- Examen du 31mars 2008. -

- Durée 1h30. Pas de documents. -

- *Une large part de la notation prendra en compte la clarté de la rédaction et la rigueur des justifications.* -

- Exercice 1 -
On se donne le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{rrrrrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -4x_4 & & \\ \text{Sous} & 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & \leq & -2 \\ & -x_1 & & -x_3 & & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2, & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Résoudre (P) avec l'algorithme du simplexe en deux phases.

b. Ecrire le dual (D) du programme (P).

c. Résoudre (D) géométriquement. La solution trouvée est-elle compatible avec celle que l'on peut trouver dans le dictionnaire final de (P) ?

- Exercice 2 - On se donne le programme linéaire (P) suivant dans lequel a et b sont des réels quelconques :

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximiser} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous} & x_1 & + & ax_2 & \leq & b \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a. Discuter le statut de (P) suivant les valeurs de a et b. Lorsque (P) admet une solution optimale, donner celle-ci.

b. Même question pour le dual (D) de (P) que l'on écrira.

- Exercice 3 -
On suppose que (P) est un programme dont les variables x_1, x_2, x_3 sont soumises à des contraintes linéaires mais dont la fonction objectif z est non-linéaire. Dans les deux cas suivants, préciser comment modifier (P) en un programme linéaire (en ajoutant éventuellement de nouvelles variables et contraintes).

a. Lorsque $z = \text{Max}(\text{Min}(x_1 + x_2, x_2 + x_3))$.

b. Lorsque $z = \text{Min}|x_1 - x_2 + x_3|$, où $|.|$ est la valeur absolue.

TSVP

- Exercice 4 -

Le but de cet exercice est de modifier les entrées d'un tableau T afin que le nouveau tableau obtenu T' soit trié par ordre croissant. Par exemple lorsque $T = [3, 1, 2, 5]$, on peut augmenter de 2 la deuxième valeur et augmenter de 1 la troisième valeur, pour obtenir $T'_1 = [3, 3, 3, 5]$. On peut aussi diminuer de 1 la premième valeur et augmenter de 1 la deuxième valeur pour obtenir $T'_2 = [2, 2, 2, 5]$. Le but est que la somme totale des modifications soit la plus petite possible, ainsi passer de T à T'_1 coûte 3 (augmentation de 2 et de 1) alors que passer de T à T'_2 coûte 2 (augmentation de 1 et diminution de 1). Les valeurs fractionnaires sont autorisées pour les valeurs de T'.

a. Calculer une solution optimale T' lorsque $T = [2, 1, 4, 3]$ et lorsque $T = [4, 3, 2, 1]$.

b. Modéliser ce problème par un programme (P). On supposera que T possède cinq entrées $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$. Dans un premier temps votre fonction objectif pourra utiliser des valeurs absolues. Essayer de limiter le nombre de contraintes.

c. Modifier (P) pour en faire un programme linéaire, i.e. sans valeurs absolues dans la fonction objectif.

d. Un certificat d'optimalité de la solution de (P) peut être donné par un ensemble de couples disjoints $(a_{i_1}, a_{j_1}), (a_{i_2}, a_{j_2}), \ldots$ tels que $i_k < j_k$ et $a_{i_k} > a_{j_k}$ pour tous les k. La valeur de ce certificat est alors $(a_{i_1} - a_{j_1}) + (a_{i_2} - a_{j_2}) + \ldots$. Proposer une solution optimale T' pour $T = [4, 7, 2, 1, 3, 6, 5]$ ainsi qu'un certificat d'optimalité de votre solution. Expliquer en quelques lignes pourquoi votre certificat assure bien l'optimalité de votre solution.