

**- Examen du 25/5/2007. -**

**- Durée 2h. Document autorisé : Une feuille manuscrite. -**

*- Une large part de la notation prendra en compte la clarté de la rédaction et la rigueur des justifications. -*

**- Exercice 1 -**

On se donne le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{rllll}
 \text{Maximiser} & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -x_4 \\
 \text{Sous} & 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 \leq 2 \\
 & -x_1 & & -x_3 & \leq 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \geq 0
 \end{array}$$

- a. Résoudre (P) avec l'algorithme du simplexe en deux phases à l'exclusion de toute autre méthode.
- b. Ecrire le dual (D) du programme (P).
- c. Résoudre (D) géométriquement. La solution trouvée est-elle compatible avec celle de (P) ?

**- Exercice 2 -**

On se donne le problème suivant, dont le but est la maximisation de la fonction compétence d'une affectation agents/tâches.

compétence	tâche 1	tâche 2	tâche 3	tâche 4
agent 1	5	3	4	5
agent 2	4	5	4	6
agent 3	5	6	5	7
agent 4	4	4	3	5

Le dictionnaire final obtenu lors de la résolution de ce programme est :

$$\begin{array}{rllllllllllllllll}
 x_{13} = & 1 & -a_1 & & +t_2 & & & & -a_2 & -x_{23} & & +t_1 & -a_3 & -x_{33} & +t_4 & & -a_4 & -x_{43} \\
 x_{24} = & 1 & & & & -x_{21} & -a_2 & -x_{23} & -x_{22} & & & & & & & & & & \\
 x_{32} = & 1 & & -x_{31} & & -x_{21} & -a_2 & -x_{23} & -x_{22} & & -a_3 & -x_{33} & +t_4 & +x_{14} & & & & +x_{44} \\
 x_{42} = & 0 & & +x_{31} & -t_2 & -x_{12} & +x_{21} & +a_2 & +x_{23} & & +a_3 & +x_{33} & -t_4 & -x_{14} & & & & -x_{44} \\
 x_{41} = & 1 & & -x_{31} & +t_2 & +x_{12} & -x_{21} & -a_2 & -x_{23} & & -a_3 & -x_{33} & +t_4 & +x_{14} & -a_4 & -x_{43} & & \\
 x_{11} = & 0 & & & -t_2 & -x_{12} & & +a_2 & +x_{23} & & -t_1 & +a_3 & +x_{33} & -t_4 & -x_{14} & +a_4 & +x_{43} & \\
 t_3 = & 0 & +a_1 & & -t_2 & & & +a_2 & & & -t_1 & +a_3 & & -t_4 & & +a_4 & & \\
 x_{34} = & 0 & & & & +x_{21} & +a_2 & +x_{23} & +x_{22} & & & & & -t_4 & & & & -x_{44} \\
 z = & 20 & -4a_1 & -x_{31} & -t_2 & -2x_{12} & -x_{21} & -4a_2 & +0x_{23} & +0x_{22} & -t_1 & -5a_3 & +0x_{33} & -2t_4 & -x_{14} & -3a_4 & +0x_{43} & +0x_{44}
 \end{array}$$

- a. Dédurre de ce dictionnaire une solution optimale du problème d'affectation.
- b. En déduire un certificat d'optimalité. Expliquer soigneusement en quoi ce certificat consiste.

**- Exercice 3 -**

Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des euphorisants, des analgésiques et des somnifères, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 20, 50 et 30 milliers d'euros par kilo. Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : morphine, caféine et aspirine. Les quantités nécessaires de ces produits pour fabriquer un kilo de médicament sont résumées dans le tableau suivant :

	euphorisant	analgésique	somnifère
Morphine	2	4	4
Caféine	1	2	0
Aspirine	2	5	4

Par ailleurs les quantités de morphine, caféine et aspirine sont limitées par leur production à respectivement 20, 6 et 14 unités par jour. Le but de l'exercice est de planifier les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

- Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.
- Résoudre celui-ci par l'algorithme du simplexe.
- Justifier l'optimalité de la solution obtenue.

**- Exercice 4 -**

La solution  $x_1 = 2/13$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 8/13$ ,  $x_4 = 0$  est-elle solution optimale du programme linéaire suivant ? Justifier votre réponse.

$$\begin{array}{llllll}
 \text{Maximiser} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \\
 \text{Sous} & 5x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \leq 2 \\
 & x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +5x_4 & \leq 2 \\
 & 2x_1 & +6x_2 & +4x_3 & +2x_4 & \leq 3 \\
 & 6x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq 6 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
 \end{array}$$