

**- Examen du 2/6/2009. -**

**- Durée 2h. Aucun document autorisé. -**

**- Exercice 1 - Tri topologique -**

Pour chaque entier  $n > 0$ , on construit un graphe orienté  $D_n$  de la manière suivante : Les sommets sont les mots de  $n$  lettres sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . Deux sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par un arc  $xy$  si le mot de  $x$  et le mot de  $y$  diffèrent sur une seule lettre, et si de plus cette lettre est un 0 dans  $x$  et un 1 dans  $y$ .

- Dessiner les graphes orientés  $D_1$ ,  $D_2$ , et  $D_3$ .
- Montrer que pour tout  $n$ , le graphe  $D_n$  est un DAG (i.e. ne possède pas de circuit orienté).
- Construire un tri-topologique de  $D_n$  pour tout  $n$ , en justifiant soigneusement votre méthode.

**- Exercice 2 - Plus courts chemins -**

On se donne le graphe orienté  $D$  sur l'ensemble de sommets  $\{1, 2, 3, 4\}$  muni d'une fonction de poids sur les arcs codé par le tableau suivant, avec la convention que  $+\infty$  code le fait que l'arc n'est pas présent :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 3 & +\infty \\ -2 & +\infty & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dessiner le graphe correspondant en précisant la valeur des poids des arcs.
- Rappeler l'algorithme de Floyd-Warshall.
- Dérouler l'algorithme de Floyd-Warshall sur l'exemple proposé.

**- Exercice 3 - Arbre enraciné -**

On se donne un ensemble  $E$  dans lequel on a identifié un sommet particulier *racine*  $r$ . On se donne de plus une fonction **père** définie de  $E$  vers  $E \cup \{\emptyset\}$ .

- Ecrire, ou au pire décrire, un algorithme `VERIFIE_ARBRE(père,r)` qui retourne VRAI si la fonction **père** correspond à un arbre enraciné en  $r$  et FAUX sinon.
- Proposer plusieurs algorithmes afin de résoudre ce problème, basés sur des méthodes distinctes. Calculer leurs complexités. (On pourra par exemple proposer trois algorithmes respectivement en  $O(n^2)$ ,  $O(n \log n)$  et  $O(n)$ .)

**- Exercice 4 - Chemins arc-disjoints -**

On se donne un graphe orienté  $D$  ainsi que deux sommets distincts  $s$  et  $p$ . On suppose qu'il existe un chemin orienté  $P$  de  $s$  à  $p$  dans  $D$ . On inverse alors l'orientation de tous les arcs de  $P$ . On obtient ainsi un nouveau graphe orienté  $D'$ . On suppose qu'il existe toujours un chemin orienté  $P'$  de  $s$  à  $p$  dans  $D'$ . Montrer alors qu'il existe deux chemins disjoints au sens des arcs de  $s$  à  $p$  dans  $D$ . On trouvera d'abord l'idée de la construction de ces deux chemins disjoints à partir de  $P$  et  $P'$ . Puis on montrera que cette construction convient.