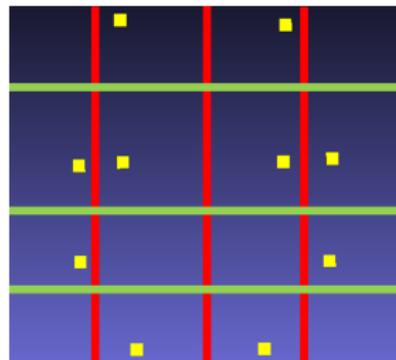
Problématique

La position des landmarks change en fonction de la variabilité morphologique...



Crâne 1

...

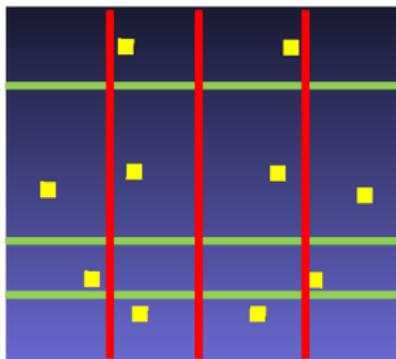


Crâne k

mais les coordonnées respectent toujours ces ordres.

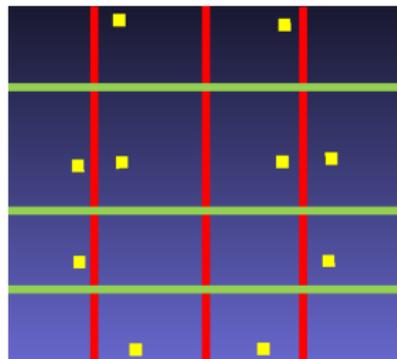
Problématique

La position des landmarks change en fonction de la variabilité morphologique...



Crâne 1

...



Crâne k

mais les coordonnées respectent toujours ces ordres.

Question

Est-ce que les relations d'ordres impliquent que des uplets soient fixes ?

Formalisme

Notations

- M : une matrice formelle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{d+1,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{d+1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,d} & x_{2,d} & \dots & x_{d+1,d} \end{pmatrix}$$

où $x_{j,i}$ est une variable formelle

Formalisme

Notations

- M : une matrice formelle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{d+1,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{d+1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,d} & x_{2,d} & \dots & x_{d+1,d} \end{pmatrix}$$

où $x_{j,i}$ est une variable formelle

- \mathcal{P} : un $(d+1)$ -uplet de points dans un espace de dimension d

Configuration d'ordres

Définition

On appelle *configuration de d ordres sur \mathcal{E}* , un ensemble \mathcal{C} de d ordres sur un ensemble \mathcal{E} de taille $d+1$.

Exemple : une configuration \mathcal{C} de 3 ordres sur $\{A, B, C, D\}$

$$\begin{array}{c}
 A <_x B <_x C <_x D \\
 B <_y D <_y C \quad \text{et} \quad B <_y A <_y C \\
 D <_z A
 \end{array}$$

\mathcal{P} satisfait \mathcal{C}

Définition

Un ensemble de points \mathcal{P} satisfait \mathcal{C} si

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall e, f \in \mathcal{E}, \quad e <_i f \implies x_{e,i} < x_{f,i}$$

\mathcal{P} satisfait \mathcal{C}

Définition

Un ensemble de points \mathcal{P} satisfait \mathcal{C} si

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall e, f \in \mathcal{E}, \quad e <_i f \implies x_{e,i} < x_{f,i}$$

Exemple : une configuration \mathcal{C} de 2 ordres sur $\{A, B, C\}$

$$\begin{array}{l} A <_x B <_x C \\ B <_y C \quad \text{et} \quad B <_y A \end{array}$$

\mathcal{P} satisfait \mathcal{C}

Définition

Un ensemble de points \mathcal{P} satisfait \mathcal{C} si

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall e, f \in \mathcal{E}, \quad e <_i f \implies x_{e,i} < x_{f,i}$$

Exemple : une configuration \mathcal{C} de 2 ordres sur $\{A, B, C\}$

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C \quad \text{et} \quad B <_y A \end{aligned}$$

$\mathcal{P} = \{P_1(0, 4); P_2(2, 2); P_3(3, 5)\}$ satisfait \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} x(P_1) < x(P_2) < x(P_3) \\ y(P_2) < y(P_3) \quad \text{et} \quad y(P_2) < y(P_1) \end{aligned}$$

Configuration fixe

Définition

\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Configuration fixe

Définition

\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$

Configuration fixe

Définition

\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$

$$x_A = x_B$$



Configuration fixe

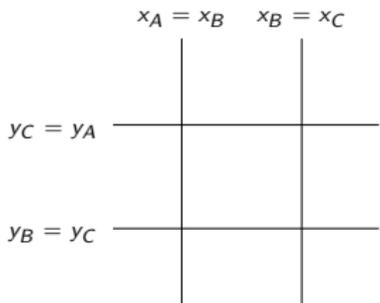
Définition

\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$



Configuration fixe

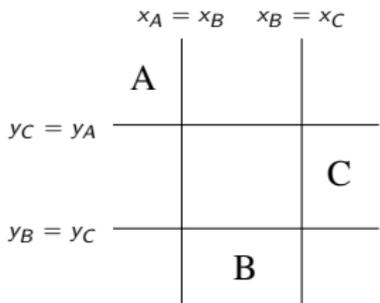
Définition

\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$



Configuration fixe

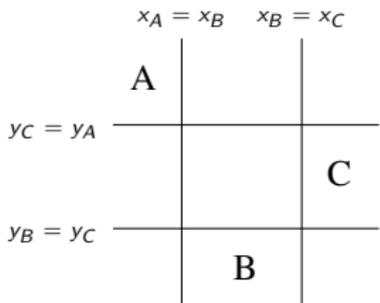
Définition

\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$



Configuration fixe

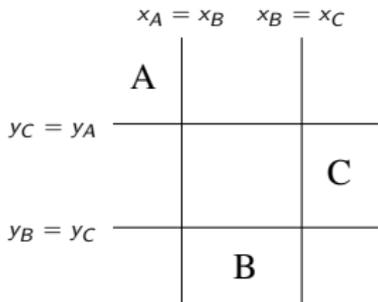
Configuration fixe

Définition

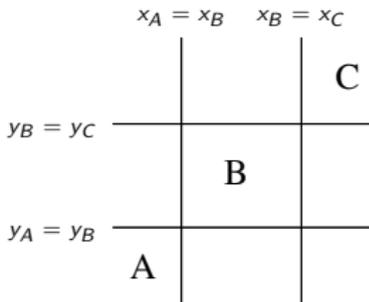
\mathcal{C} est *fixe* si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$



Configuration fixe

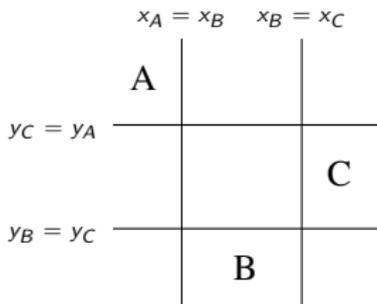
Configuration fixe

Définition

\mathcal{C} est fixe si pour tout \mathcal{P} satisfaisant \mathcal{C} , \mathcal{P} a toujours la même orientation.

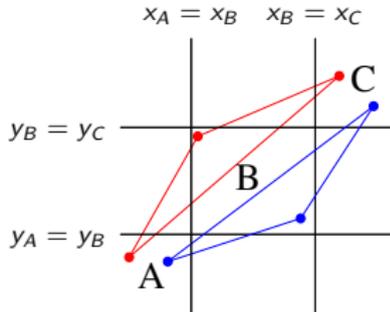
Exemples en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$



Configuration fixe

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y B <_y C \end{aligned}$$



Configuration non-fixe

Extensions linéaires

Définition

Une *extension linéaire* d'une configuration \mathcal{C} est une configuration où chaque ordre de \mathcal{C} est remplacé par une de ses extensions linéaires.

Extensions linéaires

Définition

Une *extension linéaire* d'une configuration \mathcal{C} est une configuration où chaque ordre de \mathcal{C} est remplacé par une de ses extensions linéaires.

Exemple :

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{C} \\
 A <_x B <_x C <_x D \\
 B <_y D <_y C \quad \text{et} \quad B <_y A <_y C \\
 D <_z A
 \end{array}$$

Une extension linéaire de \mathcal{C}

$$\begin{array}{c}
 A <_x B <_x C <_x D \\
 B <_y D <_y A <_y C \\
 D <_z A <_z C <_z B
 \end{array}$$

Extensions linéaires

Définition

Une *extension linéaire* d'une configuration \mathcal{C} est une configuration où chaque ordre de \mathcal{C} est remplacé par une de ses extensions linéaires.

\mathcal{C} est non-fixe $\iff \exists$ une extension linéaire non-fixe de \mathcal{C} .

\mathcal{C} est fixe \iff toutes les extensions linéaires de \mathcal{C} sont fixes.

Extensions linéaires

Définition

Une *extension linéaire* d'une configuration \mathcal{C} est une configuration où chaque ordre de \mathcal{C} est remplacé par une de ses extensions linéaires.

\mathcal{C} est non-fixe $\iff \exists$ une extension linéaire non-fixe de \mathcal{C} .

\mathcal{C} est fixe \iff toutes les extensions linéaires de \mathcal{C} sont fixes.

\implies On se concentre uniquement sur les configurations d'ordres totaux.

Equivalence

Définition

Deux configurations de d ordres sont *équivalentes* si elles sont égales à ré-étiquetage de \mathcal{E} , permutation d'ordres, et inversion(s) d'ordres près.

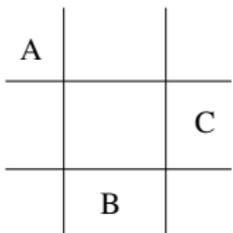
Equivalence

Définition

Deux configurations de d ordres sont *équivalentes* si elles sont égales à ré-étiquetage de \mathcal{E} , permutation d'ordres, et inversion(s) d'ordres près.

Exemple en 2D :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y C <_y A$$



Equivalence

Définition

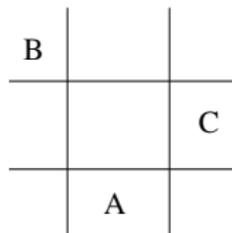
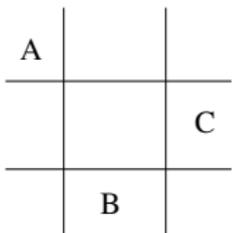
Deux configurations de d ordres sont *équivalentes* si elles sont égales à ré-étiquetage de \mathcal{E} , permutation d'ordres, et inversion(s) d'ordres près.

Exemple en 2D :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ B <_y C <_y A \end{aligned}$$

un ré-étiquetage de
 \mathcal{E}

$$\begin{aligned} B <_x A <_x C \\ A <_y C <_y B \end{aligned}$$



Equivalence

Définition

Deux configurations de d ordres sont *équivalentes* si elles sont égales à ré-étiquetage de \mathcal{E} , permutation d'ordres, et inversion(s) d'ordres près.

Exemple en 2D :

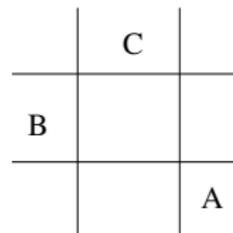
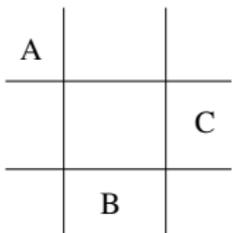
$$A <_x B <_x C$$

$$B <_y C <_y A$$

une permutation
d'ordres

$$B <_x C <_x A$$

$$A <_y B <_y C$$



Equivalence

Définition

Deux configurations de d ordres sont *équivalentes* si elles sont égales à ré-étiquetage de \mathcal{E} , permutation d'ordres, et inversion(s) d'ordres près.

Exemple en 2D :

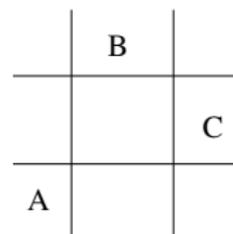
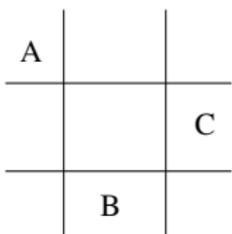
$$A <_x B <_x C$$

$$B <_y C <_y A$$

une inversion
d'ordres

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$



Caractérisation en dimension 2

Théorème : caractérisation en dimension 2

A équivalence près, il y a exactement deux configurations de 2 ordres totaux

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y B <_y C$$

Caractérisation en dimension 2

Théorème : caractérisation en dimension 2

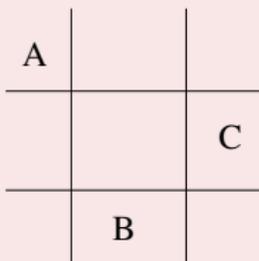
A équivalence près, il y a exactement deux configurations de 2 ordres totaux

$$A <_x B <_x C$$

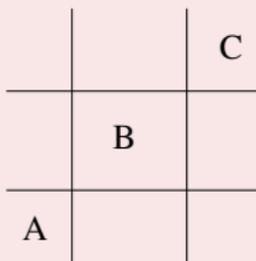
$$A <_y C <_y B$$

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y B <_y C$$



Configuration fixe



Configuration non-fixe

Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$\begin{aligned} A <_x B <_x C \\ A <_y C <_y B \end{aligned}$$

Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}$$

Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \end{aligned}$$



Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \end{aligned}$$

$$\boxed{+} \times \boxed{+} - \boxed{-} \times \boxed{+}$$

Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{+} & \times & \boxed{+} & - & \boxed{-} & \times & \boxed{+} \\ & & \boxed{+} & - & \boxed{-} & & \boxed{+} \\ & & & & & = & \boxed{+} \end{array}$$

Preuve en dimension 2

Preuve du cas fixe :

$$A <_x B <_x C$$

$$A <_y C <_y B$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{+} & \times & \boxed{+} & - & \boxed{-} & \times & \boxed{+} \\ & & \boxed{+} & - & \boxed{-} & & \boxed{+} \\ & & & & & = & \boxed{+} \end{array}$$

\Rightarrow la configuration est fixe



Configurations fixes en dimension 3

Proposition 1

Si, à équivalence près, \mathcal{C} satisfait :

$$B <_x C <_x A$$

$$\textcircled{1} \quad C <_y A <_y B$$

$$A <_z B <_z C$$

et

$$\textcircled{2} \quad \exists X \in \{A, B, C\}$$

tel qu'on ait soit :

- $X < D$ dans tous les ordres

soit :

- $X > D$ dans tous les ordres

alors \mathcal{C} est fixe.

Configurations fixes en dimension 3

Preuve :

On suppose que $X = B$

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_A & x_B & x_C & x_D - x_B \\ y_A & y_B & y_C & y_D - y_B \\ z_A & z_B & z_C & z_D - z_B \end{pmatrix}$$

Proposition 1

Si, à équivalence près, \mathcal{C} satisfait :

$$B <_x C <_x A$$

$$\textcircled{1} \quad C <_y A <_y B$$

$$A <_z B <_z C$$

et

$$\textcircled{2} \quad \exists X \in \{A, B, C\}$$

tel qu'on ait soit :

- $X < D$ dans tous les ordres

soit :

- $X > D$ dans tous les ordres

alors \mathcal{C} est fixe.

Configurations fixes en dimension 3

Preuve :

On suppose que $X = B$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_A & x_B & x_C & x_D - x_B \\ y_A & y_B & y_C & y_D - y_B \\ z_A & z_B & z_C & z_D - z_B \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{pmatrix} \\ &\quad - (y_B - y_D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ z_A & z_B & z_C \end{pmatrix} \\ &\quad + (z_B - z_D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 1

Si, à équivalence près, \mathcal{C} satisfait :

$$B <_x C <_x A$$

$$\textcircled{1} \quad C <_y A <_y B$$

$$A <_z B <_z C$$

et

$$\textcircled{2} \quad \exists X \in \{A, B, C\}$$

tel qu'on ait soit :

- $X < D$ dans tous les ordres

soit :

- $X > D$ dans tous les ordres

alors \mathcal{C} est fixe.

Configurations fixes en dimension 3

Preuve :

On suppose que $X = B$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_A & x_B & x_C & x_D - x_B \\ y_A & y_B & y_C & y_D - y_B \\ z_A & z_B & z_C & z_D - z_B \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{pmatrix} \\ &\quad - (y_B - y_D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ z_A & z_B & z_C \end{pmatrix} \\ &\quad + (z_B - z_D) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (x_B - x_D) \cdot \boxed{+} - (y_B - y_D) \cdot \boxed{-} + (z_B - z_D) \cdot \boxed{+} \end{aligned}$$

Proposition 1

Si, à équivalence près, \mathcal{C} satisfait :

$$B <_x C <_x A$$

$$\textcircled{1} \quad C <_y A <_y B$$

$$A <_z B <_z C$$

et

$$\textcircled{2} \quad \exists X \in \{A, B, C\}$$

tel qu'on ait soit :

- $X < D$ dans tous les ordres

soit :

- $X > D$ dans tous les ordres

alors \mathcal{C} est fixe.

Configuration non-fixe en dimension 3

Proposition 2

Soit \mathcal{C}' une configuration induite par \mathcal{C} sur \mathcal{E}' par rapport à $<_i$.

Soit $P \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$.

Si :

- \mathcal{C}' est non-fixe et
- P est extrême dans l'ordre $<_i$ de \mathcal{C} ,

alors \mathcal{C} est non-fixe.

Configuration non-fixe en dimension 3

Proposition 2

Soit \mathcal{C}' une configuration induite par \mathcal{C} sur \mathcal{E}' par rapport à $<_i$.

Soit $P \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$.

Si :

- \mathcal{C}' est non-fixe et
- P est extrême dans l'ordre $<_i$ de \mathcal{C} ,

alors \mathcal{C} est non-fixe.

Exemple :

$C <_x D <_x A <_x B$

$A <_y C <_y B <_y D$

$A <_z B <_z C <_z D$

configuration non-fixe induite
par \mathcal{C}
point extrême

Caractérisation en dimension 3

Proposition 3

Soit \mathcal{C} une configuration. \mathcal{C} respecte les conditions de la Proposition 1 ou \mathcal{C} respecte les conditions de la Proposition 2.

Caractérisation en dimension 3

Proposition 3

Soit \mathcal{C} une configuration. \mathcal{C} respecte les conditions de la Proposition 1 ou \mathcal{C} respecte les conditions de la Proposition 2.

Théorème : caractérisation des configurations fixes

\mathcal{C} est fixe si et seulement si :

- 1 à équivalence près, \mathcal{C} satisfait
 - $B <_x C <_x A$
 - $C <_y A <_y B$ et
 - $A <_z B <_z C$
- 2 $\exists X \in \{A, B, C\}$ tel que on ait soit
 - $X < D$ dans tous les ordres soit
 - $X > D$ dans tous les ordres

Théorème : caractérisation des configurations non-fixes

Soit \mathcal{C}' une configuration induite par \mathcal{C} sur \mathcal{E}' par rapport à $<_i$. Soit $P \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$.

\mathcal{C} est non-fixe si et seulement si :

- \mathcal{C}' est non-fixe et
- P est extrême dans l'ordre $<_i$ de \mathcal{C} ,

alors \mathcal{C} est non-fixe.

Caractérisation en dimension 3

A équivalence près, il y a exactement 4 configurations fixes :

$$\begin{aligned} B <_x C <_x A <_x D \\ C <_y A <_y B <_y D \\ A <_z B <_z C <_z D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B <_x C <_x D <_x A \\ C <_y A <_y B <_y D \\ A <_z B <_z C <_z D \end{aligned}$$

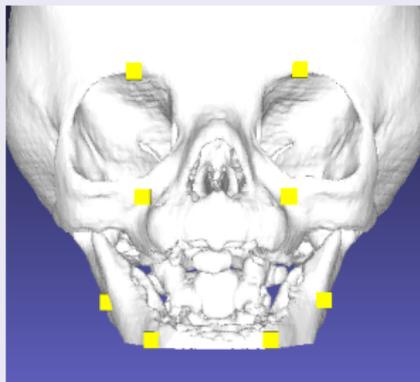
$$\begin{aligned} B <_x D <_x C <_x A \\ C <_y A <_y B <_y D \\ A <_z B <_z C <_z D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B <_x C <_x D <_x A \\ C <_y D <_y A <_y B \\ A <_z B <_z C <_z D \end{aligned}$$

Expérimentation

Données

Crânes utilisés pour l'analyse de la morphologie des classes dentaires¹⁰

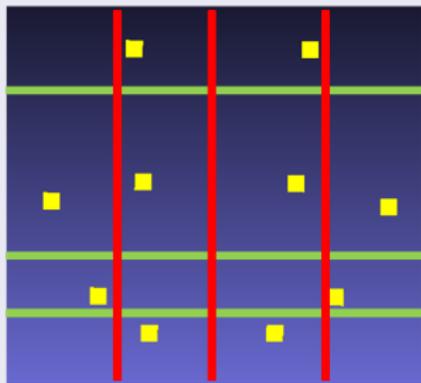


¹⁰J. Braga and J. Treil. *Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes*. 2007

Expérimentation

Données

Crânes utilisés pour l'analyse de la morphologie des classes dentaires¹⁰



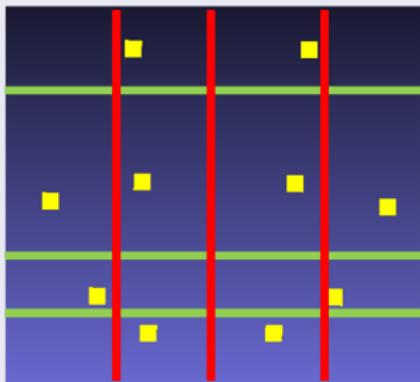
- 10 landmarks 3D

¹⁰J. Braga and J. Treil. *Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes*. 2007

Expérimentation

Données

Crânes utilisés pour l'analyse de la morphologie des classes dentaires¹⁰



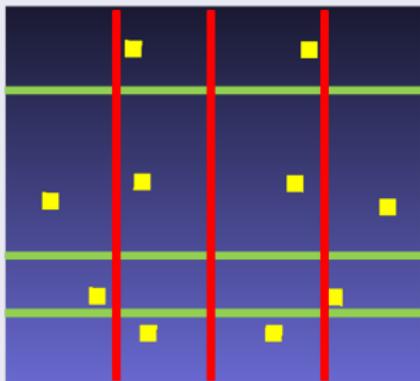
- 10 landmarks 3D
- 210 quadruplets

¹⁰J. Braga and J. Treil. *Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes*. 2007

Expérimentation

Données

Crânes utilisés pour l'analyse de la morphologie des classes dentaires¹⁰



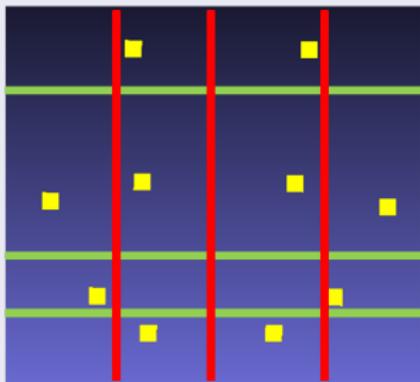
- 10 landmarks 3D
- 210 quadruplets
- 8 112 extensions linéaires

¹⁰J. Braga and J. Treil. *Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes*. 2007

Expérimentation

Données

Crânes utilisés pour l'analyse de la morphologie des classes dentaires¹⁰



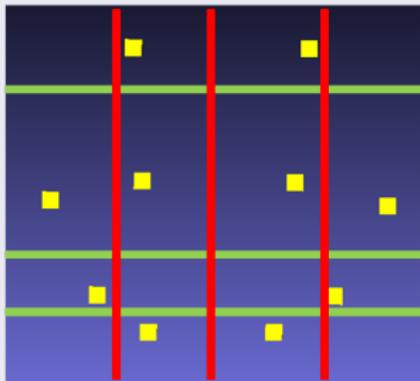
- 10 landmarks 3D
- 210 quadruplets
- 8 112 extensions linéaires

¹⁰J. Braga and J. Treil. *Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes*. 2007

Expérimentation

Données

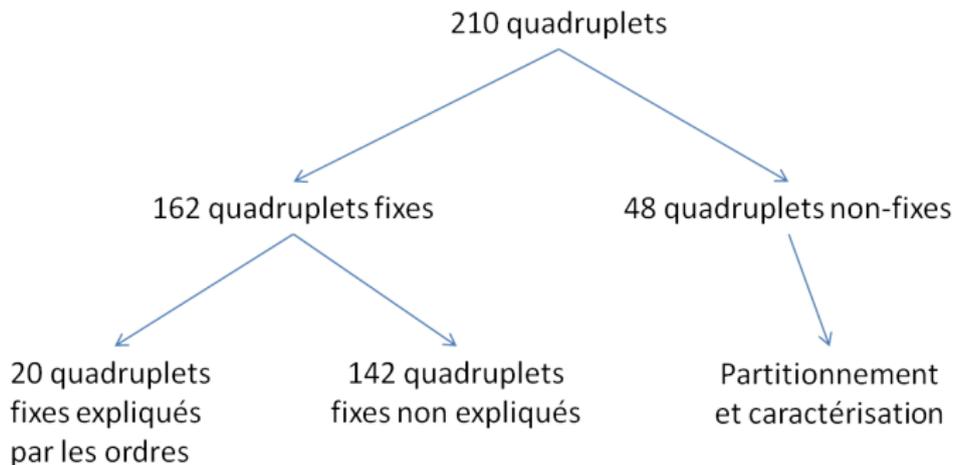
Crânes utilisés pour l'analyse de la morphologie des classes dentaires¹⁰



- 10 landmarks 3D
 - 210 quadruplets
 - 8 112 extensions linéaires
 - Programme en C, très rapide (450 ms)
- ⇒ 20 quadruplets fixes

¹⁰J. Braga and J. Treil. *Estimation of pediatric skeletal age using geometric morphometrics and three-dimensional cranial size changes*. 2007

Intérêt



Intérêt

- Extraire des propriétés provenant de connaissances a priori
- Eviter les calculs inutiles

Plan

- ① Contexte
- ② Codage de formes par matroïdes orientés
- ③ Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- ④ Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes**
- ⑤ Application à des déformations cranio-faciales
- ⑥ Conclusion

Partitionnement / Caractérisation

Définitions

- Partitionnement :
 - regrouper les chirotopes en clusters sans connaissances a priori
- Caractérisation :
 - trouver des propriétés sur les uplets caractérisant exactement chaque classe (clusters ou classes définies par des experts)

Distance entre chirotopes

Définition d'une distance

Soient χ_1 et χ_2 deux chirotopes. La *distance* (noté d_H) entre χ_1 et χ_2 est le nombre de $(d+1)$ -uplets orientés différemment.

Distance entre chirotopes

Définition d'une distance

Soient χ_1 et χ_2 deux chirotopes. La *distance* (noté d_H) entre χ_1 et χ_2 est le nombre de $(d+1)$ -uplets orientés différemment.

Remarque

- $d_H(\chi_1, \chi_2) =$ distance de Hamming

Partitionnement

k -medoids ¹¹

Principe : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant $\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d(e_i, m_j)$ où m_j est l'élément le plus central (*medoid*) de \mathcal{C}_j .

¹¹L. Kaufman et P.J. Rousseeuw. *Clustering by means of medoids*. 1987

Partitionnement

k -medoids ¹¹

Principe : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant $\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d(e_i, m_j)$ où m_j est l'élément le plus central (*medoid*) de \mathcal{C}_j .

Avantage

- Les medoids sont les chirotopes qui sont le plus au centre de chaque classe.

¹¹L. Kaufman et P.J. Rousseeuw. *Clustering by means of medoids*. 1987

Partitionnement

k -medoids ¹¹

Principe : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant $\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d(e_i, m_j)$ où m_j est l'élément le plus central (*medoid*) de \mathcal{C}_j .

Avantage

- Les medoids sont les chirotopes qui sont le plus au centre de chaque classe.

Inconvénient

- La densité des chirotopes n'est pas assez grande.

¹¹L. Kaufman et P.J. Rousseeuw. *Clustering by means of medoids*. 1987

Points associés aux chirotopes

Cas uniforme

On associe à chaque chirotope un point de $[-1, 1]^{\binom{n}{4}}$:

$$+ \longleftrightarrow 1$$

$$- \longleftrightarrow -1$$

Points associés aux chirotopes

Cas uniforme

On associe à chaque chirotope un point de $[-1, 1]^{\binom{n}{4}}$:

$$\begin{aligned}
 + & \longleftrightarrow 1 \\
 - & \longleftrightarrow -1
 \end{aligned}$$

Cas non-uniforme

On associe à chaque chirotope un point de $[0, 1]^{3 \times \binom{n}{4}}$:

$$\begin{aligned}
 + & \longleftrightarrow (0, 0, 1) \\
 0 & \longleftrightarrow (0, 1, 0) \\
 - & \longleftrightarrow (1, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Points associés aux chirotopes

Cas uniforme

On associe à chaque chirotope un point de $[-1, 1]^{\binom{n}{4}}$:

$$+ \longleftrightarrow 1$$

$$- \longleftrightarrow -1$$

Cas non-uniforme

On associe à chaque chirotope un point de $[0, 1]^{3 \times \binom{n}{4}}$:

$$+ \longleftrightarrow (0, 0, 1)$$

$$0 \longleftrightarrow (0, 1, 0)$$

$$- \longleftrightarrow (1, 0, 0)$$

Remarque

Soient P_1 et P_2 les points associés à χ_1 et χ_2 . On a alors :

$$d_1(P_1, P_2) = 2 \times d_H(\chi_1, \chi_2)$$

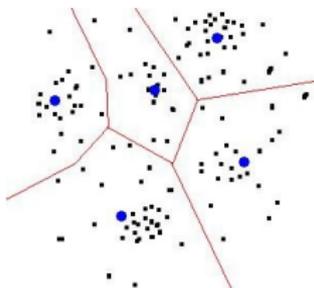
Partitionnement

k -means¹²

Principe : partitionner les éléments en k clusters afin que chaque cluster soit regroupé autour de son centre de gravité.

Formellement : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant

$$\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d^2(e_i, c_j) \text{ où } c_j \text{ est le centre de gravité de } \mathcal{C}_j.$$



¹²S.J. Wan et al. *An algorithm for multidimensional data clustering*. 1988

Partitionnement

k -means¹²

Principe : partitionner les éléments en k clusters afin que chaque cluster soit regroupé autour de son centre de gravité.

Formellement : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant

$$\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d^2(e_i, c_j) \text{ où } c_j \text{ est le centre de gravité de } \mathcal{C}_j.$$

Avantage

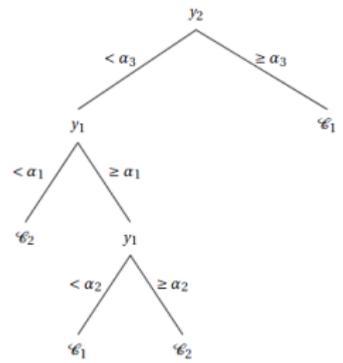
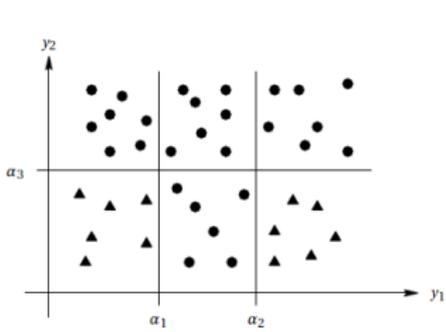
- On peut obtenir les chirotopes les plus proches des centres de gravité (car ces centres ne sont pas des chirotopes).

¹²S.J. Wan et al. *An algorithm for multidimensional data clustering*. 1988

Caractérisation

Arbres de décision ¹³

- Feuilles de l'arbre : façon de classer
- Nœuds internes : une seule variable
- Branches issues d'un nœud interne : différents choix sur la variable correspondante



¹³L. Breiman et al. *Classification and Regression Trees*. 1984

Caractérisation

Arbres de décision ¹³

- Feuilles de l'arbre : façon de classer
- Nœuds internes : une seule variable
- Branches issues d'un nœud interne : différents choix sur la variable correspondante

Avantage

- Caractérisation simple à partir d'une fonction de discriminabilité

Inconvénient

- L'arbre peut être très profond pour une caractérisation exacte

¹³L. Breiman et al. *Classification and Regression Trees*. 1984

Notre méthode de classification supervisée

Notations

- $\chi_M(b)$: le signe du $(d+1)$ -uplet b dans le chirotope χ_M

Notre méthode de classification supervisée

Notations

- $\chi_M(b)$: le signe du $(d+1)$ -uplet b dans le chirotope χ_M
- \mathcal{M} : un ensemble de chirotopes

Notre méthode de classification supervisée

Notations

- $\chi_M(b)$: le signe du $(d+1)$ -uplet b dans le chirotope χ_M
- \mathcal{M} : un ensemble de chirotopes
- $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}, \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$

Notre méthode de classification supervisée

Notations

- $\chi_M(b)$: le signe du $(d+1)$ -uplet b dans le chirotope χ_M
- \mathcal{M} : un ensemble de chirotopes
- $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}, \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$
- $m_{\mathcal{C}}$: point moyen des points associés aux chirotopes de \mathcal{C} i.e.

$$m_{\mathcal{C}}(b) = \frac{\sum_{M \in \mathcal{C}} \chi_M(b)}{|\mathcal{C}|}$$

Taux de discriminabilité (cas uniforme)

Définition

Soit $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$. Pour tout $(d+1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Taux de discriminabilité (cas uniforme)

Définition

Soit $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$. Pour tout $(d+1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Exemple

b	-	+
\mathcal{C}	25%	75%

Taux de discriminabilité (cas uniforme)

Définition

Soit $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$. Pour tout $(d+1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Exemple

b	-	+
\mathcal{C}	25%	75%
$\bar{\mathcal{C}}$	90%	10%

Taux de discriminabilité (cas uniforme)

Définition

Soit $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$. Pour tout $(d+1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Exemple

b	-	+
\mathcal{C}	25%	75%
$\bar{\mathcal{C}}$	90%	10%

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|(0, 75 - 0, 25) - (0, 1 - 0, 9)|}{2} = 0, 65$$

Taux de discriminabilité (cas uniforme)

Définition

Soit $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$. Pour tout $(d+1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\overline{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

On a : $0 \leq \tau(b, \mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}) \leq 1$.

Plus le taux de discriminabilité est proche de 1 et plus le $(d+1)$ -uplet permet de séparer \mathcal{C} et $\overline{\mathcal{C}}$.

Taux de discriminabilité (cas uniforme)

Définition

Soit $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$. Pour tout $(d+1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

On a : $0 \leq \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) \leq 1$.

Plus le taux de discriminabilité est proche de 1 et plus le $(d+1)$ -uplet permet de séparer \mathcal{C} et $\bar{\mathcal{C}}$.

\implies

On trie les $(d+1)$ -uplets selon la valeur du taux de discriminabilité.

Recherche des paramètres (cas uniforme)

Quadruplet				Taux (en %)	Signe pour C
10	11	17	24	92.50	+
7	11	13	26	92.50	+
3	7	26	37	92.00	+
20	26	30	38	91.75	-
18	20	30	38	91.25	+
16	19	21	30	91.25	-
15	27	28	30	91.25	+
9	26	30	38	91.25	-
6	26	30	38	91.25	-
3	7	26	31	91.25	+
1	3	19	25	91.00	-
30	35	37	39	90.00	-
26	30	38	39	90.00	+
26	30	35	38	90.00	-
22	29	33	40	90.00	+

Recherche des paramètres (cas uniforme)

Pour chaque $(d + 1)$ -uplet b et pour chaque chirotope χ ,
 $Tab(b, \chi) = 1$ si χ est mal classé en n'utilisant que b .

Quadruplet				Taux (en %)	Signe pour C
10	11	17	24	92.50	+
7	11	13	26	92.50	+
3	7	26	37	92.00	+
20	26	30	38	91.75	-
18	20	30	38	91.25	+
16	19	21	30	91.25	-
15	27	28	30	91.25	+
9	26	30	38	91.25	-
6	26	30	38	91.25	-
3	7	26	31	91.25	+
1	3	19	25	91.00	-
30	35	37	39	90.00	-
26	30	38	39	90.00	+
26	30	35	38	90.00	-
22	29	33	40	90.00	+

Recherche des paramètres (cas uniforme)

Pour chaque $(d + 1)$ -uplet b et pour chaque chirotope χ ,
 $Tab(b, \chi) = 1$ si χ est mal classé en n'utilisant que b .

Quadruplet				Taux (en %)	Signe pour C	chi_31	chi_7	chi_12	chi_1	chi_28
10	11	17	24	92.50	+	1	0	1	0	1
7	11	13	26	92.50	+	1	1	1	0	1
3	7	26	37	92.00	+	0	1	1	1	0
20	26	30	38	91.75	-	1	1	0	0	0
18	20	30	38	91.25	+	0	1	0	0	0
16	19	21	30	91.25	-	1	0	0	0	1
15	27	28	30	91.25	+	1	0	1	0	0
9	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
6	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
3	7	26	31	91.25	+	0	1	0	0	0
1	3	19	25	91.00	-	0	0	1	0	0
30	35	37	39	90.00	-	1	0	0	1	0
26	30	38	39	90.00	+	1	1	1	1	0
26	30	35	38	90.00	-	1	1	1	1	1
22	29	33	40	90.00	+	1	1	1	1	1

Recherche des paramètres (cas uniforme)

Pour chaque $(d + 1)$ -uplet b et pour chaque chirotope χ ,
 $Tab(b, \chi) = 1$ si χ est mal classé en n'utilisant que b .

Quadruplet				Taux (en %)	Signe pour C	chi_31	chi_7	chi_12	chi_1	chi_28
10	11	17	24	92.50	+	1	0	1	0	1
7	11	13	26	92.50	+	1	1	1	0	1
3	7	26	37	92.00	+	0	1	1	1	0
20	26	30	38	91.75	-	1	1	0	0	0
18	20	30	38	91.25	+	0	1	0	0	0
16	19	21	30	91.25	-	1	0	0	0	1
15	27	28	30	91.25	+	1	0	1	0	0
9	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
6	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
3	7	26	31	91.25	+	0	1	0	0	0
1	3	19	25	91.00	-	0	0	1	0	0
30	35	37	39	90.00	-	1	0	0	1	0
26	30	38	39	90.00	+	1	1	1	1	0
26	30	35	38	90.00	-	1	1	1	1	1
22	29	33	40	90.00	+	1	1	1	1	1

On cherche un ensemble de lignes \mathcal{D} (le plus petit possible) tel que pour chaque colonne la somme soit strictement inférieure à $\#\mathcal{D}/2$.

Recherche des paramètres (cas uniforme)

Pour chaque $(d + 1)$ -uplet b et pour chaque chirotope χ ,
 $Tab(b, \chi) = 1$ si χ est mal classé en n'utilisant que b .

Quadruplet				Taux (en %)	Signe pour C	chi_31	chi_7	chi_12	chi_1	chi_28
10	11	17	24	92.50	+	1	0	1	0	1
7	11	13	26	92.50	+	1	1	1	0	1
3	7	26	37	92.00	+	0	1	1	1	0
20	26	30	38	91.75	-	1	1	0	0	0
18	20	30	38	91.25	+	0	1	0	0	0
16	19	21	30	91.25	-	1	0	0	0	1
15	27	28	30	91.25	+	1	0	1	0	0
9	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
6	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
3	7	26	31	91.25	+	0	1	0	0	0
1	3	19	25	91.00	-	0	0	1	0	0
30	35	37	39	90.00	-	1	0	0	1	0
26	30	38	39	90.00	+	1	1	1	1	0
26	30	35	38	90.00	-	1	1	1	1	1
22	29	33	40	90.00	+	1	1	1	1	1

On cherche un ensemble de lignes \mathcal{D} (le plus petit possible) tel que pour chaque colonne la somme soit strictement inférieure à $\#\mathcal{D}/2$.

Recherche des paramètres (cas uniforme)

Pour chaque $(d + 1)$ -uplet b et pour chaque chirotope χ ,
 $Tab(b, \chi) = 1$ si χ est mal classé en n'utilisant que b .

Quadruplet				Taux (en %)	Signe pour C	chi_31	chi_7	chi_12	chi_1	chi_28
10	11	17	24	92.50	+	1	0	1	0	1
7	11	13	26	92.50	+	1	1	1	0	1
3	7	26	37	92.00	+	0	1	1	1	0
20	26	30	38	91.75	-	1	1	0	0	0
18	20	30	38	91.25	+	0	1	0	0	0
16	19	21	30	91.25	-	1	0	0	0	1
15	27	28	30	91.25	+	1	0	1	0	0
9	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
6	26	30	38	91.25	-	1	1	1	1	1
3	7	26	31	91.25	+	0	1	0	0	0
1	3	19	25	91.00	-	0	0	1	0	0
30	35	37	39	90.00	-	1	0	0	1	0
26	30	38	39	90.00	+	1	1	1	1	0
26	30	35	38	90.00	-	1	1	1	1	1
22	29	33	40	90.00	+	1	1	1	1	1

On cherche un ensemble de lignes \mathcal{D} (le plus petit possible) tel que pour chaque colonne la somme soit strictement inférieure à $\#\mathcal{D}/2$.

$$x = (+, -, -) \text{ et } r = \max_{\chi} \sum_{b \in \mathcal{D}} Tab(b, \chi)$$

Notre méthode de classification supervisée

Caractérisation faible (cas uniforme)

Pour chaque classe \mathcal{C} , on cherche :

- un sous-ensemble \mathcal{D} de $(d+1)$ -uplets
- un ensemble de signes x de $\{-, +\}^{\mathcal{D}}$
- un entier $r < \#\mathcal{D}/2$

afin que dans $\{-, +\}^{\mathcal{D}}$, $\mathcal{C} = B_{\mathcal{D}}(x, r)$ boule de centre x et de rayon r .

Notre méthode de classification supervisée

Caractérisation faible (cas uniforme)

Pour chaque classe \mathcal{C} , on cherche :

- un sous-ensemble \mathcal{D} de $(d+1)$ -uplets
- un ensemble de signes x de $\{-, +\}^{\mathcal{D}}$
- un entier $r < \#\mathcal{D}/2$

afin que dans $\{-, +\}^{\mathcal{D}}$, $\mathcal{C} = B_{\mathcal{D}}(x, r)$ boule de centre x et de rayon r .

Caractérisation forte (cas uniforme)

Pour chaque classe \mathcal{C} , on cherche :

- un sous-ensemble \mathcal{D} de $(d+1)$ -uplets
- deux point x et \bar{x} de $\{0, 1\}^{\mathcal{D}}$
- un entier $r < \#\mathcal{D}/2$

afin que dans $[0, 1]^{\mathcal{D}}$, $\mathcal{C} = B_{\mathcal{D}}(x, r)$ et $\bar{\mathcal{C}} = B_{\mathcal{D}}(\bar{x}, r)$.

Taux de discriminabilité (cas non-uniforme)

Notations

- $S \subsetneq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$

Exemple

b	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

Taux de discriminabilité (cas non-uniforme)

Notations

- $S \subsetneq \{-, 0, +\}, \bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$

Exemple

b	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

Taux de discriminabilité (cas non-uniforme)

Notations

- $S \subsetneq \{-, 0, +\}, \bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$

Exemple

b	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

Taux de discriminabilité (cas non-uniforme)

Notations

- $S \subsetneq \{-, 0, +\}, \bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \max_S \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S)$

Exemple

b	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

Taux de discriminabilité (cas non-uniforme)

Notations

- $S \subsetneq \{-, 0, +\}, \bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \max_S \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S)$

Exemple

b	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

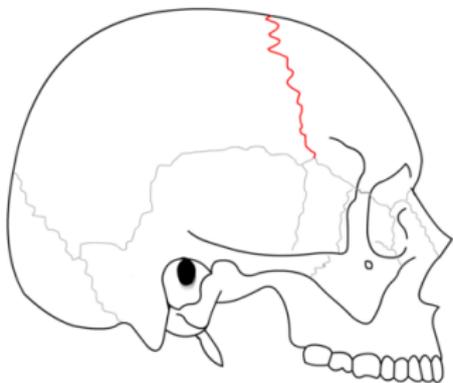
$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \{-, +\})$$

Plan

- ① Contexte
- ② Codage de formes par matroïdes orientés
- ③ Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- ④ Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes
- ⑤ Application à des déformations cranio-faciales
- ⑥ Conclusion

Les données

Scanners X de crânes de 40 enfants atteints de fusion prématurée de la suture coronale et de 20 enfants non-affectés¹⁴. [Collaboration avec *The Pennsylvania State University*]



¹⁴Y. Heuzé et al. *Unilateral and bilateral expression of a quantitative trait : asymmetry and symmetry in coronal craniosynostosis*. 2012

Les données

Scanners X de crânes de 40 enfants atteints de fusion prématurée de la suture coronale et de 20 enfants non-affectés¹⁴. [Collaboration avec *The Pennsylvania State University*]

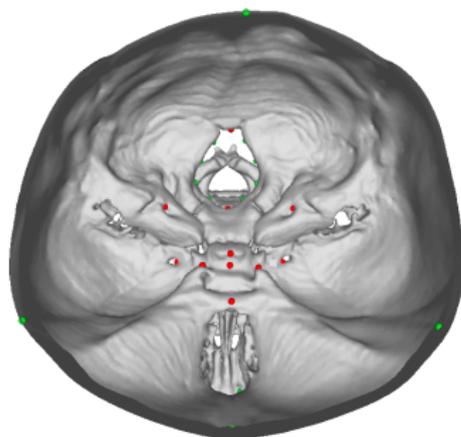
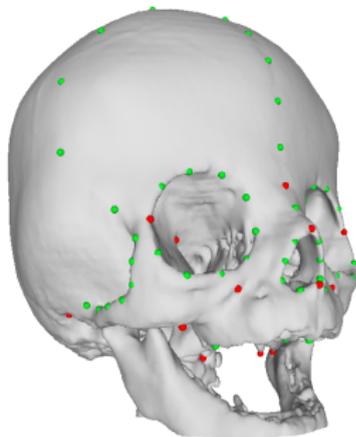


¹⁴Y. Heuzé et al. *Unilateral and bilateral expression of a quantitative trait : asymmetry and symmetry in coronal craniosynostosis*. 2012

Les données

Scanners X de crânes de 40 enfants atteints de fusion prématurée de la suture coronale et de 20 enfants non-affectés¹⁴. [Collaboration avec *The Pennsylvania State University*]

41 landmarks



¹⁴Y. Heuzé et al. *Unilateral and bilateral expression of a quantitative trait : asymmetry and symmetry in coronal craniosynostosis*. 2012

Les données

Scanners X de crânes de 40 enfants atteints de fusion prématurée de la suture coronale et de 20 enfants non-affectés¹⁴. [Collaboration avec *The Pennsylvania State University*]

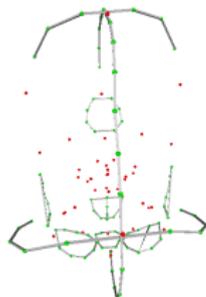
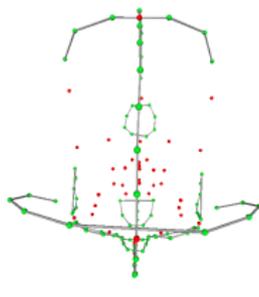
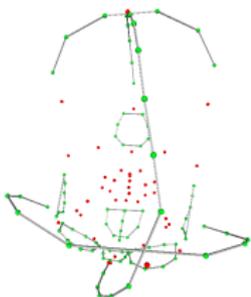
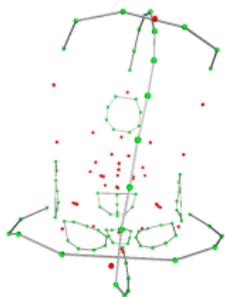
41 landmarks

LUCS (8)

RUCS (17)

BCS (15)

Unaffected (20)



¹⁴Y. Heuzé et al. *Unilateral and bilateral expression of a quantitative trait : asymmetry and symmetry in coronal craniosynostosis*. 2012

Méthodologie

$$\begin{matrix}
 \begin{matrix} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc} 17.45 & 26.36 & 13.7 \\ 14.51 & 26.93 & 11.5 \\ 15.93 & 26.94 & 12.36 \\ 17.11 & 26.94 & 13.63 \\ \dots \end{array} \right) \\ e_1
 \end{matrix} &
 \begin{matrix}
 \dots &
 \begin{matrix} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc} 18.69 & 26.98 & 14.67 \\ 19.50 & 27.03 & 15.03 \\ 15.75 & 29.67 & 10.89 \\ 14.96 & 29.08 & 11.07 \\ \dots \end{array} \right) \\ e_2
 \end{matrix} &
 \dots &
 \begin{matrix}
 \begin{matrix} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc} 16.75 & 25.86 & 13.38 \\ 15.13 & 27.33 & 11.93 \\ 15.35 & 22.54 & 10.46 \\ 16.34 & 25.34 & 13.45 \\ \dots \end{array} \right) \\ e_m
 \end{matrix}
 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

1) Calcul des chirotopes

$$\begin{matrix}
 (- + + - - + \dots) & (- - + + - - \dots) & \dots & (- + + + + - \dots) \\
 \chi_1 & \chi_2 & & \chi_m
 \end{matrix}$$

Détection des **quadruplets fixes** et suppression

$$\begin{matrix}
 (+ - - + \dots) & (- + - - \dots) & \dots & (+ + + - \dots) \\
 \chi_1 & \chi_2 & & \chi_m
 \end{matrix}$$

Méthodologie

(+ - - + ...)

χ_1

(- + - - ...)

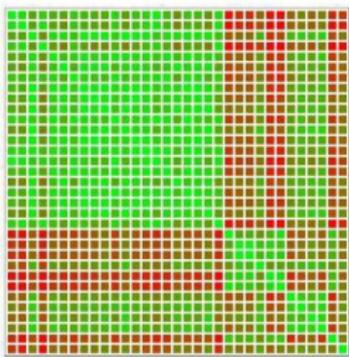
χ_2

...

(+ + + - ...)

χ_m

2) Calcul des distances



Méthodologie

(+ - - + ...)

χ_1

(- + - - ...)

χ_2

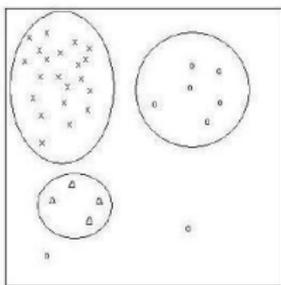
...

(+ + + - ...)

χ_m

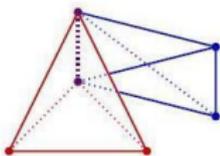
3) Partitionnement automatique

k-means

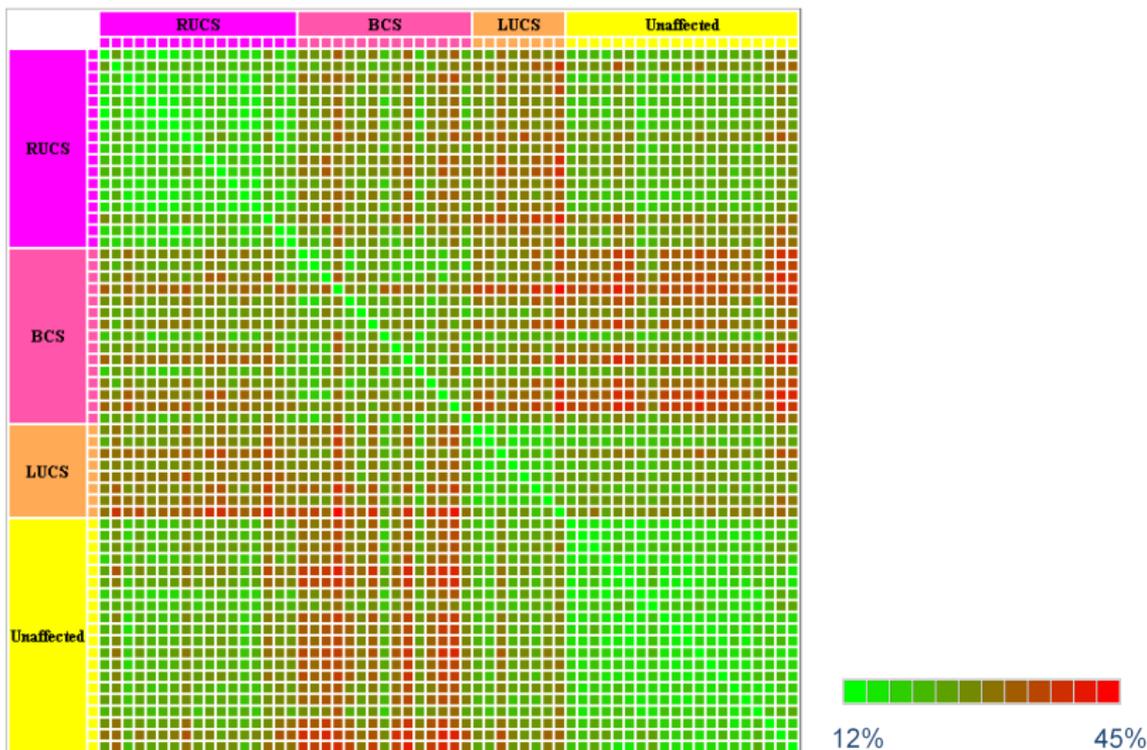


4) Caractérisation des classes

$\chi \in \mathcal{C}_1$ si et seulement si $\chi(B_2) = +$ et $\chi(B_5) = -$



Distance entre les chirotopes



Partitionnement automatique

4-means
 ↓

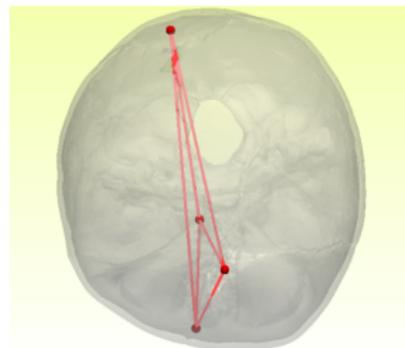
	LUCS	RUCS	BCS	Unaffected
Cluster 1	8	0	1	0
Cluster 2	0	17	0	0
Cluster 3	0	0	14	0
Cluster 4	0	0	0	20

⇒ Cohérence avec les classes cliniques.

Quelques caractérisations

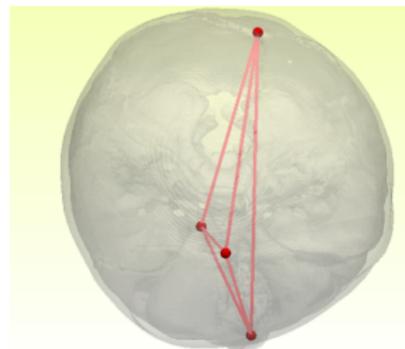
RUCS

- 4 quadruplets avec τ égal à 1
- 3 points sur le plan médian sagittal + 1 dans la partie droite de la base du crâne



LUCS

- τ égal à 1 pour les symétriques des 4 quadruplets

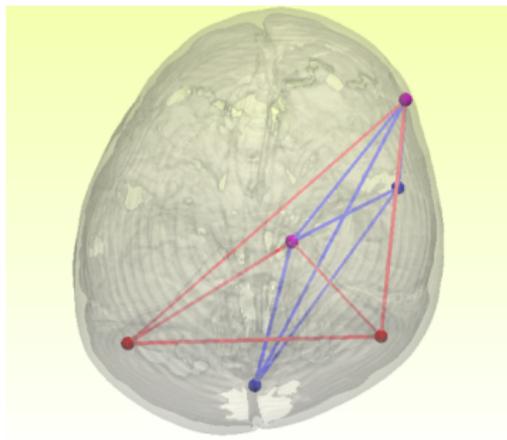
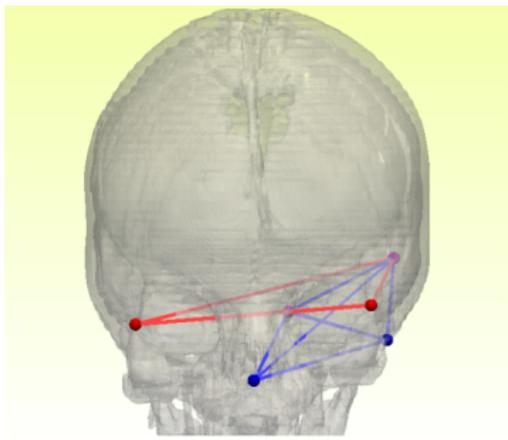


Quelques caractérisations

BCS

Caractérisation forte :

- 2 quadruplets dont $\tau \simeq 0,95$
- Crâne BCS \iff ces 2 quadruplets ont pour orientation —



Quelques caractérisations

Unaffected

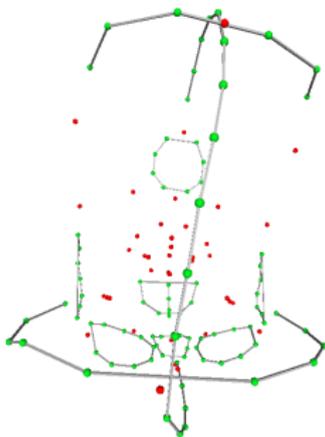
Caractérisation forte par un sous-ensemble \mathcal{D} de 5 quadruplets et $x = \{-, -, +, -, +\}$ et $\bar{x} = \{+, +, -, +, -\}$ tels que :

- $\text{Unaffected} = B_{\mathcal{D}}(x, 2)$
- Complémentaire = $B_{\mathcal{D}}(\bar{x}, 2)$

Demi-crânes

Etude de la symétrie des crânes

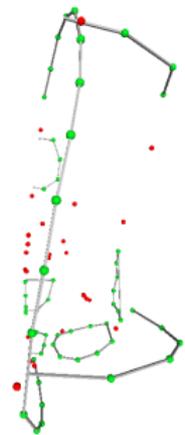
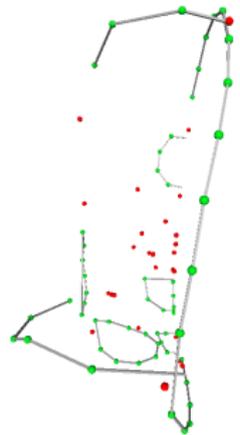
- 1 On extrait du chirotope du crâne complet, les chirotopes des demi-crânes gauche et droit
- 2 On symétrise le demi-crâne gauche



Demi-crânes

Etude de la symétrie des crânes

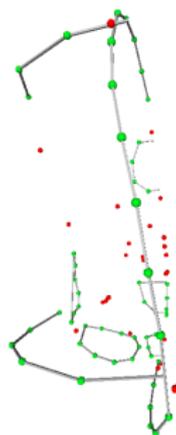
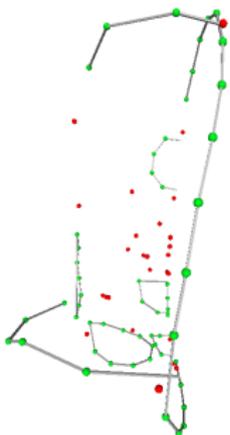
- 1 On extrait du chirotope du crâne complet, les chirotopes des demi-crânes gauche et droit
- 2 On symétrise le demi-crâne gauche



Demi-crânes

Etude de la symétrie des crânes

- 1 On extrait du chirotope du crâne complet, les chirotopes des demi-crânes gauche et droit
- 2 On symétrise le demi-crâne gauche

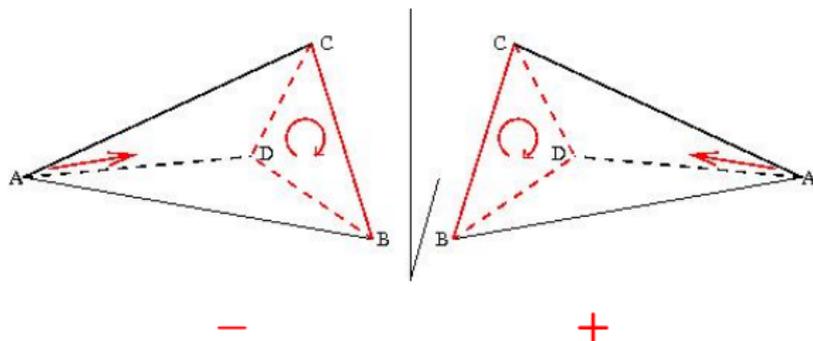


27 landmarks anatomiques + 57 semi-landmarks curvilignes

Demi-crânes

Etude de la symétrie des crânes

- 1 On extrait du chirotope du crâne complet, les chirotopes des demi-crânes gauche et droit
- 2 On symétrise le demi-crâne gauche



Partitionnement automatique

4-means ou 4-medoids



	R-LUCS	L-LUCS	R-RUCS	L-RUCS	R-BCS	L-BCS	R-Unaff.	L-Unaff.
Cluster 1	8	0	0	17	0	0	0	0
Cluster 2	0	8	17	0	0	0	0	0
Cluster 3	0	0	0	0	15	15	0	0
Cluster 4	0	0	0	0	0	0	20	20

Partitionnement automatique

4-means ou 4-medoids



	R-LUCS	L-LUCS	R-RUCS	L-RUCS	R-BCS	L-BCS	R-Unaff.	L-Unaff.
Cluster 1	8	0	0	17	0	0	0	0
Cluster 2	0	8	17	0	0	0	0	0
Cluster 3	0	0	0	0	15	15	0	0
Cluster 4	0	0	0	0	0	0	20	20

Cluster 4 : Demi-crânes des Unaffected

Cluster 3 : Demi-crânes des BCS

Cluster 2 : Demi-crânes des UCS du côté de la fusion

Cluster 1 : Demi-crânes des UCS du côté sans fusion

Caractérisations

R-LUCS et L-RUCS : 1399 quadruplets avec τ égal à 1

L-LUCS et R-RUCS : 1819 quadruplets avec τ égal à 1

Caractérisations

R-LUCS et L-RUCS : 1399 quadruplets avec τ égal à 1

L-LUCS et R-RUCS : 1819 quadruplets avec τ égal à 1

L-BCS et R-BCS : 4 quadruplets avec τ égal à 1

Caractérisations

R-LUCS et L-RUCS : 1399 quadruplets avec τ égal à 1

L-LUCS et R-RUCS : 1819 quadruplets avec τ égal à 1

L-BCS et R-BCS : 4 quadruplets avec τ égal à 1

L-Unaff. et R-Unaff. : Caractérisation forte par un ensemble \mathcal{D} de 3 quadruplets et $x = (-, -, -)$ et $\bar{x} = (+, +, +)$ tels que :

- Unaffected = $B_{\mathcal{D}}(x, 1)$
- Le complémentaire = $B_{\mathcal{D}}(\bar{x}, 1)$

Discussion

Bilan

Ces résultats tendent à montrer que :

- LUCS et RUCS sont des images miroirs l'une de l'autre
- la déformation BCS affecte les deux côtés de façon similaire

¹⁵Y.Heuzé et al. *Unilateral and bilateral expression of a quantitative trait : asymmetry and symmetry in coronal craniosynostosis*. 2012

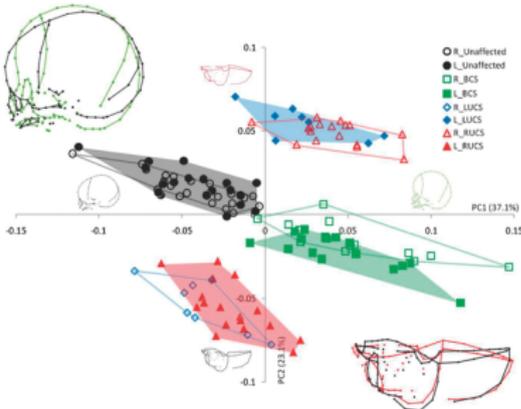
Discussion

Bilan

Ces résultats tendent à montrer que :

- LUCS et RUCS sont des images miroirs l'une de l'autre
- la déformation BCS affecte les deux côtés de façon similaire

On retrouve les résultats de Y.Heuzé et al.¹⁵



¹⁵Y.Heuzé et al. *Unilateral and bilateral expression of a quantitative trait : asymmetry and symmetry in coronal craniosynostosis.* 2012

Plan

- 1 Contexte
- 2 Codage de formes par matroïdes orientés
- 3 Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées
- 4 Partitionnement et caractérisation à partir des uplets non-fixes
- 5 Application à des déformations cranio-faciales
- 6 Conclusion

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?

Contributions et perspectives

- 1 Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- 2 Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près
- ③ Partitionnement et caractérisation à partir de uplets non-fixes [MICCAI 2012]

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près
- ③ Partitionnement et caractérisation à partir de uplets non-fixes [MICCAI 2012]
 - A quoi correspond l'espace engendré par les chirotopes ?
 - Trouver le chirotope le plus proche d'un point de $[-1, 1]^{(n)}_{(4)}$?

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près
- ③ Partitionnement et caractérisation à partir de uplets non-fixes [MICCAI 2012]
 - A quoi correspond l'espace engendré par les chirotopes ?
 - Trouver le chirotope le plus proche d'un point de $[-1, 1]^{(n)}_{(4)}$?
- ④ Applications

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près
- ③ Partitionnement et caractérisation à partir de uplets non-fixes [MICCAI 2012]
 - A quoi correspond l'espace engendré par les chirotopes ?
 - Trouver le chirotope le plus proche d'un point de $[-1, 1]^{(n)}_{(4)}$?
- ④ Applications
 - Etudier les caractérisations avec les experts
 - Travailler sur d'autres données

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près
- ③ Partitionnement et caractérisation à partir de uplets non-fixes [MICCAI 2012]
 - A quoi correspond l'espace engendré par les chirotopes ?
 - Trouver le chirotope le plus proche d'un point de $[-1, 1]^{(n)}_{(4)}$?
- ④ Applications
 - Etudier les caractérisations avec les experts
 - Travailler sur d'autres données
- ⑤ Programmation

Contributions et perspectives

- ① Utilisation des matroïdes orientés pour la morphométrie
 - Comment peut-on gérer l'incertitude sur les données ?
- ② Uplets fixes déterminés par des ordres sur les coordonnées des points [CCCG'11]
 - Caractériser les configurations en dimension supérieure à 3 ?
 - Formule calculant le nombre de configurations à équivalence près
- ③ Partitionnement et caractérisation à partir de uplets non-fixes [MICCAI 2012]
 - A quoi correspond l'espace engendré par les chirotopes ?
 - Trouver le chirotope le plus proche d'un point de $[-1, 1]^{(n)}_{(4)}$?
- ④ Applications
 - Etudier les caractérisations avec les experts
 - Travailler sur d'autres données
- ⑤ Programmation
 - Paralléliser les programmes
 - Logiciel en ligne (co-encadrement de 2 stages)

Remerciements

Je tiens à remercier :

- Yann Heuzé et Joan Richstmeier : Department of Anthropology, The Pennsylvania State University
- José Braga et Jacques Treil : laboratoire AMIS, Université Paul Sabatier / CNRS, Toulouse

pour nous avoir autorisés à travailler sur leurs données et nous avoir fait partager leurs expertises.