- Contrôle continu du 27 Avril 2009. -

- Durée 1h30. Ni documents, ni calculatrices. -

- *Une part importante de l'évaluation prendra en compte la clarté de la rédaction et la rigueur des justifications.* -

- Exercice 1 - Un comité d'action disposant de 100 m^2 de drap en réserve fabrique 2 types de banderoles. La fabrication d'une banderole de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m^2 de drap ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 2 heures de préparation sont disponibles avant la manifestation. Les banderoles sont agrafées sur des supports et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une banderole du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 150 banderoles du premier type. Derrière chaque banderole défilent respectivement 30 et 50 manifestants. Le but est de maximiser le nombre de personnes lors du défilé.

a. Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire sous forme canonique.

b. Déterminer un plan de production optimal en résolvant le programme linéaire par le simplexe.

- Exercice 2 -

On se donne le programme linéaire (P) suivant :

$$
\begin{array}{rccccccc}
\text{Maximiser} & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -4x_4 & & \\
\text{Sous} & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & \leq & -2 \\
 & & -x_2 & -x_3 & & \leq & -2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a. Résoudre (P) avec l'algorithme du simplexe en deux phases.

b. Ecrire le dual (D) du programme (P).

c. Résoudre (D) géométriquement. La solution trouvée est-elle compatible avec celle que l'on peut trouver dans le dictionnaire final de (P) ?

d. Certifier l'optimalité de la solution trouvée pour (P) en termes de combinaisons linéaires de contraintes.

- Exercice 3 - Le but de cet exercice est de modifier les entrées d'un tableau T afin que le nouveau tableau obtenu T' soit trié par ordre croissant. Par exemple lorsque $T = [3, 1, 2, 5]$, on peut augmenter de 2 la deuxième valeur et augmenter de 1 la troisième valeur, pour obtenir $T'_1 = [3, 3, 3, 5]$. On peut aussi diminuer de $3/2$ la premième valeur et augmenter de $1/2$ la deuxième valeur pour obtenir $T'_2 = [1.5, 1.5, 2, 5]$. Le but est que la somme totale des modifications soit la plus petite possible, ainsi passer de T à T'_1 coûte 3 (augmentation de 2 et de 1) alors que passer de T à T'_2 coûte 2 (augmentation de 1/2 et diminution de 3/2).

a. Calculer une solution optimale T' lorsque $T = [2, 1, 4, 3]$ et lorsque $T = [4, 3, 2, 1]$.

b. Modéliser ce problème par un programme (P). On supposera que T possède cinq entrées $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$. Dans un premier temps votre fonction objectif pourra utiliser des valeurs absolues. Essayer de limiter le nombre de contraintes.

c. Modifier (P) pour en faire un programme linéaire, i.e. sans valeurs absolues dans la fonction objectif.

d. L'algorithme du simplexe appliqué au programme linéaire (P) associé au tableau $[3, 1, 2, 5, 6]$ peut-il retourner la solution optimale $[1.5, 1.5, 2, 5, 6]$? Justifier.